Interazione di norme L^2 e L^1 in evoluzioni rate-independent

Riccarda Rossi
(Università di Brescia)

in collaborazione con
Alexander Mielke (WIAS & Humboldt-Universität – Berlin)
Giuseppe Savaré (Università di Pavia)

Levico, 09.02.2009

Evoluzioni rate-independent nelle applicazioni

1. propagazione quasistatica di fratture **[Bourdin, Cagnetti, Chambolle, Dal Maso, Francfort, Giacomini, Knees, Larsen, Lazzaroni, Marigo, Mielke, Negri, Ortner, Ponsiglione, Toader, Zanini ......]**
2. trasformazioni di fase quasistatiche in leghe a memoria di forma (SMA) **[Auricchio, Levitas, Mainik, Mielke, Theil, Roubíček, Stefanelli....]**
3. elastoplasiticità linearizzata & finite-strain **[Dal Maso, DeSimone, Fiaschi, Francfort, Mora, Morini, Mielke, Mainik...]**
4. danneggiamento **[Francfort, Garroni, Larsen, Mielke, Roubíček...]**
5. delaminazione **[Kočvara, Mielke, Roubíček, Scardia, Zanini...]**
6. ferromagnetismo, ferroelettricità **[Mielke, Timofte...]**
7. evoluzione di forma di membrane **[Bucur, Buttazzo..]**

Evoluzioni rate-independent nelle applicazioni

1. propagazione quasistatica di fratture **[Bourdin, Cagnetti, Chambolle, Dal Maso, Francfort, Giacomini, Knees, Larsen, Lazzaroni, Marigo, Mielke, Negri, Ortner, Ponsiglione, Toader, Zanini ......]**
2. trasformazioni di fase quasistatiche in leghe a memoria di forma (SMA) **[Auricchio, Levitas, Mainik, Mielke, Theil, Roubíček, Stefanelli....]**
3. elastoplasiticità linearizzata & finite-strain **[Dal Maso, DeSimone, Fiaschi, Francfort, Mora, Morini, Mielke, Mainik...]**
4. danneggiamento **[Francfort, Garroni, Larsen, Mielke, Roubíček...]**
5. delaminazione **[Kočvara, Mielke, Roubíček, Scardia, Zanini...]**
6. ferromagnetismo, ferroelettricità **[Mielke, Timofte...]**
7. evoluzione di forma di membrane **[Bucur, Buttazzo..]**

In queste applicazioni

- **Energie** generalmente **non regolari e non convesse**
- **Spazi ambiente** eventualmente **privi di una struttura lineare** (e.g. in propagazione di fratture)

Formulazioni energetiche per evoluzioni rate-independent

Formulazioni deboli (“prive di derivate”)

Basate su

- bilancio energetico (identità dell’energia)
- condizioni di stabilità
- eventualmente, irreversibilità

Formulazioni energetiche per evoluzioni rate-independent

Approccio astratto di Mielke

- ♣ Spazio ambiente: B spazio metrico (ma anche solo topologico)
- ♣ Dissipazione: $\mathcal{D} : B \times B \longrightarrow [0, +\infty]$ pseudo-distanza
- ♣ Energia: $\mathcal{E} : (0, T) \times B \longrightarrow (-\infty, +\infty]$

Formulazioni energetiche per evoluzioni rate-independent

Approccio astratto di Mielke

- Spazio ambiente: B spazio metrico (ma anche solo topologico)
- Dissipazione: $\mathcal{D} : B \times B \to [0, +\infty]$ pseudo-distanza
- Energia: $\mathcal{E} : (0, T) \times B \to (-\infty, +\infty]$

Formulazione energetica [Mielke-Theil'99,'04], [Mielke-Theil-Levitas'02]

Soluzioni **energetiche globali** $u : [0, T] \to B$: **condizione di stabilità globale** & **bilancio dell'energia**

$$\mathcal{E}(t, u(t)) \leq \mathcal{E}(t, z) + \mathcal{D}(u(t), z) \qquad \forall\, z \in B\,,$$

$$\mathcal{E}(t, u(t)) + \mathrm{Diss}_{\mathcal{D}}(u, [0, t]) = \mathcal{E}(t, u(0)) + \int_0^t \partial_t \mathcal{E}(r, u(r))\,\mathrm{d}r\,.$$

con $\mathrm{Diss}_{\mathcal{D}}$ funzionale di dissipazione globale associato a $\mathcal{D}$

Il caso convesso

In **[Mielke-Theil'04]**: se

- B è Banach **riflessivo**
- $\mathcal{E}(t,\cdot)$ (uniformemente) convesso
- $\mathcal{D}$ indotta da $\Psi_1 : B \to [0,+\infty)$ **convesso & 1-positivamente omogeneo** $(\Psi_1 \sim \|\cdot\|)$

Il caso convesso

In **[Mielke-Theil'04]**: se

- B è Banach **riflessivo**
- $\mathcal{E}(t,\cdot)$ (uniformemente) convesso
- $\mathcal{D}$ indotta da $\Psi_1 : B \to [0,+\infty)$ **convesso & 1-positivamente omogeneo** ($\Psi_1 \sim \|\cdot\|$)

allora

- $u \in \mathrm{AC}([0,T];B)$
- la formulazione energetica è **equivalente** all'equazione **doppiamente nonlineare**

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0,T)$$

con $\partial_u\mathcal{E}$ sottodifferenziale di $\mathcal{E}$ rispetto a u.

