Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 2

Programma

1. Spazi normati;
2. Definizioni topologiche
3. Continuità di funzioni
   - in spazi topologici
   - in spazi metrici
   - in spazi normati
4. Convergenza di successioni
   - in spazi topologici
   - in spazi metrici
   - in spazi normati
5. La nozione di compattezza
   - in spazi topologici
   - in spazi metrici

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale (sul campo $\mathbb{R}$). Chiamiamo *norma* una funzione

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ verificante:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \quad \forall x \in V$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

e chiamiamo *spazio normato* la coppia $(V, \|\cdot\|)$.

Spazio normato è metrico

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato: allora $\|\cdot\|$ induce su V la distanza

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad \forall (x, y) \in V \times V.$$

♣ Ogni spazio normato è anche uno *spazio vettoriale topologico.*

La piramide degli spazi

Osservazioni

Sia V uno spazio vettoriale.

- In generale su V è possibile assegnare diverse norme.

Confronto fra norme

Sia V sp. vett. con due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ tali che

$$\boxed{\exists\, C > 0 \ \ \forall x \in V \ : \quad \|x\|_1 \leq C\|x\|_2}$$

Allora la topologia indotta da $\|\cdot\|_2$ è più fine della topologia indotta da $\|\cdot\|_1$.

Le infinite norme che inducono la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$

Su $\mathbb{R}^n$ sono definite le norme $|\cdot|_p$, con $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$
\begin{array}{lll}
|\overrightarrow{x}|_p : & = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\
|\overrightarrow{x}|_\infty : & = \max_{i=1}^n \{|x_i|\} & \text{se } p = \infty.
\end{array}
$$

Teorema sull'equivalenza di norme (I)

Teorema

Sia V uno spazio normato di *dimensione finita* e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su V. Allora $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti.

Teorema sull'equivalenza di norme (II)

.. quel che succede in dimensione infinita

Esempio I:

$$\mathrm{C}^0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f \text{ è continua su } [a,b]\}$$

- La norma "naturale" su $\mathrm{C}^0([a,b])$ è

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$$

- Su $\mathrm{C}^0([a,b])$ è anche definita

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

e in generale

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \quad \text{per } 1 \leq p < \infty.$$

Confronto delle norme L^p su $\mathrm{C}^0([a,b])$

$$\boxed{\forall\, 1 \leq p < \infty \quad \exists\, C_p > 0 \ : \quad \forall\, f \in \mathrm{C}^0([a,b]) \ \ \|f\|_p \leq C_p \|f\|_\infty}$$

In generale

$$\boxed{\forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty \quad \exists\, C_p > 0 \ : \quad \forall\, f \in \mathrm{C}^0([a,b]) \ \ \|f\|_p \leq C_p \|f\|_q}$$

quindi

Esempio II

$$\mathrm{C}^1([a,b]) = \big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ è derivabile su } [a,b], \\ f' : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ è continua su } [a,b] \big\}$$

- La norma "naturale" su $\mathrm{C}^1([a,b])$ è

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

- Su $\mathrm{C}^1([a,b])$ sono anche definite

Definizioni (I)

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\emptyset \neq E \subset X$. Sia $\boxed{x \in X}$.
Diciamo che:

- x è *interno* ad E se
- x è *esterno* ad E se
- x è *di frontiera* per E se
- x è *di aderenza* per E se

Definizioni (II)

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $E \subset X$.
Chiamiamo

- *interno* di E
- *esterno* di E
- *frontiera* di E
- *chiusura* di E

Insiemi aperti, chiusi, densi

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $E \subset X$.
Diciamo che

- E è *aperto* se

- E è *chiuso* se

- E è *denso in* X se

- Sia (X, d) spazio metrico. Allora $E \subset X$ è aperto se e solo se

I chiusi sono tutti e soli i complementari degli aperti

Proprietà della famiglia degli aperti

Definizione equivalente di spazio topologico

Confronto fra topologie

Discussione euristica a partire da $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se

Continuità di funzioni fra spazi topologici

Siano $(X, \mathfrak{I}_X)$ e $(Y, \mathfrak{I}_Y)$ spazi topologici.

Sia $f : X \to Y$. Diciamo che f è *continua* in $x_0 \in X$ se

- Diciamo che f è continua su X se essa è continua in ogni $x_0 \in X$.

Estensione della nozione di limite

Osservazioni

Sia $f : X \to Y$. La continuità di f dipende **fortemente** dalle topologie considerate su X e Y.

Esempio I

Esempio II

Esempio III

Continuità e insiemi aperti

Continuità in spazi metrici

Continuità in spazi normati

Esempio

Consideriamo $\mathrm{C}^0([a,b])$ e le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$.

