# Equazioni doppiamente non lineari in spazi metrici

Riccarda Rossi
(Università di Brescia)

in collaborazione con
Messoud Efendiev (IBB – Neuerberg),
Alexander Mielke (WIAS – Berlin),
Giuseppe Savaré (Università di Pavia),

Giornate di Lavoro su Questioni di Teoria Geometrica della Misura e di Calcolo delle Variazioni

Levico, 5–9 Febbraio 2007

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0,T), \tag{DNE}$$

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0, T), \qquad \text{(DNE)}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0, T), \tag{DNE}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0, +\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0, T), \tag{DNE}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0, +\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;
- $\partial$ è il sottodifferenziale **nel senso dell'analisi convessa**

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T), \tag{DNE}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0, +\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;
- $\partial$ è il sottodifferenziale **nel senso dell'analisi convessa**
- $\mathcal{E} : [0, T] \times B \to (-\infty, +\infty]$ è **derivabile** (liscio) rispetto a $t \in (0, T)$

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T), \tag{DNE}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0,+\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;
- $\partial$ è il sottodifferenziale **nel senso dell'analisi convessa**
- $\mathcal{E} : [0,T] \times B \to (-\infty,+\infty]$ è **derivabile** (liscio) rispetto a $t \in (0,T)$
- $\partial_u$ è il "sottodifferenziale" di $\mathcal{E}$ **rispetto alla seconda variabile**:

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(\dot{u}(t)) + \mathrm{D}\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0, T), \qquad \text{(DNE)}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0, +\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;
- $\partial$ è il sottodifferenziale **nel senso dell'analisi convessa**
- $\mathcal{E} : [0, T] \times B \to (-\infty, +\infty]$ è **derivabile** (liscio) rispetto a $t \in (0, T)$
- $\partial_u$ è il "sottodifferenziale" di $\mathcal{E}$ **rispetto alla seconda variabile**: è $\mathrm{D}\mathcal{E}$ se $\mathcal{E}$ è **liscio**,

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(\dot{u}(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T), \tag{DNE}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0, +\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;
- $\partial$ è il sottodifferenziale **nel senso dell'analisi convessa**
- $\mathcal{E} : [0, T] \times B \to (-\infty, +\infty]$ è **derivabile** (liscio) rispetto a $t \in (0, T)$
- $\partial_u$ è il "sottodifferenziale" di $\mathcal{E}$ **rispetto alla seconda variabile**: è $\mathrm{D}\mathcal{E}$ se $\mathcal{E}$ è **liscio**, è $\partial\mathcal{E}$ se $\mathcal{E}$ è **convesso e s.c.i.**

# Una classe di equazioni doppiamente non lineari

Consideriamo questa equazione **doppiamente non lineare**

$$\partial\Psi(\dot{u}(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T), \qquad \text{(DNE)}$$

- $B$ è uno spazio di Banach separabile;
- $\Psi : B \to [0, +\infty]$, con $\Psi(0) = 0$, è s.c.i. e **convesso**;
- $\partial$ è il sottodifferenziale **nel senso dell'analisi convessa**
- $\mathcal{E} : [0, T] \times B \to (-\infty, +\infty]$ è **derivabile** (liscio) rispetto a $t \in (0, T)$
- $\partial_u$ è il "sottodifferenziale" di $\mathcal{E}$ **rispetto alla seconda variabile**: è $\mathrm{D}\mathcal{E}$ se $\mathcal{E}$ è **liscio**, è $\partial\mathcal{E}$ se $\mathcal{E}$ è **convesso e s.c.i.**

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi \sim$ potenziale di **dissipazione**

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi \sim$ potenziale di **dissipazione**
- $\mathcal{E} \sim$ funzionale di **energia** $(\mathcal{E}(\cdot, u) \sim$ **forza esterna**$)$

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi$ $\sim$ potenziale di **dissipazione**
- $\mathcal{E}$ $\sim$ funzionale di **energia** $(\mathcal{E}(\cdot, u) \sim$ **forza esterna**$)$

**Due casi**:

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi$ ∼ potenziale di **dissipazione**
- $\mathcal{E}$ ∼ funzionale di **energia** ($\mathcal{E}(\cdot,u)$ ∼ **forza esterna**)

**Due casi**:

1. $\Psi$ ha crescita **superlineare**

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\Psi(v)}{\|v\|} = +\infty$$

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi \sim$ potenziale di **dissipazione**
- $\mathcal{E} \sim$ funzionale di **energia** $(\mathcal{E}(\cdot,u) \sim$ **forza esterna**$)$

**Due casi**:

1. $\Psi$ ha crescita **superlineare** $\leftrightarrow$ dissipazione con effetti di **viscosità**

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\Psi(v)}{\|v\|} = +\infty$$

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi \sim$ potenziale di **dissipazione**
- $\mathcal{E} \sim$ funzionale di **energia** $(\mathcal{E}(\cdot, u) \sim$ **forza esterna**$)$

**Due casi**:

1. $\Psi$ ha crescita **superlineare** $\leftrightarrow$ dissipazione con effetti di **viscosità**

