

Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 1

Programma

Scopo del corso: studiare le proprietà degli **spazi di funzioni**, che sono degli *spazi vettoriali di dimensione infinita*.

1. Richiami sugli spazi vettoriali;
2. esempi di sp. vett. di dimensione finita & infinita
3. proprietà *topologiche* degli sp. vett., **valide in dimensione finita e NON in dimensione infinita**
4. motivazioni per l'analisi funzionale
5. spazi topologici
6. spazi metrici

Definizione di spazio vettoriale

Sia V un insieme (non vuoto). Diciamo che V è uno spazio vettoriale (sul campo \mathbb{R}) se su V sono definite due operazioni:

somma: $+$: $V \times V \rightarrow V$

$$\forall (v, w) \in V \times V \quad (v, w) \mapsto v + w$$

prodotto per uno scalare: \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

$$\forall (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

che godono delle seguenti proprietà:

- $\forall u, v, w \in V \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
- $\exists! 0 \in V \forall v \in V : \quad 0 + v = v + 0 = v$
- $\forall v \in V \exists! w \in V : \quad v + w = w + v = 0$
- $\forall u, v \in V \quad u + v = v + u$
- $\forall u, v \in V, \forall \lambda, k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v, \\ (\lambda + k)u &= \lambda u + ku \end{aligned}$$

- $\forall \lambda, k \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad (\lambda k) \cdot v = \lambda \cdot (kv)$
- $\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$

Applicazioni lineari (I)

Definizione

Siano V, W due sp. vettoriali. Un'applicazione $L : V \rightarrow W$ si dice *lineare* se

$$\forall v, w \in V, \quad \forall \lambda, k \in \mathbb{R} : \quad L(\lambda u + kv) = \lambda L(u) + kL(v).$$

- Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora

$$L(0_V) = 0_W$$

Applicazioni lineari (II)

- Sia V uno sp. vettoriale e $L : V \rightarrow R$ un'applicazione (lineare): per L useremo il termine *funzionale* (lineare).
- Siano V, W due sp. vettoriali. Un'applicazione lineare $L : V \rightarrow W$ si dice *isomorfismo* se L è **invertibile**: allora gli spazi V e W si dicono *isomorfi*.

Dimensione di uno spazio vettoriale (I)

Definizione

Sia V uno sp. vett. Diciamo che V ha *dimensione finita* n (scrivendo $\dim(V) = n$), se

V ha una *base finita* di n elementi $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

cioè

- ▶ i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sono *linearmente indipendenti*

- ▶ la n -upla $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ costituisce un *sistema di generatori* per V

Dimensione di uno spazio vettoriale (II)

- La nozione di dimensione finita (uguale a n) è *ben definita*: se V possiede due basi (=sistemi di generatori linearmente indipendenti)

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

allora $n = m$.

- Sia V uno sp. vett. Diciamo che V ha *dimensione finita* se non ammette alcuna base finita, e scriviamo $\dim(V) = \infty$.

Esempi (I)

Sia V uno sp. vett. di dimensione finita $n \in \mathbb{N}$. Allora

V è isomorfo a \mathbb{R}^n

Esempi (II)

Consideriamo l'insieme

$$\ell^1 := \{ \text{successioni } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \}.$$

- ℓ^1 è uno sp. vett. con le operazioni:

somma:

$$\forall \{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in \ell^1, \quad \{a_n\}_n + \{b_n\}_n := \{a_n + b_n\}_n$$

prodotto per uno scalare:

$$\forall \{a_n\}_n \in \ell^1, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot \{a_n\}_n := \{\lambda a_n\}_n.$$

ℓ^1 ha dimensione infinita

In ℓ^1 esistono *infiniti* vettori *linearmente indipendenti*: sono le successioni

$$e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\},$$

$$e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\},$$

.....

$$e_n = \{0, 0, 0, 0, n, \dots\}$$

.....

Esempi (III)

Consideriamo l'insieme di *funzioni*

$$C^0([0, 2\pi]) := \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua su } [0, 2\pi]\}$$

- $C^0([0, 2\pi])$ è uno sp. vett. con le operazioni:

somma:

$$\forall f, g \in C^0([0, 2\pi]), \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

prodotto per uno scalare:

$$\forall f \in C^0([0, 2\pi]), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \quad x \in [0, 2\pi].$$

- $C^0([0, 2\pi])$ ha *dimensione infinita*: le funzioni

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx), \dots$$

costituiscono un sistema di *infiniti* vettori *linearmente indipendenti* in $C^0([0, 2\pi])$.

Ricapitoliamo

- ▶ V con $\dim(V) = \mathbb{R}^n$
- ▶ ℓ^1
- ▶ $C^0([0, 2\pi])$

Motivazioni per la topologia e l'analisi funzionale

♣ Alcune proprietà degli sp. vett. di dimensione finita, che *non valgono* in sp. vett. di *dimensione infinita*:

- ▶ **continuità di funzionali lineari**
- ▶ **proprietà di “compattezza”**

Continuità di funzionali lineari (I)

Siano V uno sp. vett. con $\dim(V) = n$ e $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare.
Allora L è continuo su V .