Invarianza per riscalamenti temporali

Tipicamente,

$$\mathcal{E}(t,u) = E(u) - \overbrace{\ell(t)}^{\text{carico esterno}} \; u$$

e quindi

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial E(u(t)) \ni \ell(t) \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T) \tag{DNE}$$

Ψ_1 1-omogeneo $\Rightarrow$ $\partial\Psi_1$ 0-omogeneo $\Rightarrow$ (DNE) è invariante per riscalamenti temporali

Invarianza per riscalamenti temporali

Tipicamente,

$$\mathcal{E}(t,u) = E(u) - \overbrace{\ell(t)}^{\text{carico esterno}} \; u$$

e quindi

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial E(u(t)) \ni \ell(t) \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T) \tag{DNE}$$

Ψ_1 1-omogeneo $\Rightarrow$ $\partial\Psi_1$ 0-omogeneo $\Rightarrow$ (DNE) è invariante per riscalamenti temporali

Rate-independence

In effetti, modellizziamo sistemi con due scale temporali:

- scala **interna** al sistema, **veloce**
- scala temporale **lenta** del carico **esterno** $\ell \sim t \mapsto \mathcal{E}(t,\cdot)$ (**scala dominante**)
- **trascurabili** gli effetti di **dissipazione viscosa**

Il caso non convesso: verso la stabilità locale

Se $\mathcal{E}(t,\cdot)$ non è convessa

- Ψ_1 1-omogenea, ha **crescita lineare** a ∞ $\rightsquigarrow$

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \qquad t \in (0,T),$$

$\rightsquigarrow$ ci possiamo aspettare solo $u \in \mathrm{BV}(0,T;B)$ (u può avere **salti!!!**)

Il caso non convesso: verso la stabilità locale

Se $\mathcal{E}(t,\cdot)$ non è convessa

- Ψ_1 1-omogenea, ha **crescita lineare** a ∞ $\rightsquigarrow$

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B' \quad t \in (0,T),$$

$\rightsquigarrow$ ci possiamo aspettare solo $u \in \mathrm{BV}(0,T;B)$ (u può avere **salti!!!**)

- la **stabilità globale** forza le soluzioni energetiche globali di Mielke a **saltare troppo presto** e **saltare troppo a lungo** per evitare perdite d'energia

L'approccio vanishing viscosity

Obiettivo:

Formulazione per problemi rate-independent che

- **modellizza** i **salti** ("naturali") (dovuti a $u \in \mathrm{BV}(0, T; B)$),
- porta a **soluzioni che saltino più tardi** delle sol. energetiche

L'approccio vanishing viscosity

Obiettivo:

Formulazione per problemi rate-independent che

- **modellizza** i **salti** ("naturali") (dovuti a $u \in \mathrm{BV}(0, T; B)$),
- porta a **soluzioni che saltino più tardi** delle sol. energetiche

Il metodo della vanishing viscosity:

selezionare le evoluzioni rate-independent ottenute come limite di regolarizzazioni viscose

- plasticità con softening: **[Dal Maso-DeSimone-Mora-Morini'06]**, elasto-plasticità non convessa: **[Fiaschi'08]**.
- propagazione di fratture: **[Toader-Zanini'06], [Knees-Mielke-Zanini'07, '08], [Cagnetti'07]**, e anche **[Krejčí-Liero'07]..**

L'approccio vanishing viscosity

Obiettivo:

Formulazione per problemi rate-independent che

- **modellizza** i **salti** ("naturali") (dovuti a $u \in \mathrm{BV}(0, T; B)$),
- porta a **soluzioni che saltino più tardi** delle sol. energetiche

Il metodo della vanishing viscosity:

selezionare le evoluzioni rate-independent ottenute come limite di regolarizzazioni viscose

- plasticità con softening: **[Dal Maso-DeSimone-Mora-Morini'06]**, elasto-plasticità non convessa: **[Fiaschi'08]**.
- propagazione di fratture: **[Toader-Zanini'06], [Knees-Mielke-Zanini'07, '08], [Cagnetti'07]**, e anche **[Krejčí-Liero'07]..**

la **vanishing viscosity** conduce a formulazioni orientate verso condizioni di **stabilità locale** **[Dal Maso-Toader'02], [Negri-Ortner'07], [Larsen'08] (propagazione di fratture), [Stefanelli'08]..**

L'approccio vanishing viscosity

Problema

Nella formulazione limite per vanishing viscosity

- la condizione di stabilità **locale**
- la **disuguaglianza dell'energia**

¿ Come fornire informazioni più complete sui salti?