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} \frac{\Psi(v)}{\|v\|} = +\infty$$

2. $\Psi$ ha crescita **lineare** ed è **positivamente 1-omogeneo**

$$\Psi(\lambda v) = \lambda\Psi(v) \quad \forall\, \lambda \geq 0\ \forall\, v \in B$$

# Interpretazione fisica

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T),$$

è una **legge di bilancio** generalizzata in **Termomeccanica**:

- $\Psi \sim$ potenziale di **dissipazione**
- $\mathcal{E} \sim$ funzionale di **energia** $(\mathcal{E}(\cdot,u) \sim$ **forza esterna**$)$

**Due casi**:

1. $\Psi$ ha crescita **superlineare** $\leftrightarrow$ dissipazione con effetti di **viscosità**
$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\Psi(v)}{\|v\|} = +\infty$$
2. $\Psi$ **positivamente 1-omogeneo** $\leftrightarrow$ modelli **rate-independent**
$$\Psi(\lambda v) = \lambda\Psi(v) \quad \forall\,\lambda \geq 0\ \forall\, v \in B$$

# Il caso superlineare

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

$\Psi$ con **crescita superlineare**

# Il caso superlineare

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

$\Psi$ con **crescita superlineare**

## Applicazioni

- elasto-visco-plasticità
- transizioni di fase
- fenomeni di dissipazione..

# Il caso superlineare

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T),$$

$\Psi$ con **crescita superlineare**

## Applicazioni

- elasto-visco-plasticità
- transizioni di fase
- fenomeni di dissipazione..

## Risultati generali

$\mathcal{E}$ **convesso** ($\mathcal{E}$ perturbazione $\mathrm{C}^1$ di un convesso), $B$ **riflessivo**:

- esistenza & approssimazione: [Barbu '75], [Arai '79], [Semba '86], [Colli-Visintin '90], [Colli '92]
- comportamento per tempi lunghi: [Segatti'06, Schimperna-Segatti-Stefanelli '06]

# Il caso rate-independent

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

$\Psi$ con **1-positivamente omogeneo**

# Il caso rate-independent

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T),$$

$\Psi$ con **1-positivamente omogeneo**

## Applicazioni e risultati

1. **trasformazioni di fase solido-solido quasistatiche (in SMA)**: [Mielke-Theil-Levitas '02], [Mielke-Roubíček '03]
2. **elastoplasticità quasistatica**: [Dal Maso-De Simone-Mora '06], [Dal Maso-De Simone-Mora-Morini '06], [Mielke et al. '02, '03, '04],..
3. **propagazione quasistatica di fratture**: [Mainik-Mielke '04], [Dal Maso-Francfort-Toader '05] [Francfort-Mielke '05]...
4. **danneggiamento**: [Mielke-Roubíček '06]...
5. **problemi di delaminazione**: [Kočvara-Mielke-Roubíček '03]
6. **ferromagnetismo, ferroelettricità**: [Mielke-Timofte '05]....

# Energie non lisce, spazi non riflessivi

Soprattutto nei **problemi rate-independent**

- $\mathcal{E}$ può essere **non liscia**;
- $\mathcal{E}$ può essere **non convessa**

# Energie non lisce, spazi non riflessivi

Soprattutto nei **problemi rate-independent**

- $\mathcal{E}$ può essere **non liscia**;
- $\mathcal{E}$ può essere **non convessa**
- $B$ può essere **non riflessivo** (es., $L^1$ nelle PT in SMA),
- $B$ può **non avere una struttura lineare** (es., propagazione delle fratture)

# Energie non lisce, spazi non riflessivi

Soprattutto nei **problemi rate-independent**

- $\mathcal{E}$ può essere **non liscia**;
- $\mathcal{E}$ può essere **non convessa**
- $B$ può essere **non riflessivo** (es., $L^1$ nelle PT in SMA),
- $B$ può **non avere una struttura lineare** (es., propagazione delle fratture)

**Esempio**:
in ferromagnetismo intervengono energie del tipo

$$\mathcal{E}(t,u) = \mathcal{E}(u) = \begin{cases} \widehat{\mathcal{E}}(u) & \text{se } |u(x)| = 1 \text{ q.o. in } \Omega, \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\widehat{\mathcal{E}} : H^1(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ di classe $\mathrm{C}^1$

# Energie non lisce, spazi non riflessivi

Soprattutto nei **problemi rate-independent**

- $\mathcal{E}$ può essere **non liscia**;
- $\mathcal{E}$ può essere **non convessa**
- $B$ può essere **non riflessivo** (es., $L^1$ nelle PT in SMA),
- $B$ può **non avere una struttura lineare** (es., propagazione delle fratture)

**Esempio**:
$\mathcal{E}$ è altamente **non convessa**:

$$\mathcal{E}(t,u) = \widehat{\mathcal{E}}(u) + \int_\Omega \mathrm{I}_{\mathrm{S}^{d-1}}(u) \quad \forall\, u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$$

con $\mathrm{I}_{\mathrm{S}^{d-1}}$ la funzione indicatrice della sfera unitaria in $\mathbb{R}^d$

