# Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 3

# Programma

1. Spazi metrici completi:
   - definizione & esempi
   - teorema di caratterizzazione degli insiemi compatti
2. Conclusioni sul concetto di compattezza & prospettive
3. Spazi di Banach
   - definizione
   - esempi

# La condizione di Cauchy

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico.

**Osservazione**
Sia $\{x_n\} \subset X$, convergente a $x \in X$.

Allora $\{x_n\}$ soddisfa la condizione di Cauchy, cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq \bar{n} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

# Definizione di spazio metrico completo

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico: la condizione di Cauchy è una *condizione necessaria* per la convergenza di una successione.

- È anche sufficiente?

In generale, NO.

**Definizione**

Diciamo che $(X, d)$ è uno **spazio metrico completo** se tutte le successioni $\{x_n\} \subset X$ che soddisfano la condizione di Cauchy, convergono **in** $X$.

# Esempi

1. $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea $d_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ è completo.

   In particolare, $(\mathbb{R}, d)$ con $d(x, y) := |x - y|$ è completo.

2. Per ogni $p \in [1, \infty]$, $(\mathbb{R}^n, d_p)$ è completo.

3. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato di **dimensione finita**; sia $d(x, y) := \|x - y\|$. Allora $(V, d)$ è completo.

4. $\mathbb{Q}$ con la metrica euclidea $d(q_1, q_2) := |q_1 - q_2|$ NON È COMPLETO.

# Completezza & equivalenza (I)

## Proposizione

Su $X \neq \emptyset$ siano date due metriche $d_1$ e $d_2$ **equivalenti**, cioè

$$\exists\, C_1,\ C_2 > 0 \ \ \forall\, x,\ y \in X\ : \quad d_1(x,y) \leq C_1 d_2(x,y) \text{ e } d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y).$$

Allora $(X, d_1)$ è completo **se e solo se** $(X, d_2)$ è completo.

# Completezza & equivalenza (II)

- La completezza non viene preservata dall'equivalenza di topologie, cioè

$$d_1 \text{ e } d_2 \textbf{ topologicamente } \text{equivalenti}$$

$$\not\Rightarrow$$

$$(X, d_1) \text{ è completo } \textbf{se e solo se } (X, d_2) \text{ è completo.}$$

**Controesempio:**

## Definizioni preliminari

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico.

Diciamo che $C \subset X$ è completo se $(C, d)$ è uno spazio metrico completo.

♣ Se $(X, d)$ è **completo** e $C \subset X$ è **chiuso,** allora $(C, d)$ è completo.

Diciamo che $E \subset X$ è **totalmente limitato** se

$\forall \varepsilon > 0$ esiste un <u>ricoprimento finito</u> di $E$

costituito da palle di raggio $\varepsilon$.

## Limitatezza & totale limitatezza (I)

- Ricordiamo che $E \subset X$ si dice **limitato** se
- In $(X, d)$ totale limitatezza $\Rightarrow$ limitatezza.

## Limitatezza & totale limitatezza (II)

- In $(R^n, d_p)$, con $p \in [1, \infty]$,

  $E \subset \mathbb{R}^n$ è limitato **se e solo se** è totalmente limitato.

## Limitatezza & totale limitatezza (III)

- Sia $V$ uno spazio normato di **dimensione finita.** Allora

$E \subset V$ è limitato **se e solo se** è totalmente limitato.

- Se $V$ è uno spazio normato di **dimensione INfinita,** allora

$E \subset V$ limitato $\not\Rightarrow$ $E \subset V$ TOTALMENTE limitato.

## Caratterizzazione della compattezza negli spazi metrici

**Teorema**

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e $\emptyset \neq K \subset X$. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

1. $K$ è compatto;
2. $K$ è compatto per successioni
3. $K$ è completo & totalmente limitato.

# Conseguenza: caratterizzazione degli insiemi compatti in dimensione finita

**Teorema**

Sia $(V, \|\cdot\|)$ sp. normato di **dimensione finita**. Allora

$K \subset V$ è compatto se e solo se $K$ è **chiuso & limitato.**

## ... e in dimensione infinita??

- Sia $(V, \|\cdot\|)$ sp. normato di **dimensione INfinita**.

  ¿¿ compattezza $\Leftrightarrow$ chiusura & limitatezza ??

**FALSO,** controesempio:

# In dimensione infinita, la palla unitaria NON è compatta! (I)

**Motivazione euristica:**

## In dimensione infinita, la palla unitaria NON è compatta! (II)

**Teorema**
Sia $(V, \|\cdot\|)$ sp. normato e $\overline{B_1(0)}$ la palla unitaria <u>chiusa</u> di $V$. Allora

$$\overline{B_1(0)} \text{ è compatta}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$V \text{ ha } \underline{\text{dimensione finita}}.$$

# Riassunto

- Siamo partiti dalla definizione di insieme compatto in spazi topologici
- Compattezza $\Rightarrow$ teorema di Weierstrass, risoluzione di problemi di minimo e massimo
- Compattezza in spazi metrici $\Leftrightarrow$ compattezza sequenziale
- $\Rightarrow$ è utile disporre di insiemi compatti

## Insiemi compatti & confronto fra topologie

Su $X \neq \emptyset$ siano date due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_2$ più fine di $\mathcal{T}_1$.

Allora

$$K \subset X \text{ compatto per } \mathcal{T}_2 \quad \Rightarrow \quad K \subset X \text{ compatto per } \mathcal{T}_1.$$

- "Quanto più fine è la topologia, tanti meno sono i suoi insiemi compatti"

# Compatti in spazi normati

Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio normato.

- $\dim(V) < \infty$
- $\dim(V) = \infty$

$\Rightarrow$ sugli spazi norma di dimensione infinita è utile introdurre & lavorare con topologie che abbiano più compatti della topologia indotta dalla norma. Necessariamente saranno topologie meno fini. $\rightsquigarrow$ la **topologia debole**......

## Definizione

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Diciamo che $V$ è di Banach se, considerata la distanza $d(x, y) := \|x - y\|$, si ha che $(V, d)$ è uno spazio metrico completo.

**Teorema**

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato di dimensione finita. Allora $V$ è di Banach.

## Esempi in dimensione infinita (I)

- $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

- $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$ NON è uno spazio di Banach; in generale, per $\boxed{1 \le p < \infty}$ $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_p)$ NON è uno spazio di Banach!!

# Esempi in dimensione infinita (II)

- Consideriamo $C^1([0,1])$.