L'approccio vanishing viscosity

Problema

Nella formulazione limite per vanishing viscosity

- la condizione di stabilità **locale**
- la **disuguaglianza dell'energia**

¿ Come fornire informazioni più complete sui salti?

Un approccio astratto

Studio dell'approssimazione per vanishing viscosity di evoluzioni rate-independent con spazi ambiente ed energie astratti

- in uno spazio metrico, con dissipazione data dalla sola metrica **[Mielke-R.-Savaré, DCDS-A'09]**
- **in corso d'opera:** in uno spazio di Banach, con dissipazione data da una "norma rate-independent" ($\sim L^1$) e una "norma viscosa" ($\sim L^2$)

Programma

- ♣ Formulazione del problema
- ♣ due idee sull'analisi asintotica

Programma

- Formulazione del problema
- due idee sull'analisi asintotica
- evoluzioni rate-independent parametrizzate:
  - **stabilità locale**
  - **salti** $\leftrightarrow$ **transizioni viscose** fra stati metastabili

Vanishing viscosity per equazioni doppiamente nonlineari in spazi di Banach

Evoluzioni rate-independent astratte

- Dissipazione:
  - B_2 riflessivo
  - $B_2 \subset B_1$
  - dissipazione rate-independent: $\Psi_1(\cdot) = |\cdot|_1$
- Energia: $\mathcal{E} : (0, T) \times B_2 \to (-\infty, +\infty]$, $\mathcal{E}(t, \cdot)$ con sottolivelli compatti in B_2, $\mathcal{E}(t, \cdot)$ **non convessa**

Vanishing viscosity per equazioni doppiamente nonlineari in spazi di Banach

Evoluzioni rate-independent astratte

- Dissipazione:
  - B_2 riflessivo
  - $B_2 \subset B_1$
  - dissipazione rate-independent: $\Psi_1(\cdot) = |\cdot|_1$
- Energia: $\mathcal{E} : (0,T) \times B_2 \to (-\infty, +\infty]$, $\mathcal{E}(t,\cdot)$ con sottolivelli compatti in B_2, $\mathcal{E}(t,\cdot)$ **non convessa**

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t, u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B_2', \ t \in (0,T)$$

Vanishing viscosity per equazioni doppiamente nonlineari in spazi di Banach

Interazione di norme L^1 e L^2

- Dissipazione:
  - $B_2 \sim L^2(\Omega)$
  - $B_1 \sim L^1(\Omega)$
  - dissipazione rate-independent: $\Psi_1(\cdot) = |\cdot|_1$
- Energia:

$$\mathcal{E}(t,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \overbrace{\int_\Omega \mathcal{W}(u)}^{\text{potenz. doppio pozzo}} - \langle \ell(t), u \rangle$$

Vanishing viscosity per equazioni doppiamente nonlineari in spazi di Banach

Interazione di norme L^1 e L^2

- Dissipazione:
  - $B_2 \sim L^2(\Omega)$
  - $B_1 \sim L^1(\Omega)$
  - dissipazione rate-independent: $\Psi_1(\cdot) = |\cdot|_1$
- Energia:

$$\mathcal{E}(t,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \overbrace{\int_\Omega \mathcal{W}(u)}^{\text{potenz. doppio pozzo}} - \langle \ell(t), u\rangle$$

$$\partial\Psi_1(u'(t)) + \partial_u \mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B_2',\ t \in (0,T)$$

$$\mathrm{Sign}(u_t) - \Delta u + \mathcal{W}'(u) = \ell(t) \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

Vanishing viscosity per equazioni doppiamente nonlineari in spazi di Banach

Interazione di norme L^1 e L^2

- Dissipazione:
  - $B_2 \sim L^2(\Omega)$
  - $B_1 \sim L^1(\Omega)$
  - dissipazione rate-independent: $\Psi_1(\cdot) = |\cdot|_1$
  - approssimazione viscosa $\Psi_\varepsilon(\cdot) = |\cdot|_1 + \frac{\varepsilon}{2}\|\cdot\|_2^2$
- Energia:

$$\mathcal{E}(t,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega \mathcal{W}(u) - \langle \ell(t), u\rangle$$

$$\varepsilon\partial\Psi_2(u'(t)) + \partial\Psi_1(u'(t)) + \partial_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{in } B_2', \ t \in (0,T)$$

$$\varepsilon u_t + \mathrm{Sign}(u_t) - \Delta u + \mathcal{W}'(u) = \ell(t) \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

Passo 1: identità dell'energia

D'ora in poi:

$$\mathcal{E}(t,\cdot) \text{ differenziabile in } u.$$

Chain rule per $\mathcal{E}$ + analisi convessa:

$$\overbrace{\varepsilon\partial\Psi_2(u'(t)) + \partial\Psi_1(u'(t))}^{\partial\Psi_\varepsilon(u'(t))} + \mathrm{D}_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \text{ in } B_2', \quad t \in (0,T)$$