# Energie non lisce, spazi non riflessivi

Soprattutto nei **problemi rate-independent**

- $\mathcal{E}$ può essere **non liscia**;
- $\mathcal{E}$ può essere **non convessa**
- $B$ può essere **non riflessivo** (es., $L^1$ nelle PT in SMA),
- $B$ può **non avere una struttura lineare** (es., propagazione delle fratture)

**Esempio**:
$\mathcal{E}$ è di fatto definita sullo spazio

$$X = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \ : \ |u(x)| = 1 \text{ q.o. in } \Omega\}$$

che non è uno spazio vettoriale. Solo uno spazio **metrico**

# Programma

Nel contesto di uno **spazio metrico**

# Programma

Nel contesto di uno **spazio metrico**

1. Analisi di **modelli rate-independent**: esistenza & approssimazione di soluzioni

# Programma

Nel contesto di uno **spazio metrico**

1. Analisi di **modelli rate-independent**: esistenza & approssimazione di soluzioni
2. **Approssimazione** di evoluzioni rate-independent **con evoluzioni viscose**: studio del **limite per vanishing viscosity**

$$\varepsilon u'(t) + \partial\Psi(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad t \in (0, T), \qquad \varepsilon \searrow 0$$

di un modello rate-independent

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad t \in (0, T),$$

[Efendiev-Mielke '05], [Dal Maso-De Simone-Mora-Morini '06]

# Programma

Nel contesto di uno **spazio metrico**

1. Analisi di **modelli rate-independent**: esistenza & approssimazione di soluzioni
2. **Approssimazione** di evoluzioni rate-independent **con evoluzioni viscose**: studio del **limite per vanishing viscosity**

$$\varepsilon u'(t) + \partial\Psi(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad t \in (0, T), \qquad \varepsilon \searrow 0$$

   di un modello rate-independent

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad t \in (0, T),$$

   [Efendiev-Mielke '05], [Dal Maso-De Simone-Mora-Morini '06]

3. Analisi di equazioni doppiamente non lineari con **dissipazione a crescita superlineare**: esistenza & approssimazione di soluzioni

# Programma

Nel contesto di uno **spazio metrico**

1. Analisi di equazioni doppiamente non lineari con **dissipazione a crescita superlineare**: esistenza & approssimazione di soluzioni [quasi preprint]
2. **Approssimazione** di evoluzioni rate-independent **con evoluzioni viscose**: studio del **limite per vanishing viscosity** [work in progress]
3. Analisi di **modelli rate-independent**: esistenza & approssimazione di soluzioni [work in progress]

# Verso gli spazi metrici

Nel contesto di uno **spazio metrico**:

Risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad t \in (0, T) \tag{DNE}$$

nel caso

- $\Psi$ a crescita superlineare
- per semplicità $\mathcal{E}$ non dipende da $t$

# Verso gli spazi metrici

Nel contesto di uno **spazio metrico**:

Risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(u(t)) \ni 0 \quad t \in (0, T) \tag{DNE}$$

nel caso

- $\Psi$ a crescita superlineare
- per semplicità $\mathcal{E}$ non dipende da $t$

# Verso gli spazi metrici

Nel contesto di uno **spazio metrico**:

Risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(u(t)) \ni 0 \quad t \in (0,T) \qquad \text{(DNE)}$$

nel caso

- $\Psi$ a crescita superlineare
- per semplicità $\mathcal{E}$ non dipende da $t$

**Teoria di appoggio**: analisi di **gradient flows** in spazi metrici ((DNE) con $\Psi$ quadratica)

# Verso gli spazi metrici

Nel contesto di uno **spazio metrico**:

Risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(u(t)) \ni 0 \quad t \in (0,T) \tag{DNE}$$

nel caso

- $\Psi$ a crescita superlineare
- per semplicità $\mathcal{E}$ non dipende da $t$

**Teoria di appoggio**: analisi di **gradient flows** in spazi metrici ((DNE) con $\Psi$ quadratica)

- **De Giorgi, Marino, Saccon, Tosques, Degiovanni, Ambrosio** '80 $\sim$ '90 $\rightsquigarrow$ teoria astratta delle **Curve di Massima Pendenza** e dei **Movimenti Minimizzanti**

# Verso gli spazi metrici

Nel contesto di uno **spazio metrico**:

Risultati di esistenza e approssimazione di soluzioni per

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(u(t)) \ni 0 \quad t \in (0,T) \tag{DNE}$$

nel caso

- $\Psi$ a crescita superlineare
- per semplicità $\mathcal{E}$ non dipende da $t$

**Teoria di appoggio**: analisi di **gradient flows** in spazi metrici ((DNE) con $\Psi$ quadratica)

- **De Giorgi, Marino, Saccon, Tosques, Degiovanni, Ambrosio** '80 $\sim$ '90 $\rightsquigarrow$ teoria astratta delle **Curve di Massima Pendenza** e dei **Movimenti Minimizzanti**
- **Ambrosio-Gigli-Savaré** monografia 2005 $\rightsquigarrow$ sistematizzazione e raffinamento della teoria di esistenza, approssimazione & unicità, applicazioni a gradient flows in spazi di Wasserstein

# Verso una formulazione metrica

## Dati:

- Uno spazio metrico completo $(X, d)$,
- un funzionale $\Psi : X \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare**
- Un funzionale $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i.