Continuità di funzionali lineari (II)

Dimostriamo che $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineare è continuo in ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Se V ha *dimensione infinita* e $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, è in generale falso che L sia continuo.

Proprietà di “compattezza”

Siano V uno sp. vett. con $\dim(V) = n$. Allora ogni successione limitata di V ammette una sottosuccessione convergente.

Problemi di fondo (I)

- ▶ Che cosa significa che un funzionale (definito su uno spazio di dimensione infinita) è continuo??
- ▶ Che cosa significa che una successione (in uno spazio di dimensione infinita) è convergente?

Problemi di fondo (II)

- ▶ nozioni di convergenza in spazi funzionali

- ▶ la nozione di continuità di applicazioni è strettamente legata alla nozione di convergenza di successioni

Discussione euristica sulla nozione di continuità

Panoramica

1. concetto di spazio topologico:

insieme dotato di una topologia = sistema di *intorni*

2. esempi
3. spazi metrici
4. **spazi normati**

Definizione di spazio topologico

Sia X un insieme (non vuoto).

- Chiamiamo *spazio topologico* una coppia (X, \mathcal{J}) , con

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : X &\rightrightarrows 2^X \\ \forall x \in X \quad x &\mapsto \mathcal{J}(x) = \text{famiglia di sottoinsiemi } I \text{ di } X \end{aligned}$$

in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\forall x \in X, \forall I \in \mathcal{J}(x)$ si ha $x \in I$
2. $\forall x \in X, \forall I \in \mathcal{J}(x)$ e $\forall Y \subset X$ con $Y \supset I$, si ha $Y \in \mathcal{J}(x)$
3. $\forall x \in X, \forall I, I' \in \mathcal{J}(x)$ si ha $I \cap I' \in \mathcal{J}(x)$
4. $\forall x \in X, \forall I \in \mathcal{J}(x) \exists I_0 \in \mathcal{J}(x)$ tale che $I_0 \subset I$ e $I_0 \in \mathcal{J}(y)$ per ogni $y \in I_0$.

Non unicità della topologia

Su X insieme non vuoto è in generale possibile assegnare almeno due diverse topologie.

La topologia banale

La topologia discreta

Topologie su \mathbb{R}^n

- ▶ La topologia banale
- ▶ La topologia discreta
- ▶ La topologia *euclidea*

Confronto fra topologie

Sia X un insieme (non vuoto) dotato di due topologie \mathcal{J}' e \mathcal{J}'' . Diciamo che \mathcal{J}' è *meno fine* di \mathcal{J}'' (o \mathcal{J}'' è *più fine* di \mathcal{J}'), se

Spazi metrici

Definizione

Sia X un insieme (non vuoto): chiamiamo *metrica* (o *distanza*) su X una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$$

Dati $x, y \in X$, chiamiamo *distanza* di x da y il numero $d(x, y)$, e *spazio metrico* la coppia (X, d) .

Osservazioni

-

-

-

Spazi topologici metrizzabili

- Sia X un insieme non vuoto. In generale su X è possibile definire diverse metriche.

Non sempre *metriche diverse* danno luogo a *topologie diverse*.

Definizione

Sia $X \neq \emptyset$ dotato di due metriche d_1 e d_2 . Diciamo che d_1 e d_2 sono *topologicamente equivalenti* se esse inducono su X la stessa topologia.

Metriche topologicamente equivalenti

Teorema

Sia $X \neq \emptyset$ dotato di due metriche d_1 e d_2 . Si ha che d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti se e solo se per ogni $x \in X$ vale che

$$\begin{aligned} \forall r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0 : B_{r_2}^{d_2}(x) &\subset B_{r_1}^{d_1}(x), \\ \forall r_2 > 0 \quad \exists r_1 > 0 : B_{r_1}^{d_1}(x) &\subset B_{r_2}^{d_2}(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Osservazione: condizione sufficiente affinché valga (1) è che

$$\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x, y \in X : \quad d_1(x, y) \leq C_1 d_2(x, y), \quad d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y)$$

cioè le metriche d_1 e d_2 sono *equivalenti*.

Esempio

Sia $X \neq \emptyset$. Allora la funzione $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ data da

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

- ▶ è una distanza su X
- ▶ induce la topologia discreta su X

Topologia euclidea su \mathbb{R}^n (I)

- La topologia euclidea su \mathbb{R}^n è indotta dalla *metrica euclidea*

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

- Su \mathbb{R}^n sono definite le *infinite* metriche d_p , con $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$

$$d_p(\vec{x}, \vec{y}) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) := \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad \text{se } p = \infty.$$

Topologia euclidea su \mathbb{R}^n (II)

Le metriche d_p sono *tutte topologicamente equivalenti*, e quindi inducono *tutte* la topologia euclidea.