è equivalente all'**identità dell'energia** $\forall\, 0 \le t_1 \le t_2 \le T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_\varepsilon(\dot{u}(r))\,\mathrm{d}r + \int_{t_1}^{t_2} \Psi_\varepsilon^*(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)))\,\mathrm{d}r + \mathcal{E}(t_2,u(t_2)) = \mathcal{E}(t_1,u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t\mathcal{E}(t,u(r))\,\mathrm{d}r$$

Passo 1: identità dell'energia

D'ora in poi:

$$\mathcal{E}(t,\cdot) \text{ differenziabile in } u.$$

Chain rule per $\mathcal{E}$ + analisi convessa:

$$\overbrace{\varepsilon\partial\Psi_2(u'(t)) + \partial\Psi_1(u'(t))}^{\partial\Psi_\varepsilon(u'(t))} + \mathrm{D}_u\mathcal{E}(t,u(t)) \ni 0 \text{ in } B_2', \ \ t \in (0,T)$$

è equivalente all'**identità dell'energia** $\forall\, 0 \le t_1 \le t_2 \le T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi_\varepsilon\left(\dot{u}(r)\right)\mathrm{d}r + \int_{t_1}^{t_2} \Psi_\varepsilon^*\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r))\right)\mathrm{d}r + \mathcal{E}(t_2,u(t_2)) = \mathcal{E}(t_1,u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t\mathcal{E}(t,u(r))\,\mathrm{d}r$$

con Ψ_ε^* la coniugata di Fenchel-Moreau di Ψ_ε:

$$\Psi_\varepsilon^*\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}\min_{|z|_{1,*}\le 1} \|-\mathrm{D}_u\mathcal{E} - z\|_{2,*}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\varepsilon}}\mathbf{d_2}\left(-\mathrm{D}_\mathbf{u}\mathcal{E}, \mathbf{B}_\mathbf{1}^*\right)^\mathbf{2}$$

Competizione fra effetti di viscosità e comportamento rate-independent

$$\int_{t_1}^{t_2} |u'(r)|_1 \,\mathrm{d}r + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{2}\|u'(r)\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right)^2 \,\mathrm{d}r + \mathcal{E}(t_2,u(t_2))$$
$$= \mathcal{E}(t_1,u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t\mathcal{E}(t,u(r))\,\mathrm{d}r$$

Competizione fra effetti di viscosità e comportamento rate-independent

$$\int_{t_1}^{t_2} |u'(r)|_1 \,\mathrm{d}r + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{2}\|u'(r)\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right)^2 \,\mathrm{d}r + \mathcal{E}(t_2,u(t_2))$$
$$= \mathcal{E}(t_1,u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t\mathcal{E}(t,u(r))\,\mathrm{d}r$$

♣ Si ha

$$d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r))|_{1,*} \leq 1$$

versione locale della condizione di stabilità:

$$|-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r))|_{1,*} \leq 1 \quad \text{vs.} \quad \frac{\mathcal{E}(t,u(t)) - \mathcal{E}(t,z)}{\mathcal{D}(u(t),z)} \leq 1 \;\forall\, z$$

Competizione fra effetti di viscosità e comportamento rate-independent

$$\int_{t_1}^{t_2} |u'(r)|_1 \,\mathrm{d}r + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{2}\|u'(r)\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right)^2 \,\mathrm{d}r + \mathcal{E}(t_2,u(t_2))$$
$$= \mathcal{E}(t_1,u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t\mathcal{E}(t,u(r))\,\mathrm{d}r$$

♣ Si ha

$$d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r))|_{1,*} \leq 1$$

versione locale della condizione di stabilità:

$$|-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r))|_{1,*} \leq 1 \quad \text{vs.} \quad \frac{\mathcal{E}(t,u(t)) - \mathcal{E}(t,z)}{\mathcal{D}(u(t),z)} \leq 1 \ \forall z$$

♣ Nell'identità dell'energia si evidenzia la **competizione fra viscosità e rate-independence**

Passo 2: riscalamento

La tecnica di [Efendiev-Mielke'06], caso finito-dimensionale

- Nel limite per vanishing viscosity, **salti** $\leftrightarrow$ **transizioni viscose** fra stati metastabili
- Per descrivere la dinamica viscosa nei salti: **NON** trattare i salti come punti, **riparametrizzare le traiettorie** con la lunghezza dell'arco
- **Analisi asintotica di traiettorie (riparametrizzate)** nello spazio delle fasi esteso

Passo 2: riscalamento

La tecnica di [Efendiev-Mielke'06], caso finito-dimensionale

- Nel limite per vanishing viscosity, **salti** $\leftrightarrow$ **transizioni viscose** fra stati metastabili
- Per descrivere la dinamica viscosa nei salti: **NON** trattare i salti come punti, **riparametrizzare le traiettorie** con la lunghezza dell'arco
- **Analisi asintotica di traiettorie (riparametrizzate)** nello spazio delle fasi esteso

Riparametrizziamo

$$\int_{t_1}^{t_2} |u'(r)|_1 \, \mathrm{d}r + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{2} \|u'(r)\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(r, u(r)), B_1^*\right)^2 \, \mathrm{d}r + \mathcal{E}(t_2, u(t_2))$$

$$= \mathcal{E}(t_1, u(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \mathcal{E}(t, u(r)) \, \mathrm{d}r$$

con la funzione di riscalamento:

$$s_\varepsilon(t) = t + \int_0^t \left(|u'(r)|_1 + \|u'(r)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(r, u(r)), B_1^*\right)\right) \mathrm{d}r$$