## Problema:

Come formulare l'equazione doppiamente non lineare

$$\text{“ } \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0, \quad t \in (0, T) \text{ ”}$$

# Verso una formulazione metrica

## Dati:

- Uno spazio metrico completo $(X, d)$,
- un funzionale $\Psi : X \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare**
- Un funzionale $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i.

## Problema:

Come formulare l'equazione doppiamente non lineare

$$\text{“} \ \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0, \quad t \in (0, T) \ \text{”}$$

in **assenza di una struttura lineare/differenziale** su $X$?

# Verso una formulazione metrica

## Dati:

- Uno spazio metrico completo $(X, d)$,
- un funzionale $\Psi : X \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare**
- Un funzionale $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i.

## Problema:

Come formulare l'equazione doppiamente non lineare

$$\text{“}\ \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0, \quad t \in (0, T)\ \text{”}$$

in **assenza di una struttura lineare/differenziale** su $X$?

L'intuizione viene dal caso euclideo....

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\langle \nabla\Psi(u'(t)), u'(t) \rangle + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\langle \nabla\Psi(u'(t)), u'(t) \rangle + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

Segue dall'**analisi convessa** che

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\langle \nabla\Psi(u'(t)), u'(t) \rangle + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

Segue dall'**analisi convessa** che

$$\langle \nabla\Psi(u'(t)), u'(t) \rangle = \Psi(u'(t))) + \Psi^*(\nabla\Psi(u'(t)))$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big(\nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0\Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\langle \nabla\Psi(u'(t)), u'(t)\rangle + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t)\rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

Segue dall'**analisi convessa** e dall'**equazione** che

$$\begin{aligned} \langle \nabla\Psi(u'(t)), u'(t)\rangle &= \Psi(u'(t))) + \Psi^*(\nabla\Psi(u'(t))) \\ &= \Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) \end{aligned}$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

Segue dalla **chain rule** per $\mathcal{E}$ che

$$\langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = 0 \quad t \in (0, T)$$

Segue dalla **chain rule** per $\mathcal{E}$ che

$$\langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t))$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

$$\Big( \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \Big) \times u'(t) \quad t \in (0, T)$$

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

Segue dalla **chain rule** per $\mathcal{E}$ che

$$\langle \nabla\mathcal{E}(u(t)), u'(t) \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t))$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

Di fatto, le due formulazioni sono equivalenti:

$$\nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

Nel caso particolare

$$\Psi(x) := \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \Psi^*(x) := \frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

Nel caso particolare

$$\Psi(x) := \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \Psi^*(x) := \frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Psi(u'(t)) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

Nel caso particolare

$$\Psi(x) := \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \Psi^*(x) := \frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{p}\left|u'(t)\right|^p + \frac{1}{q}\left|-\nabla\mathcal{E}(u(t))\right|^q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

Nel caso particolare

$$\Psi(x) := \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \Psi^*(x) := \frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{p}|u'(t)|^p + \frac{1}{q}|-\nabla\mathcal{E}(u(t))|^q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

In questa formulazione intervengono **i moduli delle derivate,** anzichè le derivate,

# Approccio euristico alla formulazione metrica

## Dati:

- $\Psi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, **convesso, l.s.c., con crescita superlineare, liscio**
- Un funzionale $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., **liscio**

Nel caso particolare

$$\Psi(x) := \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty, \qquad \Psi^*(x) := \frac{|x|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{p}|u'(t)|^p + \frac{1}{q}|-\nabla\mathcal{E}(u(t))|^q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T)$$

In questa formulazione intervengono **i moduli delle derivate,** anzichè le derivate, quindi può essere adattata agli spazi metrici, pur di introdurre opportuni **"surrogati metrici"** del **"modulo di una derivata"**.

# La derivata metrica

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

# La derivata metrica

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

## Derivata metrica

- Una curva $u : [0, T] \to X$ è **assolutamente continua** se

$$\exists m \in L^1(0, T) \ : \quad d(u(t), u(s)) \leq \int_s^t m(r) \, \mathrm{d}r \quad \forall \, 0 \leq s \leq t \leq T.$$

# La derivata metrica

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

## Derivata metrica

- Una curva $u : [0, T] \to X$ è **assolutamente continua** se

$$\exists m \in L^1(0,T) \ : \quad d(u(t), u(s)) \leq \int_s^t m(r)\,\mathrm{d}r \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T.$$

- Data $u \in \mathrm{AC}(0, T; X)$, la sua **derivata metrica** è definita da

$$|u'|(t) := \lim_{h \to 0} \frac{d(u(t), u(t+h))}{|h|} \quad \text{per q.o. } t \in (0,T)$$