Allora, se $\Phi : (\mathrm{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ è continuo,

Non vale il viceversa:

Discussione euristica a partire da $\mathbb{R}$

Ricordiamo che $\{a_n\} \subset R$ converge ad $x \in \mathbb{R}$ se

Definizione

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\{a_n\} \subset X$.

Diciamo che $\{a_n\}$ converge ad $x \in X$ se

Unicità del limite in $\mathbb{R}$

Ricordiamo che se $\{a_n\} \subset R$ converge ad $x \in \mathbb{R}$ **e** a $y \in \mathbb{R}$, allora $x = y$.

Proprietà di separazione di Hausdorff

Diciamo che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è di *Hausdorff* se

$$\boxed{\forall\, x,\, y \in X, \quad x \neq y \ \ \exists\, I(x),\, I(y) \ \ \text{con} \ \ I(x) \cap I(y) = \emptyset}$$

Esempi:

- $X \neq \emptyset$ dotato della topologia discreta:
- $X \neq \emptyset$ dotato della topologia banale:
- (X, d) spazio metrico

Teorema di unicità del limite negli spazi di Hausdorff

Convergenza di successioni e confronto fra topologie

Su $X \neq \emptyset$ siano assegnate due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, con $\mathcal{T}_2$ più fine di $\mathcal{T}_1$. Allora

Esempio: su $\mathrm{C}^0([a,b])$ la topologia indotta da $\|\cdot\|_\infty$ è (strettamente) più fine della top. indotta da $\|\cdot\|_1$:

Convergenza di successioni in uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Il concetto di successione convergente è fondamentale: permette di **caratterizzare in termini di successioni moltissimi concetti topologici**. Per esempio:

Caratterizzazione dell'equivalenza di metriche

Su X siano assegnate d_1 e d_2. Allora d_1 e d_2 sono **topologicamente equivalenti** se e solo se

Caratterizzazione della chiusura tramite successioni

Sia (X, d) uno spazio metrico ed $E \subset X$

Proposizione

$x \in \overline{E}$ se e solo se esiste $\{x_n\} \subset E$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$.

Corollario (I)

$C \subset X$ è chiuso se e solo se

Corollario (II)

$E \subset X$ è denso in X se e solo se

Caratterizzazione della continuità per successioni

Siano (X, d) uno spazio metrico, $(Y, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, e $f : X \to Y$.

Proposizione

f è continua in $x_0 \in X$ se e solo se

Convergenza in spazi normati

Definizione

• Ovviamente negli spazi normati vale la caratterizzazione della continuità tramite successioni. Consideriamo il *funzionale di valutazione*

$$\Phi : \mathrm{C}^0([0,1]) \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(f) = f(1).$$

Definizione in spazi topologici

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

Definizione

Sia $E \subset X$. Diciamo che una famiglia $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi di X è un ricoprimento aperto di E se

- $\mathcal{R}$ è costiuita da insiemi aperti;
- l'unione degli elementi di $\mathcal{R}$ contiene E.

Definizione

Un insieme $K \subset X$ si dice *compatto* se

Osservazioni

- Su X siano assegnate due top. $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_2$ più fine di $\mathcal{T}_1$. Allora

- Consideriamo su $\mathbb{R}^n$ la topologia euclidea. Sia $E \subset R^n$ illimitato.

Proprietà della nozione di compattezza

- Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico di Hausdorff. Si ha

$$\boxed{K \subset X \text{ compatto } \Rightarrow \ K \subset X \text{ chiuso}}$$

- La compattezza viene preservata dalla continuità:

Il teorema di Weierstrass in spazi topologici

Teorema

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno sp. top. e $f : X \to \mathbb{R}$ **continua**. Sia $K \subset X$ un insieme **compatto**. Allora f ammette in K almeno un punto di *minimo assoluto* e almeno un punto di *massimo assoluto*, cioè

Compattezza in spazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico: la compattezza si può **caratterizzare in termini di successioni convergenti**.

Caratterizzazione

$K \subset X$ è compatto se e solo se ogni $\{x_n\} \subset X$ ammette una **sottosuccessione convergente a un** $x \in K$, cioè

Osservazioni (I)

- Capiamo perché $E \subset \mathbb{R}^n$ illimitato non è compatto:

- Rivisitiamo il teorema di Bolzano-Weierstrass

Osservazioni (II)

- Importanza degli insiemi compatti

- Ricordiamo la compattezza relativa

Dimostrazione del Teorema di Weierstrass in spazi metrici