Passo 2: riscalamento

$$\begin{cases} s_\varepsilon(t) := t + \int_0^t \left(|u'(r)|_1 + \|u'(r)\|_2 \cdot d_2 \left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(r, u(r)), B_1^* \right) \right) \mathrm{d}r \\ \hat{t}_\varepsilon = s_\varepsilon^{-1}, \qquad \hat{u}_\varepsilon = u \circ \hat{t}_\varepsilon \end{cases}$$

Quindi analisi asintotica per la traiettoria $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

Passo 2: riscalamento

$$\begin{cases} s_\varepsilon(t) := t + \int_0^t \left(|u'(r)|_1 + \|u'(r)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right)\right) \mathrm{d}r \\ \hat{t}_\varepsilon = s_\varepsilon^{-1}, \qquad \hat{u}_\varepsilon = u \circ \hat{t}_\varepsilon \end{cases}$$

Quindi analisi asintotica per la traiettoria $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

Identità dell'energia riscalata

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}_\varepsilon'|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varepsilon}{2\hat{t}_\varepsilon'} \|\hat{u}_\varepsilon'\|_2^2 + \frac{\hat{t}_\varepsilon'}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right)^2 + \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_2), \hat{u}_\varepsilon(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_1), \hat{u}_\varepsilon(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\, \hat{t}_\varepsilon'$$

e la condizione di "normalizzazione"

$$\hat{t}_\varepsilon' + |\hat{u}_\varepsilon'|_1 + \|\hat{u}_\varepsilon'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right) \equiv 1$$

Passo 2: riscalamento

$$\begin{cases} s_\varepsilon(t) := t + \int_0^t \left(|u'(r)|_1 + \|u'(r)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(r,u(r)), B_1^*\right)\right) \mathrm{d}r \\ \hat{t}_\varepsilon = s_\varepsilon^{-1}, \qquad \hat{u}_\varepsilon = u \circ \hat{t}_\varepsilon \end{cases}$$

Quindi analisi asintotica per la traiettoria $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

Identità dell'energia riscalata

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}_\varepsilon'|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varepsilon}{2\hat{t}_\varepsilon'} \|\hat{u}_\varepsilon'\|_2^2 + \frac{\hat{t}_\varepsilon'}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right)^2 + \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_2), \hat{u}_\varepsilon(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_1), \hat{u}_\varepsilon(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\, \hat{t}_\varepsilon'$$

e la condizione di "normalizzazione"

$$\hat{t}_\varepsilon' + |\hat{u}_\varepsilon'|_1 + \|\hat{u}_\varepsilon'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right) \equiv 1$$

$\Rightarrow$ **Stime a priori, compattezza** per $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

L'analisi asintotica per $\varepsilon \downarrow 0$

Teorema [Mielke, R., Savaré'08]

- B_2 riflessivo, $B_2 \subset B_1$
- Energia: $\mathcal{E} : (0, T) \times B_2 \to (-\infty, +\infty]$, con sottolivelli compatti in B_2,
- $\mathcal{E}$ verifica la **chain rule**

L'analisi asintotica per $\varepsilon \downarrow 0$

Teorema [Mielke, R., Savaré'08]

Per $\varepsilon \searrow 0$, estraendo una sottosuccessione la traiettoria $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}'_\varepsilon|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varepsilon}{2\hat{t}'_\varepsilon} \|\hat{u}'_\varepsilon\|_2^2 + \frac{\hat{t}'_\varepsilon}{2\varepsilon} d_2 \left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right)^2 + \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_2), \hat{u}_\varepsilon(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_1), \hat{u}_\varepsilon(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\, \hat{t}'_\varepsilon$$

L'analisi asintotica per $\varepsilon \downarrow 0$

Teorema [Mielke, R., Savaré'08]

Per $\varepsilon \searrow 0$, estraendo una sottosuccessione la traiettoria $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}_\varepsilon'|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varepsilon}{2\hat{t}_\varepsilon'} \|\hat{u}_\varepsilon'\|_2^2 + \frac{\hat{t}_\varepsilon'}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right)^2 + \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_2), \hat{u}_\varepsilon(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_1), \hat{u}_\varepsilon(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\, \hat{t}_\varepsilon'$$

converge a $(\hat{t}, \hat{u}) \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{Lip}}([0, \widehat{T}]; [0, T] \times B_1)$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}'|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{M}_0\left(\hat{t}', \|\hat{u}'\|_2, -\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u})\right) + \mathcal{E}(\hat{t}(s_2), \hat{u}(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}(s_1), \hat{u}(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t \mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u})\, \hat{t}'$$