# La derivata metrica

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

## Derivata metrica

- Una curva $u : [0, T] \to X$ è **assolutamente continua** se

$$\exists m \in L^1(0,T) : \quad d(u(t), u(s)) \leq \int_s^t m(r)\,\mathrm{d}r \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T.$$

- Data $u \in \mathrm{AC}(0,T;X)$, la sua **derivata metrica** è definita da

$$|u'|(t) := \lim_{h \to 0} \frac{d(u(t), u(t+h))}{|h|} \quad \text{per q.o. } t \in (0,T)$$

$$\|u'(t)\| \rightsquigarrow |u'|(t)$$

# La pendenza locale

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

# La pendenza locale

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

## Pendenza locale & Chain rule

- Dati $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ and $u \in D(\mathcal{E})$, la **pendenza locale** di $\mathcal{E}$ in $u$ è

$$|\partial\mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)}$$

# La pendenza locale

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

## Pendenza locale & Chain rule

- Dati $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ and $u \in D(\mathcal{E})$, la **pendenza locale** di $\mathcal{E}$ in $u$ è

$$|\partial \mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)}$$

$$\| - \nabla \mathcal{E}(u)\| \rightsquigarrow |\partial \mathcal{E}|(u)$$

# La pendenza locale

- **Setting:** $(X, d)$ spazio metrico completo

## Pendenza locale & Chain rule

- Dati $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ and $u \in D(\mathcal{E})$, la **pendenza locale** di $\mathcal{E}$ in $u$ è

$$|\partial \mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)}$$

$$\| - \nabla \mathcal{E}(u)\| \rightsquigarrow |\partial \mathcal{E}|(u)$$

- Si dice che $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto a $|\partial \mathcal{E}|$ se $\forall\, v \in \mathrm{AC}(0, T; D(\mathcal{E}))$, la funzione $t \mapsto (\mathcal{E} \circ v)(t)$ è **assolutamente continua** e

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(v(t)) \leq |v'|(t)\, |\partial \mathcal{E}|(v(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

# La pendenza locale

- $(X,d)$ s.m. completo, $\mathcal{E}: X \to (-\infty,+\infty]$, $v \in \mathrm{AC}(0,T;D(\mathcal{E}))$

$$|\partial\mathcal{E}|(u) := \limsup_{v\to u} \frac{(\mathcal{E}(u)-\mathcal{E}(v))^+}{d(u,v)} \quad u \in D(\mathcal{E})$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(v(t)) \leq |v'|(t)\ |\partial\mathcal{E}|(v(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0,T).$$

# La pendenza locale

- $(X, d)$ s.m. completo, $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$, $v \in \mathrm{AC}(0, T; D(\mathcal{E}))$

$$|\partial \mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)} \quad u \in D(\mathcal{E})$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(v(t)) \leq |v'|(t)\, |\partial \mathcal{E}|(v(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

## Per fissare le idee..

- $X = B$ spazio di Banach

# La pendenza locale

- $(X, d)$ s.m. completo, $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$, $v \in \mathrm{AC}(0, T; D(\mathcal{E}))$

$$|\partial\mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)} \quad u \in D(\mathcal{E})$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(v(t)) \leq |v'|(t)\, |\partial\mathcal{E}|(v(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

## Per fissare le idee..

- $X = B$ spazio di Banach
- $\mathcal{E} : B \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e **convesso**

# La pendenza locale

- $(X, d)$ s.m. completo, $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$, $v \in \mathrm{AC}(0, T; D(\mathcal{E}))$

$$|\partial\mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)} \quad u \in D(\mathcal{E})$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(v(t)) \leq |v'|(t)\, |\partial\mathcal{E}|(v(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

## Per fissare le idee..

- $X = B$ spazio di Banach
- $\mathcal{E} : B \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e **convesso**
- $\partial\mathcal{E}$ sottodifferenziale di $\mathcal{E}$

# La pendenza locale

- $(X, d)$ s.m. completo, $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$, $v \in \mathrm{AC}(0, T; D(\mathcal{E}))$

$$|\partial\mathcal{E}|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)} \quad u \in D(\mathcal{E})$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(v(t)) \leq |v'|(t)\, |\partial\mathcal{E}|(v(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

## Per fissare le idee..

- $X = B$ spazio di Banach
- $\mathcal{E} : B \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e **convesso**
- $\partial\mathcal{E}$ sottodifferenziale di $\mathcal{E}$

Si ha

$$|\partial\mathcal{E}|(u) = \min\{\|\xi\|_{B'} \ : \ \xi \in \partial\mathcal{E}(u)\} \quad \forall\, u \in D(\mathcal{E}).$$

e la chain rule per $|\partial\mathcal{E}|$ segue dalla chain rule per $\partial\mathcal{E}$.

