Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 4

Programma

1. Operatori lineari fra spazi normati:
   - teorema di caratterizzazione
   - norma di un operatore
   - lo spazio duale
2. Motivazioni per l'introduzione della topologia debole
3. Spazi localmente convessi
   - seminorme
   - topologia indotta da una famiglia di seminorme
   - esempi di spazi localmente convessi
   - convergenza di successioni, proprietà di Hausdorff, metrizzabilità

Richiami

- Sia V uno sp. normato di **dimensione finita** e W un altro sp normato. Allora

$$L : V \to W \text{ lineare } \Rightarrow L : V \to W \text{ continuo.}$$

- Sia V uno sp. normato di **dimensione INfinita**: allora questo è falso, e il controesempio che abbiamo dato

NON dipende dal fatto che $(\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$ non è di Banach.

Caratterizzazione degli operatori lineari e continui fra spazi normati

Teorema

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ due sp. normati e sia $L : V \to W$ un operatore lineare. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni

1. $L : V \to W$ è continuo su V;
2. $L : V \to W$ è continuo in un punto $x_0 \in V$;
3. $L : V \to W$ è **limitato**, cioè

$$\exists\, M \geq 0\ \forall\, x \in V\ : \quad \|L(x)\|_W \leq M\|x\|_V.$$

Dimostrazione

Osservazioni

Lo spazio $\mathcal{L}(V,W)$

Siano $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ due sp. normati.

Definizione

Denotiamo con $\mathcal{L}(V,W)$ l'insieme

$$\mathcal{L}(V,W) = \{L : V \to W \ : \ L \text{ è lineare e continuo su } V\}.$$

Se $W = \mathbb{R}$, useremo la notazione

♣ $\mathcal{L}(V,W)$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di

Norma di un operatore lineare e continuo

- $\mathcal{L}(V, W)$ è uno spazio normato.

Espressioni equivalenti della norma di un operatore

La norma duale

Completezza dello spazio $\mathcal{L}(V, W)$

Teorema

Siano V, W due sp. normati. Se W è di Banach, allora anche lo spazio $\mathcal{L}(V, W)$ è di Banach.
In particolare, per ogni spazio normato V lo spazio duale V' è di Banach.

Introduzione

Motivazioni legate all'applicazione dell'analisi funzionale allo studio delle equazioni a derivate parziali:

Continuità, compattezza, e confronto fra topologie

Una topologia "di compromesso"

Vogliamo introdurre su uno spazio vettoriale V una topologia che assicuri

- un "buon numero" di funzioni continue;
- "ragionevoli" insiemi compatti

Introdurremo questa topologia su uno spazio V, di Banach rispetto a una sua norma $\|\cdot\|$.

Parleremo di *topologia debole*, che denoteremo con il simbolo $\sigma(V, V')$.

Proprietà fondamentali della topologia debole

La topologia $\sigma(V, V')$

- viene definita su V, che è già sp. di Banach rispetto a una opportuna norma;
- è meno fine della topologia indotta su V dalla norma
- rende continui su V tutti i funzionali lineari e continui rispetto alla topologia della norma

- Se V gode di una ulteriore proprietà, detta *riflessività*, allora ogni sottoinsieme di V chiuso e limitato è anche compatto rispetto alla topologia debole.

Osservazione

La piramide delle strutture – 2

Definizione di seminorma

Sia V uno sp. vettoriale. Chiamiamo seminorma su V una funzione $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ verificante

1. $|x| \geq 0$ per ogni $x \in V$;
2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$ per ogni $x \in V$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in V$.

Osservazione

Esempi

Costruzione della topologia

Definizione

Sia V uno sp. vettoriale e

$$\mathcal{F} = \{ |\cdot|_\ell \; : \; \ell \in \Lambda \}$$

una famiglia non vuota di seminorme su V.
Per ogni $x \in V$ fissato, denotiamo con $\mathcal{B}(x)$ la famiglia costituita dagli insiemi della forma

$$\{ y \in V \; : \; |x - y|_{\ell_k} < r, \; k = 1, \ldots, m \}$$

al variare di tutti i sottoinsiemi finiti $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m\} \subset \Lambda$ (con $m \in \mathbb{N}$), e di tutti i numeri reali $r > 0$.
Definiamo la famiglia di intorni di ogni $x \in V$ in questo modo:

$$I \in \mathcal{I}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, B \in \mathcal{B}(x) \text{ t.c. } B \subset I.$$

In questo modo viene definita una topologia $\mathcal{I} : V \rightrightarrows 2^V$, detta la *topologia indotta (o generata) dalla famiglia di seminorme* $\mathcal{F}$.

Spazi localmente convessi

Definizione

Uno spazio vettoriale topologico $(V, \mathcal{T})$ si dice *localmente convesso* se esiste una famiglia di seminorme $\mathcal{F}$ che induce la topologia $\mathcal{T}$.

- Perché *localmente convesso*??

Legami con gli spazi normati

Esempi

Caratterizzazione della convergenza di successioni in uno spazio localmente convesso

Proposizione

Sia V uno sp. vettoriale, $\mathcal{F}$ una famiglia di seminorme su V, e $\{x_n\}$, $x \in V$. Si ha che

$$\{x_n\}_n \text{ converge a } x \text{ nella topologia indotta da } \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{per ogni seminorma } |\cdot| \in \mathcal{F} \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Esempi

Proprietà di Hausdorff

Proposizione

Sia $(V, \mathcal{F})$ uno spazio (vettoriale topologico) localmente convesso. Allora $\mathcal{F}$ induce una topologia di Hausdorff su V se e solo se

$$\forall\, x \neq 0 \quad \exists \text{ una seminorma } |\cdot|_x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } |x|_x > 0.$$

- D'ora in poi lavoreremo sempre in spazi localmente convessi di Hausdorff: OK l'unicità del limite di una successione.

Metrizzabilità della topologia su uno spazio localmente convesso (I)

- Ricordiamo che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice *metrizzabile* se esiste una metrica d su X che induce la topologia $\mathcal{T}$.

I vantaggi della metrizzabilità

Metrizzabilità della topologia su uno spazio localmente convesso (II)

Proposizione

Sia $(V, \mathcal{F})$ uno spazio (vettoriale topologico) localmente convesso, di Hausdorff. Allora la topologia indotta da $\mathcal{F}$ è metrizzabile se e solo se

$\exists$ una (sotto-)famiglia numerabile di seminorme $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ che la induce.

In tal caso, se $\mathcal{F}'$ è data da $\{|\cdot|_k \ : \ k \in N\}$, una distanza che induce la topologia è

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varphi(|x - y|_k)$$

ove $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione limitata, continua, concava, strettamente crescente, con $\varphi(0) = 0$.

- **Esempi:**

Spazi di Fréchet

Negli spazi localmente convessi metrizzabili si può dare il concetto di completezza.

Definizione

Sia $(V, \mathcal{F})$ uno spazio localmente convesso, metrizzato da una distanza d. Diciamo che $(V, \mathcal{F})$ è uno spazio di Fréchet se (V, d) è completo.