Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 7

(I) Gli insiemi "mattoncino": i rettangoli

- Un insieme $R \subset \mathbb{R}^N$ è detto *rettangolo* se è il prodotto cartesiano di N intervalli limitati, cioè

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$$

- Definiamo *misura di un rettangolo* R il prodotto delle lunghezze degli intervalli di cui R è prodotto cartesiano, cioè

$$|R| = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

(II) Funzioni a scala

- Una funzione $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è detta *a scala* se è della forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{R_i}(x)$$

con $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ e $R_1, R_2, \ldots, R_m$ rettangoli di $\mathbb{R}^N$, e χ_{R_i} le rispettive *funzioni caratteristiche*, cioè

$$\chi_{R_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R_i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Si definisce *integrale (di Lebesgue)* di una funzione a scala il numero

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^{m} c_i |R_i|$$

(III) Insiemi di misura nulla

- Un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ è detto di *misura nulla* se

  $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile di rettangoli $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$A \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} R_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |R_k| \leq \epsilon.$$

Scriviamo $|A| = 0$.

Esempi di insiemi di misura di Lebesgue nulla

(IV) Proprietà valide quasi ovunque

- Diciamo che una proprietà $\mathcal{P}$ *vale quasi ovunque* in $\mathbb{R}^N$ se l'insieme dei punti per i quali tale proprietà non vale ha misura di Lebesgue nulla, cioè

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \mathcal{P}(x) \text{ non vale } \right\}\right| = 0.$$

In tal caso scriviamo

$$\mathcal{P}(x) \text{ vale per q.o. } x \in \mathbb{R}^N, \text{ o } \mathcal{P} \text{ vale q.o. in } \mathbb{R}^N.$$

Esempi

(V) Funzioni misurabili

- Sia $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, **definita quasi ovunque** in $\mathbb{R}^N$.

Definizione

Diciamo che u è *misurabile* secondo Lebesgue se esiste una successione di funzioni <u>a scala</u> $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{k \to \infty} u_k(x) = u(x) \quad \text{per q.o. } x \in R^N.$$

Definizione

Diciamo che $A \subset \mathbb{R}^N$ è *misurabile* secondo Lebesgue se l'associata funzione caratteristica χ_A è misurabile secondo Lebesgue.

(VI) Funzioni integrabili

- Sia $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$ e misurabile secondo Lebesgue.

Definizione

Diciamo che u è *integrabile* secondo Lebesgue se esiste una successione di funzioni a scala $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

- $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$;
- si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N} : \quad \forall\, k,\ k' \geq m \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_k(x) - u_{k'}(x)|\, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

In tal caso, chiamiamo *integrale di Lebesgue* di u il

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_k(x)\, \mathrm{d}x \text{ e lo denotiamo con } \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \mathrm{d}x.$$

Osservazioni

Funzioni definite su insiemi misurabili

- Sia $A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ un insieme misurabile e $u : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita quasi ovunque in A.

Definizione

Diciamo che u è *integrabile* secondo Lebesgue su A se la funzione

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ definita da } \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

è integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^N$.

(VII) Caratterizzazione dell'integrabilità secondo Lebesgue

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e $u : A \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Allora u è *integrabile* secondo Lebesgue se e solo se

$$\exists\, \varphi : A \to [0, +\infty) \text{ integrabile secondo Lebesgue, t.c.}$$
$$|u(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{per q.o. } x \in A.$$

(VIII) Il teorema della convergenza dominata

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e $\{u_n\}_{n \in N}$ una successione di funzioni misurabili $u_n : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$\exists\, u : A \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad u_n(x) \to u(x) \text{ per q.o. } x \in A, \text{ per } n \to \infty.$$

Se esiste $\varphi : A \to [0, +\infty)$, integrabile secondo Lebesgue, tale che

$$|u_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \text{per q.o. } x \in A \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora u è integrabile secondo Lebesgue su A e valgono le *formule di passaggio al limite sotto il segno di integrale*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |u_n(x) - u(x)| \, \mathrm{d}x = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_A u_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_A u(x) \, \mathrm{d}x.$$

(IX) Confronto con la teoria dell'integrazione secondo Riemann

La teoria dell'integrazione secondo Riemann si può dare anche in $\mathbb{R}^N$.

- Si dà senso all'integrale di Riemann di funzioni limitate, definite su insiemi limitati;
- L'integrabilità secondo Riemann è legata alla *regolarità* della funzione, infatti si ha che

Teorema
Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ limitato e $u : A \to \mathbb{R}$ limitata. Allora u è integrabile secondo Riemann su A se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di u ha misura nulla secondo Lebesgue.

- Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ limitato e $u : A \to \mathbb{R}$ limitata. Se l'integrale di Riemann di u su A è ben definito, allora esso coincide con l'integrale di Lebesgue di u.
- Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ non limitato, o $u : A \to \mathbb{R}$ non limitata.

  Allora u è integrabile secondo Lebesgue su A se e solo se $|u|$ è integrabile in senso improprio su A.