Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 9

Caratterizzazione della convergenza debole in $L^p(\Omega)$

- Siano $\boxed{1 < p < \infty}$ e $\{f_n\}$, $f \in L^p(\Omega)$: allora

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow$$

Teorema di compattezza debole in $L^p(\Omega)$

Teorema

Siano $\boxed{1 < p < \infty}$ e $\{f_n\}$, $f \in L^p(\Omega)$. Supponiamo che

$$\exists\, M > 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

Allora $\{f_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ debolmente convergente a una f in $L^p(\Omega)$

Convergenza debole vs. convergenza forte in $L^p(\Omega)$

• Convergenza forte in $L^p(\Omega)$ $\Rightarrow$ convergenza debole in $L^p(\Omega)$, ma non vale il viceversa!

♣ Condizione necessaria per la convergenza forte in $L^p(\Omega)$ è la convergenza q.o. (lungo una sottosuccessione):

Il teorema di rappresentazione del duale di $L^1(\Omega)$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora

$$\forall\, \varphi \in L^1(\Omega)' \quad \exists!\, u \in L^\infty(\Omega)$$

tale che

$$_{L^1(\Omega)'}\langle \varphi, f \rangle_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, f \in L^1(\Omega).$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{L^1(\Omega)'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Come è fatto il duale di $L^\infty(\Omega)$?

Chiaramente,

$$L^\infty(\Omega)' = L^1(\Omega)''$$

<u>Domanda:</u> possiamo concludere che $L^\infty(\Omega)' = L^1(\Omega)$?

♠ **No,** l'isomorfismo canonico $T : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)''$ NON è suriettivo, cioè **esistono** degli elementi di $L^1(\Omega)'' = L^\infty(\Omega)'$ che "non provengono" da funzioni in $L^1(\Omega)$.

Schema degli spazi duali

La convergenza debole in $L^1(\Omega)$

- Convergenza debole in $L^1(\Omega)$

- Compattezza debole in $L^1(\Omega)$

La convergenza debole in $L^\infty(\Omega)$??

- Non conosciamo il duale di $L^\infty(\Omega)$

♣ Però conosciamo il *preduale* di $L^\infty(\Omega)$...

Introduzione

- La topologia debole* si definisce solo negli spazi duali.

Sia V uno spazio di Banach e V' il suo spazio duale: su V' sono definite la topologia forte e la topologia debole $\sigma(V', V'')$.

Costruzione della topologia debole*

- Ricordiamo che l'isomorfismo canonico $J : V \to V''$ identifica V con un sottospazio di V'':

$$J : V \to V'' \quad v \in V \mapsto J(v) \in V'' \ : \ {}_{V''}\langle J(v), v' \rangle_{V'} := {}_{V'}\langle v', v \rangle_V$$

- Posso considerare la famiglia $\widetilde{\mathfrak{F}}$ di seminorme su V' associate agli elementi $J(v)$, al variare di $v \in V$, cioè

$$\widetilde{\mathfrak{F}} = \{ |\cdot|_v \ : \ v \in V \} \quad |v'|_v = |\, {}_{V''}\langle J(v), v' \rangle_{V'} \,| = |\, {}_{V'}\langle v', v \rangle_V \,|$$

- Chiamiamo *topologia debole** su V' la topologia indotta dalla famiglia di seminorme $\widetilde{\mathfrak{F}}$. La denotiamo con il simbolo $\sigma(V', V)$.

Confronto fra la topologia forte, la topologia debole, e la topologia debole*

Convergenza rispetto alla topologia debole*

Proprietà di separabilità

Definizione

Uno spazio di Banach V si dice *separabile* se

$$\exists\, D \subset V \quad \text{numerabile \& denso in } V\,.$$

Esempi

Risultato di compattezza debole*

Teorema

Sia V uno spazio di Banach separabile. Allora ogni $\{v'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V'$ limitata

ammette una sottosuccessione $\{v'_{n_k}\}_k$ convergente a un $v' \in V'$ nella topologia debole*.

La topologia debole* in $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$

- È la topologia indotta dalla famiglia di seminorme su $L^\infty(\Omega)$

$$\widetilde{\mathfrak{F}} := \{|\cdot|_f \ : f \in L^1(\Omega)\}$$

con

$$|u|_f := \left| \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \right| \quad \forall\, u \in L^\infty(\Omega).$$

- Una successione $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ converge debole* a $u \in L^\infty(\Omega)$ se e solo se

Risultato di compattezza debole* in $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$

- Ricordiamo che $L^1(\Omega)$ è separabile.

Teorema

Sia $\{u_n\}_n \subset L^\infty(\Omega)$ una successione limitata. Allora $\{u_n\}_n$ ammette una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}_k$ convergente a u nella topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$, cioè