# Una formulazione puramente metrica

- **Ipotesi di base**:
  - $(X, d)$ spazio metrico completo

# Una formulazione puramente metrica

- **Ipotesi di base**:
  - $(X, d)$ spazio metrico completo
  - Dissipazione $\rightsquigarrow$ $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s.c.i., convesso, $\psi(0) = 0$, con

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty$$

# Una formulazione puramente metrica

- **Ipotesi di base**:
  - $(X, d)$ spazio metrico completo
  - Dissipazione $\rightsquigarrow$ $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s.c.i., convesso, $\psi(0) = 0$, con

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty$$

Energia $\rightsquigarrow$ $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., e soddisfa la **chain rule** rispetto a $|\partial\mathcal{E}|$

# Una formulazione puramente metrica

- **Ipotesi di base**:
  - $(X, d)$ spazio metrico completo
  - Dissipazione $\rightsquigarrow$ $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s.c.i., convesso, $\psi(0) = 0$, con

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty$$

Energia $\rightsquigarrow$ $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., e soddisfa la **chain rule** rispetto a $|\partial\mathcal{E}|$

## Formulazione metrica

Una curva $u \in \mathrm{AC}(0, T; X)$ è soluzione della **formulazione metrica** dell'equazione doppiamente non lineare

$$\text{“} \; \nabla\Psi(u'(t)) + \nabla\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0, T) \; \text{”}$$

se

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^*(|\partial\mathcal{E}|(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0, T)$$

# Analogia

La **formulazione metrica**

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^*(|\partial\mathcal{E}|(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0,T)$$

# Analogia

La **formulazione metrica**

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^*(|\partial\mathcal{E}|(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0,T)$$

è analoga a

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0,T)$$

# Analogia

La **formulazione metrica**

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^*(|\partial\mathcal{E}|(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in (0,T)$$

è analoga a

$$\Psi(u'(t))) + \Psi^*(-\nabla\mathcal{E}(u(t))) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) = 0 \quad t \in (0,T)$$

ricordando che

$$\|u'(t)\| \rightsquigarrow |u'|(t) \qquad \|-\nabla\mathcal{E}(u(t))\| \rightsquigarrow |\partial\mathcal{E}|(u(t))$$

# Approssimazione

- $\tau > 0$: passo di discretizzazione $\rightsquigarrow$ partizione di $[0, T]$

# Approssimazione

- $\tau > 0$: passo di discretizzazione $\rightsquigarrow$ partizione di $[0, T]$
- **Soluzioni discrete** $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$: soluzioni del **Problema Incrementale**

$$\begin{cases} U_\tau^0 := U_0, \\ U_\tau^k \in \mathrm{Argmin}_{v \in X} \left\{ \tau\psi\left(\frac{d(U_\tau^{k-1}, v)}{\tau}\right) + \mathcal{E}(v) \right\}, \end{cases}$$

che è **ha senso** anche in uno **spazio metrico!**

# Approssimazione

- $\tau > 0$: passo di discretizzazione $\rightsquigarrow$ partizione di $[0, T]$
- **Soluzioni discrete** $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$: soluzioni del **Problema Incrementale**

$$\begin{cases} U_\tau^0 := U_0, \\ U_\tau^k \in \mathrm{Argmin}_{v \in X} \left\{ \tau \psi \left( \frac{d(U_\tau^{k-1}, v)}{\tau} \right) + \mathcal{E}(v) \right\}, \end{cases}$$

  che è **ha senso** anche in uno **spazio metrico!**
- **Condizioni sufficienti** per l'esistenza di $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$:
  - $\mathcal{E}$ s.c.i.,
  - $\mathcal{E}$ coerciva (i sottolivelli di $\mathcal{E}$ compatti)

# Approssimazione

- $\tau > 0$: passo di discretizzazione $\rightsquigarrow$ partizione di $[0, T]$
- **Soluzioni discrete** $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$: soluzioni del **Problema Incrementale**

$$\begin{cases} U_\tau^0 := U_0, \\ U_\tau^k \in \mathrm{Argmin}_{v \in X} \left\{ \tau\psi\left(\frac{d(U_\tau^{k-1}, v)}{\tau}\right) + \mathcal{E}(v) \right\}, \end{cases}$$

che è **ha senso** anche in uno **spazio metrico!**
- **Condizioni sufficienti** per l'esistenza di $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$:
  - $\mathcal{E}$ s.c.i.,
  - $\mathcal{E}$ coerciva (i sottolivelli di $\mathcal{E}$ compatti)
- **Soluzioni approssimate**: interpolate su $[0, T]$ delle soluzioni discrete $\{U_\tau^k\}_{k=1}^n$:
  - $\{\overline{U}_\tau\}$, $\{\underline{U}_\tau\}$ costanti a tratti;

# Approssimazione

- $\tau > 0$: passo di discretizzazione $\rightsquigarrow$ partizione di $[0, T]$
- **Soluzioni discrete** $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$: soluzioni del **Problema Incrementale**

$$\begin{cases} U_\tau^0 := U_0, \\ U_\tau^k \in \mathrm{Argmin}_{v \in X} \left\{ \tau \psi \left( \frac{d(U_\tau^{k-1}, v)}{\tau} \right) + \mathcal{E}(v) \right\}, \end{cases}$$

  che è **ha senso** anche in uno **spazio metrico!**
- **Condizioni sufficienti** per l'esistenza di $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$:
  - $\mathcal{E}$ s.c.i.,
  - $\mathcal{E}$ coerciva (i sottolivelli di $\mathcal{E}$ compatti)
- **Soluzioni approssimate**: interpolate su $[0, T]$ delle soluzioni discrete $\{U_\tau^k\}_{k=1}^n$:
  - $\{\overline{U}_\tau\}$, $\{\underline{U}_\tau\}$ costanti a tratti;
  - **attenzione:** l'interpolata lineare a tratti non si può definire!

