Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 8

Definizione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile (secondo Lebesgue).

Definizione

Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. Poniamo

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,:\, \text{(def. q.o.) misurabili, t.c.} \\ |u|^p \text{ è integrab. secondo Leb. su } \Omega\}.$$

Per $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,:\, \text{(def. q.o.) misurabili, t.c.} \\ \exists\, C > 0 \,:\, |u(x)| \leq C \text{ per q.o. } x \in \Omega\}.$$

- Quindi $u \in L^\infty(\Omega)$ se e solo se

$$\exists\, C > 0\ \exists\, N \subset \Omega,\ |N| = 0 \,:\, \forall x \in \Omega \setminus N \quad |u(x)| \leq C.$$

Le funzioni di $L^\infty(\Omega)$ si dicono *essenzialmente limitate* su Ω.

Funzioni definite quasi ovunque

N.B.: Gli elementi degli spazi $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, sono definite **quasi ovunque** su Ω, cioè a meno di un insieme di *misura nulla*.

Struttura di spazio vettoriale

Proposizione

Gli spazi $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, sono spazi vettoriali.

Struttura di spazio normato

Proposizione

Gli spazi $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, sono spazi normati, rispetto alle norme

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} && 1 \le p < \infty, \\
&\|u\|_\infty := \inf\{ C > 0 \, : \, |u(x)| \le C \text{ per q.o. } x \in \Omega \} && p = \infty.
\end{aligned}
$$

Per $1 \le p \le \infty$, $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ è uno spazio di Banach.

La disuguaglianza di Hölder

Proposizione

Sia $p \in [1, \infty]$, e sia $p' \in [1, \infty]$ definito da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Allora, per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ si ha

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p'}.$$

Inclusioni fra spazi L^p

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile con $\underline{|\Omega| < \infty}$. Allora:

1. per ogni $1 \leq p \leq q \leq \infty$ si ha
$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$
2. per $1 \leq p \leq q < \infty$ si ha
$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{(q-p)/(qp)} \|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega)$$
3. per $1 \leq p < \infty$ si ha
$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{1/p} \|f\|_\infty \quad \forall f \in L^\infty(\Omega).$$

In generale, le inclusioni fra spazi L^p sono false

♠ Se Ω **NON ha misura finita**, le inclusioni fra spazi $L^p(\Omega)$ sono **false**.

Risultati di interpolazione (I)

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile.

Allora:

$$L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

e

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \subset \|f\|_{L^1(\Omega)}^{1/2} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}$$

Risultati di interpolazione (II)

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile, e siano

$$p,\, q,\, r \in [1,\infty] \text{ t.c. } p < r < q.$$

Allora:

$$L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega)$$

e

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

con $\theta \in (0,1)$ definito da

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Convergenze in spazi L^p

- Sia $p \in [1, \infty]$. Date $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, si ha che

$$f_n \to f \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Rapporti fra le convergenze L^p

Convergenza L^p e convergenza quasi ovunque

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile, e siano $\{u_n\}$, $u \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Allora

$$u_n \longrightarrow u \text{ in } L^p(\Omega) \ \Rightarrow \exists \, \{u_{n_k}\}_k \text{ tale che}$$
$$u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega.$$

Il teorema della convergenza dominata – versione L^p

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile, e sia $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. Supponiamo che esista $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ e per } n \to \infty.$$

Se esiste $\varphi \in L^p(\Omega)$ tale che

$$|u_n(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora $u \in L^p(\Omega)$ e

$$u_n \to u \text{ in } L^p(\Omega).$$

Confronto fra gli spazi $L^p(a, b)$ e gli spazi $(\mathrm{C}^0([a, b]), \| \cdot \|_p)$

Riflessività degli spazi $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

Teorema

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $\underline{1 < p < \infty}$. Allora,

$$L^p(\Omega) \text{ è uno spazio riflessivo.}$$

Il teorema di Riesz

Il teorema di rappresentazione del duale di $L^p(\Omega)$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $\underline{1 < p < \infty}$. Allora

$$\forall \varphi \in L^p(\Omega)' \quad \exists!\, u \in L^{p'}(\Omega)$$

con p' esponente coniugato di p

tale che

$${}_{L^p(\Omega)'}\langle \varphi, f \rangle_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)'} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$