($|\hat{u}'|_1$ **derivata metrica** di $\hat{u}$!), con

$$\mathcal{M}_0\left(\hat{t}', \|\hat{u}'\|_2, -\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u})\right) = \begin{cases} \|\hat{u}'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u}), B_1^*\right) & \text{se } \hat{t}' = 0 \\ I_{\{0\}}\left(d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u}), B_1^*\right)\right) & \text{se } \hat{t}' > 0 \end{cases}$$

L'analisi asintotica per $\varepsilon \downarrow 0$

Teorema [Mielke, R., Savaré'08]

Per $\varepsilon \searrow 0$, estraendo una sottosuccessione la traiettoria $\{(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\}$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}_\varepsilon'|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varepsilon}{2\hat{t}_\varepsilon'} \|\hat{u}_\varepsilon'\|_2^2 + \frac{\hat{t}_\varepsilon'}{2\varepsilon} d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon), B_1^*\right)^2 + \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_2), \hat{u}_\varepsilon(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon(s_1), \hat{u}_\varepsilon(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t\mathcal{E}(\hat{t}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)\, \hat{t}_\varepsilon'$$

converge a $(\hat{t}, \hat{u}) \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{Lip}}([0, \widehat{T}]; [0, T] \times B_1)$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\hat{u}'|_1 + \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{M}_0\left(\hat{t}', \|\hat{u}'\|_2, -\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u})\right) + \mathcal{E}(\hat{t}(s_2), \hat{u}(s_2))$$
$$= \mathcal{E}(\hat{t}(s_1), \hat{u}(s_1)) + \int_{s_1}^{s_2} \partial_t\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u})\, \hat{t}'$$

($|\hat{u}'|_1$ **derivata metrica** di $\hat{u}$!), con

$$\mathcal{M}_0\left(\hat{t}', \|\hat{u}'\|_2, -\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u})\right) = \begin{cases} \|\hat{u}'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u}), B_1^*\right) & \text{se } \hat{t}' = 0 \\ I_{\{0\}}\left(d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u}), B_1^*\right)\right) & \text{se } \hat{t}' > 0 \end{cases}$$

+ **condizione di "normalizzazione"**

$$\hat{t}' + |\hat{u}'|_1 + \|\hat{u}'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u}), B_1^*\right) \equiv 1$$

Osservazioni sul problema limite

$$(\hat{t},\hat{u}) \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{Lip}}([0,\widehat{T}];[0,T]\times B_1), \qquad \hat{t}(0)=0, \quad \hat{t}(\widehat{T})=T$$

Normalizzazione: $\hat{t}' + |\hat{u}'|_1 + \|\hat{u}'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t},\hat{u}), B_1^*\right) \equiv 1$

Id. en.:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s)) - \partial_t\mathcal{E}(\hat{(}s),\hat{u}(s))\,\hat{t}'(s)$$
$$= -\langle -\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s)), \hat{u}'(s)\rangle$$
$$= -|\hat{u}'(s)|_1 - \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s)), B_1^*\right) \quad \text{per q.o. } s\in(0,\widehat{T})$$

Vincolo: $\mathcal{M}_0\left(\hat{t}', \|\hat{u}'\|_2, -\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t},\hat{u})\right) \equiv \|\hat{u}'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t},\hat{u}), B_1^*\right)$

Osservazioni sul problema limite

$$(\hat{t}, \hat{u}) \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{Lip}}([0, \widehat{T}]; [0, T] \times B_1), \qquad \hat{t}(0) = 0, \quad \hat{t}(\widehat{T}) = T$$

Normalizzazione: $\hat{t}' + |\hat{u}'|_1 + \|\hat{u}'\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}, \hat{u}), B_1^*\right) \equiv 1$

Id. en.:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)) - \partial_t\mathcal{E}(\hat{(}s), \hat{u}(s))\, \hat{t}'(s) \\ &= -\langle -\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), \hat{u}'(s)\rangle \\ &= -|\hat{u}'(s)|_1 - \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), B_1^*\right) \quad \text{per q.o. } s \in (0, \widehat{T}) \end{aligned}$$

Tre regimi:

$$\begin{cases} \hat{t}'(s) = 1 \; (\Leftrightarrow \hat{u}'(s) = 0\,) \\ \qquad \Rightarrow \; |-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{u}(\mathbf{r}))|_{1,*} \leq \mathbf{1} \\ \hat{t}'(s) \in (0, 1) \; (\Leftrightarrow |\hat{u}'(s)|_1 \in (0, 1)\,) \\ \qquad \Rightarrow \; |-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{E}(\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{s}), \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}))|_{1,*} = \mathbf{1} \\ \hat{t}'(s) = 0 \; (\Leftrightarrow \; |\hat{u}'(s)|_1 + \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), B_1^*\right) = 1 \\ \qquad \Rightarrow \; |-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{E}(\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{s}), \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}))|_{1,*} \geq \mathbf{1} \end{cases}$$

Evoluzioni rate-independent parametrizzate

Definizione

Chiamiamo **evoluzione rate-independent parametrizzata** una coppia

$$(\hat{t}, \hat{u}) \in \mathrm{AC}([0, \widehat{T}]; [0, T] \times B_1), \qquad \hat{t}(0) = 0, \quad \hat{t}(\widehat{T}) = T,$$

che soddisfa

Non degenerazione: $\hat{t}'(s) + |\hat{u}'(s)|_1 > 0$ per q.o. $s \in (0, \widehat{T})$,