# Approssimazione

- $\tau > 0$: passo di discretizzazione $\rightsquigarrow$ partizione di $[0, T]$
- **Soluzioni discrete** $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$: soluzioni del **Problema Incrementale**

$$\begin{cases} U_\tau^0 := U_0, \\ U_\tau^k \in \mathrm{Argmin}_{v \in X} \left\{ \tau\psi\left(\frac{d(U_\tau^{k-1}, v)}{\tau}\right) + \mathcal{E}(v) \right\}, \end{cases}$$

  che è **ha senso** anche in uno **spazio metrico!**
- **Condizioni sufficienti** per l'esistenza di $U_\tau^0, U_\tau^1, \ldots, U_\tau^N$:
  - $\mathcal{E}$ s.c.i.,
  - $\mathcal{E}$ coerciva (i sottolivelli di $\mathcal{E}$ compatti)
- **Soluzioni approssimate**: interpolate su $[0, T]$ delle soluzioni discrete $\{U_\tau^k\}_{k=1}^n$:
  - $\{\overline{U}_\tau\}$, $\{\underline{U}_\tau\}$ costanti a tratti;
  - $\rightsquigarrow$ **interpolata variazionale** $\{\widetilde{U}_\tau\}$ di De Giorgi (Movimenti Minimizzanti)

# Compattezza

- **Disuguaglianza dell'energia approssimata**:

$$\int_0^t \psi\left(\frac{d(\underline{U}_\tau(r), \overline{U}_\tau(r))}{\tau}\right) \mathrm{d}r + \int_0^t \psi^*\left(|\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_\tau(r))\right) \mathrm{d}r + \mathcal{E}(\overline{U}_\tau(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

# Compattezza

- **Disuguaglianza dell'energia approssimata**:

$$\int_0^t \psi\left(\frac{d(\underline{U}_\tau(r),\overline{U}_\tau(r))}{\tau}\right)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \psi^*\left(|\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_\tau(r))\right)\,\mathrm{d}r + \mathcal{E}(\overline{U}_\tau(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

- da cui
  - ✓ stime a priori
  - ✓ **compattezza** (grazie a una versione metrica del teorema di Ascoli-Arzelà): esistono sottosuccessioni $\{U_{\tau_n}\}$, $\{\widetilde{U}_{\tau_n}\}$ convergenti a una curva limite $u$

# Passaggio al limite

Con un argomento di **semicontinuità inferiore**, passiamo al limite

$$\int_0^t \psi\left(\frac{d(\underline{U}_{\tau_n}(s),\overline{U}_{\tau_n}(s))}{\tau_n}\right)\,\mathrm{d}s+\int_0^t \psi^*\left(|\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_{\tau_n}(s))\right)\,\mathrm{d}s+\mathcal{E}(\overline{U}_{\tau_n}(t))$$

$$\leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t\in[0,T]$$

# Passaggio al limite

Con un argomento di **semicontinuità inferiore**, passiamo al limite

$$\int_0^t \psi\left(\frac{d(\underline{U}_{\tau_n}(s), \overline{U}_{\tau_n}(s))}{\tau_n}\right) \mathrm{d}s + \int_0^t \psi^*\left(|\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_{\tau_n}(s))\right) \mathrm{d}s + \mathcal{E}(\overline{U}_{\tau_n}(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^t \psi(|u'|(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \psi^*\left(\liminf_{n\uparrow\infty} |\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_{\tau_n}(s))\right) \mathrm{d}s + \mathcal{E}(u(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

# Passaggio al limite

$$\int_0^t \psi(|u'|(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \psi^*\left(\liminf_{n\uparrow\infty} |\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_{\tau_n}(s))\right)\,\mathrm{d}s + \mathcal{E}(u(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

# Passaggio al limite

$$\int_0^t \psi(|u'|(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \psi^*\left(\liminf_{n\uparrow\infty} |\partial\mathcal{E}|(\widetilde{U}_{\tau_n}(s))\right)\,\mathrm{d}s + \mathcal{E}(u(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

È naturale introdurre la **pendenza rilassata**

$$|\partial^-\mathcal{E}|(u) := \inf\left\{\liminf_{n\uparrow\infty} |\partial\mathcal{E}|(u_n) \ : \ u_n \to u,\ \sup_n \mathcal{E}(u_n) < +\infty\right\}$$

cioè l'**inviluppo s.c.i.** (lungo successioni a energia limitata) della pendenza locale.