Id. en.:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)) - \partial_t \mathcal{E}(\hat{(}s), \hat{u}(s))\, \hat{t}'(s) &= -\langle -\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), \hat{u}'(s)\rangle \\ &= -|\hat{u}'(s)|_1 - \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), B_1^*\right) \quad \text{per q.o. } s \in (0, \widehat{T})\end{aligned}$$

Tre regimi:
$$\begin{cases} \hat{\mathbf{t}}'(\mathbf{s}) > \mathbf{0} \ \Rightarrow \ |-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{E}(\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{s}), \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}))|_{1,*} \leq \mathbf{1} \\ \hat{\mathbf{t}}'(\mathbf{s})\, |\hat{\mathbf{u}}'(\mathbf{s})|_1 > \mathbf{0} \ \Rightarrow \ |-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{E}(\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{s}), \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}))|_{1,*} = \mathbf{1} \\ \hat{\mathbf{t}}'(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ |-\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{E}(\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{s}), \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s}))|_{1,*} \geq \mathbf{1} \end{cases}$$

Proprietà delle evoluzioni rate-independent parametrizzate

Non degenerazione: $\hat{t}'(s) + |\hat{u}'(s)|_1 > 0$ per q.o. $s \in (0, \widehat{T})$,

Id. en.:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)) - \partial_t \mathcal{E}((\hat{s}), \hat{u}(s))\, \hat{t}'(s)$$
$$= -\langle -\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), \hat{u}'(s) \rangle$$
$$= -|\hat{u}'(s)|_1 - \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), B_1^*\right) \quad \text{per q.o. } s \in (0, \widehat{T})$$

Tre regimi:
$$\begin{cases} \hat{t}'(s) > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} \leq 1 \\ \hat{t}'(s)\, |\hat{u}'(s)|_1 > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} = 1 \\ \hat{t}'(s) = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} \geq 1 \end{cases}$$

- Nozione **intrinsecamente rate-independent**: invariante per riscalamenti temporali
- Si ottiene nel passaggio al **limite per vanishing viscosity**
- Sotto condizioni su B_1, nozione **equivalente alla formulazione come PDE**
- Risultati di **stabilità rispetto ai dati del problema**

Proprietà delle evoluzioni rate-independent parametrizzate

Non degenerazione: $\hat{t}'(s) + |\hat{u}'(s)|_1 > 0$ per q.o. $s \in (0, \widehat{T})$,

Id. en.:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)) - \partial_t \mathcal{E}(\hat{(}s), \hat{u}(s))\, \hat{t}'(s) &= -\langle -\mathrm{D}_u \mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), \hat{u}'(s)\rangle \\ &= -|\hat{u}'(s)|_1 - \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s)), B_1^*\right) \quad \text{per q.o. } s \in (0, \widehat{T})\end{aligned}$$

Tre regimi:
$$\begin{cases} \hat{t}'(s) > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} \leq 1 \\ \hat{t}'(s)\, |\hat{u}'(s)|_1 > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} = 1 \\ \hat{t}'(s) = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} \geq 1 \end{cases}$$

- Nozione **intrinsecamente rate-independent**: invariante per riscalamenti temporali
- Si ottiene nel passaggio al **limite per vanishing viscosity**
- Sotto condizioni su B_1, nozione **equivalente alla formulazione come PDE**
- Risultati di **stabilità rispetto ai dati del problema**
- **I tre regimi riflettono i diversi tipi di evoluzione del sistema**

I tre regimi

$$\begin{cases} \hat{t}'(s) > 0, \ |\hat{u}'(s)|_1 = 0 \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} \leq 1 \quad \textbf{(stazionarietà)} \\ \hat{t}'(s)\,|\hat{u}'(s)|_1 > 0 \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} = 1 \quad \textbf{(rate-independent)} \\ \hat{t}'(s) = 0 \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} \geq 1 \quad \textbf{(salto)} \end{cases}$$

I tre regimi

$$\begin{cases} \hat{t}'(s) > 0, \ |\hat{u}'(s)|_1 = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} \leq 1 \quad \textbf{(stazionarietà)} \\ \hat{t}'(s)\, |\hat{u}'(s)|_1 > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} = 1 \quad \textbf{(rate-independent)} \\ \hat{t}'(s) = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s))|_{1,*} \geq 1 \quad \textbf{(salto)} \end{cases}$$

Stazionarietà

- condizione di **stabilità locale**

$$|-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s_0), \hat{u}(s_0))|_{1,*} \leq 1 \ \text{ vs. } \ \frac{\mathcal{E}(s_0, u(s_0)) - \mathcal{E}(s_0, z)}{\mathcal{D}(u(s_0), z)} \leq 1 \ \forall\, z$$