# Passaggio al limite

$$\int_0^t \psi(|u'|(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \psi^*\left(|\partial^- \mathcal{E}|(u(s))\right)\,\mathrm{d}s + \mathcal{E}(u(t)) \leq \mathcal{E}(u_0) \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

È naturale introdurre la **pendenza rilassata**

$$|\partial^- \mathcal{E}|(u) := \inf\left\{\liminf_{n\uparrow\infty} |\partial\mathcal{E}|(u_n) \ : \ u_n \to u, \ \sup_n \mathcal{E}(u_n) < +\infty\right\}$$

cioè l'**inviluppo s.c.i.** (lungo successioni a energia limitata) della pendenza locale.

# Conclusione

Supponiamo che $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto alla **pendenza rilassata** $|\partial^- \mathcal{E}|$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \leq |u'|(t) \left|\partial^- \mathcal{E}\right| (u(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

# Conclusione

Supponiamo che $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto alla **pendenza rilassata** $|\partial^- \mathcal{E}|$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \leq |u'|(t)\ \left|\partial^- \mathcal{E}\right|(u(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0,T).$$

Si ha $\forall\, t \in [0,T]$

$$\int_0^t \psi(|u'|(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \psi^*\left(|\partial^- \mathcal{E}|(u(s))\right)\,\mathrm{d}s \leq \mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}(u(t))$$
$$\leq \int_0^t |u'|(s)\ \left|\partial^- \mathcal{E}\right|(u(s))\,\mathrm{d}s,$$

# Conclusione

Supponiamo che $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto alla **pendenza rilassata** $|\partial^- \mathcal{E}|$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \leq |u'|(t) \, \left|\partial^- \mathcal{E}\right|(u(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

da cui $\forall\, t \in [0, T]$

$$\int_0^t \left(\psi(|u'|(s))\,\mathrm{d}s + \psi^*\left(|\partial^- \mathcal{E}|(u(s))\right) - |u'|(s)\, \left|\partial^- \mathcal{E}\right|(u(s))\right) \mathrm{d}s = 0$$

# Conclusione

Supponiamo che $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto alla **pendenza rilassata** $|\partial^- \mathcal{E}|$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \leq |u'|(t) \left|\partial^- \mathcal{E}\right|(u(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T).$$

e si deduce

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^* \left(|\partial^- \mathcal{E}|(u(t))\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \quad \text{per q.o. } \ t \in (0, T),$$

cioè $u$ soddisfa la **formulazione metrica** dell'equazione doppiamente non lineare **rispetto a** $|\partial^- \mathcal{E}|$.

# Un risultato di esistenza e di approssimazione

**Teorema:**
Supponiamo

- $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s.c.i., convesso, $\psi(0) = 0$, con crescita superlineare
- $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e coercivo
- $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto a $|\partial^- \mathcal{E}|$

# Un risultato di esistenza e di approssimazione

**Teorema:**

Supponiamo

- $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s.c.i., convesso, $\psi(0) = 0$, con crescita superlineare
- $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e coercivo
- $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto a $|\partial^- \mathcal{E}|$

Allora, le soluzioni approssimate convergono a una curva $u \in \mathrm{AC}(0, T; X)$ che soddisfa $u(0) = u_0$ e

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^* \left(|\partial^- \mathcal{E}|(u(t))\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \quad \text{per q.o. } t \in (0, T),$$

# Un risultato di esistenza e di approssimazione

**Teorema:**

Supponiamo

- $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s.c.i., convesso, $\psi(0) = 0$, con crescita superlineare
- $\mathcal{E} : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e coercivo
- $\mathcal{E}$ soddisfa la **chain rule** rispetto a $|\partial^- \mathcal{E}|$

Allora, le soluzioni approssimate convergono a una curva $u \in \mathrm{AC}(0, T; X)$ che soddisfa $u(0) = u_0$ e

$$\psi(|u'|(t)) + \psi^* \left(|\partial^- \mathcal{E}|(u(t))\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(u(t)) \quad \text{per q.o.} \quad t \in (0, T),$$

Inoltre, vale **l'identità dell'energia** $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$

$$\int_s^t \psi(|u'|(r))\, \mathrm{d}r + \int_s^t \psi^* \left(\left|\partial^- \mathcal{E}\right| (u(r))\right) \mathrm{d}r + \mathcal{E}(u(t)) = \mathcal{E}(u(s))\,.$$

# Applicazioni

1. $X = B$, $B$ spazio di Banach **riflessivo**.
   Esistenza di soluzioni per equazioni doppiamente non lineari

$$\partial\Psi(u'(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T)$$

# Applicazioni

1. $X = B$, $B$ spazio di Banach **riflessivo**.
   Esistenza di soluzioni per equazioni doppiamente non lineari

$$\partial\Psi(u(t), u'(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T)$$

**quasivariazionali**

# Applicazioni

1. $X = B$, $B$ spazio di Banach **riflessivo**.
   Esistenza di soluzioni per equazioni doppiamente non lineari

$$\partial\Psi(u(t), u'(t)) + \partial\mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0, T)$$

**quasivariazionali**

2. $X = L^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dominio limitato.
   Risultati di esistenza per **evoluzioni metriche** in $L^1(\Omega)$