- in un intorno $I(s_0)$ vale $\hat{u}(s) \equiv \hat{u}(s_0)$ e si ha **identità dell'energia**

$$\mathcal{E}(\hat{t}(s_2), \hat{u}(s_0)) - \mathcal{E}(\hat{t}(s_1), \hat{u}(s_0)) = \int_{s_1}^{s_2} \partial_t\mathcal{E}(\hat{t}(s), \hat{u}(s_0))\, \hat{t}'(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, s_1 \leq s_2 \in I(s_0)\,.$$

I tre regimi

$$\begin{cases} \hat{t}'(s) > 0, \ |\hat{u}'(s)|_1 = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} \leq 1 \quad \textbf{(stazionarietà)} \\ \hat{t}'(s)\,|\hat{u}'(s)|_1 > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} = 1 \quad \textbf{(rate-independent)} \\ \hat{t}'(s) = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} \geq 1 \quad \textbf{(salto)} \end{cases}$$

Evoluzione rate-independent

- condizione di **stabilità locale**

$$|-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s_0),\hat{u}(s_0))|_{1,*} = 1 \quad \sim \ -\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s_0),\hat{u}(s_0)) \in \overbrace{\partial\Psi_1(\hat{u}'(s_0))}^{\mathrm{Sign}(\hat{u}'(s_0))}$$

- in un intorno $I(s_0)$ vale **identità dell'energia** $\forall\, s_1 \leq s_2 \in I(s_0)$

$$\mathcal{E}(\hat{t}(s_2),\hat{u}(s_2)) - \mathcal{E}(\hat{t}(s_1),\hat{u}(s_0)) = \int_{s_1}^{s_2} \left(\partial_t\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))\,\hat{t}'(s) - |\hat{u}'(s)|_1\right) \mathrm{d}s\,.$$

I tre regimi

$$\begin{cases} \hat{t}'(s) > 0, \ |\hat{u}'(s)|_1 = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} \leq 1 \quad \textbf{(stazionarietà)} \\ \hat{t}'(s)\,|\hat{u}'(s)|_1 > 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} = 1 \quad \textbf{(rate-independent)} \\ \hat{t}'(s) = 0 \ \Rightarrow & |-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s),\hat{u}(s))|_{1,*} \geq 1 \quad \textbf{(salto)} \end{cases}$$

Regime di salto

- in un intorno $I(s_0)$ vale $\hat{t}(s) \equiv \hat{t}(s_0)$ e si ha **identità dell'energia** $\forall\, s_1 \leq s_2 \in I(s_0)$

$$\mathcal{E}(\hat{t}(s_0),\hat{u}(s_2)) - \mathcal{E}(\hat{t}(s_0),\hat{u}(s_1)) = \int_{s_1}^{s_2} \left(-|\hat{u}'(s)|_1 - \|\hat{u}'(s)\|_2 \cdot d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s_0),\hat{u}(s)), B_1^*\right)\right) \mathrm{d}s\,.$$

- Con un **riscalamento** che dipende dalle

$$\textbf{quantità viscose} \quad \|\hat{u}'\|_2 \ \& \ d_2\left(-\mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t},\hat{u}), B_1^*\right)$$

si passa da $\hat{u}(s)$ a $\tilde{u}(\sigma)$ soluzione del **gradient flow viscoso**

$$\partial\Psi_1(\tilde{u}'(\sigma)) + \partial\Psi_2(\tilde{u}'(\sigma)) + \mathrm{D}_u\mathcal{E}(\hat{t}(s_0), u(\sigma)) \ni 0$$

Evoluzioni BV

Da salti virtuali a salti reali

Con un opportuno riscalamento,

$$(\hat{t}, \hat{u}) \ \text{ evoluzione rate-independent parametrizzata}$$
$$\Downarrow \ \Uparrow$$
$$u \ \ \textbf{evoluzione rate-independent BV}$$

nei punti di salto segue la traiettoria di un **gradient flow**

Evoluzioni BV

Da salti virtuali a salti reali

Con un opportuno riscalamento,

$$(\hat{t},\hat{u}) \ \text{ evoluzione rate-independent parametrizzata}$$
$$\Downarrow \ \Uparrow$$
$$u \ \ \textbf{evoluzione rate-independent BV}$$

nei punti di salto segue la traiettoria di un **gradient flow**

Approssimazione con discretizzazione in tempo

Esistenza di evoluzioni rate-independent BV: passando al limite nello **schema di discretizzazione**:

$$\begin{cases} U_\tau^n \in \mathrm{Argmin}_{U \in B_2} \left\{ |U - U_\tau^{n-1}|_1 + \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} \|U - U_\tau^{n-1}\|_2^2 + \mathcal{E}(t_n, U) \right\} . \\ \text{con } \ \varepsilon(\tau) \to 0 \ \& \ \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} \uparrow \infty \ \text{ per } \tau \downarrow 0 \end{cases}$$

già in **[Dal Maso-Toader'02]** per costruire evoluzioni quasistatiche di fratture con **minimizzazione locale**

Futuri sviluppi

- applicazioni a **problemi “concreti” della meccanica dei continui**..
- **da due norme a due metriche**..