Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 6

Introduzione

♢ **Obiettivo:** anticipare le problematiche relative alle formulazioni deboli di PDE, per motivare

- lo studio delle topologie deboli;
- lo studio delle proprietà topologiche di **spazi funzionali di tipo integrale**

♢ Capiremo perché:

- preferire gli spazi di funzioni con proprietà di tipo **integrabilità**, anziché *continuità*;
- privilegiare la nozione di integrale di Lebesgue a quella di Riemann

Il più semplice esempio di PDE

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\; \forall\, t \in (0,+\infty).$$

- È un'equazione di **evoluzione**: la soluzione u è una funzione

$$u : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$$

- È la più semplice equazione di tipo trasporto

Soluzioni classiche

♣ Consideriamo l'associato problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{P}$$

con $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato iniziale.

Quale nozione di soluzione per (P)*??*

Soluzione classica

Diciamo che una funzione $u : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una <u>soluzione classica</u> di (P) se *tutte le derivate parziali che compaiono nella PDE sono funzioni continue*, cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R} \times [0,+\infty)), \\ \frac{\partial}{\partial x} u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R} \times [0,+\infty)) \end{cases} \Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$$

Esistenza di soluzioni classiche

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{P}$$

Teorema

Se $u_0 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, allora la funzione

$$u(x,t) = u_0(x+t)$$

risolve il problema di Cauchy (P).

Critica all' "approccio classico"

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Richiedo a priori una regolarità "molto forte" sulla soluzione u

- L'equazione del trasporto lineare è la più semplice PDE:

Verso una formulazione debole

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

♢ Moltiplichiamo entrambi i membri della PDE per una funzione test $v \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$, nulla al di fuori di un insieme **limitato** $A \subset \mathbb{R} \times [0,+\infty)$.

e integriamo su $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$:

$$0 = \iint_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right) v(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

La formulazione debole

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{P}$$

♢ Diciamo che $u : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è soluzione della *formulazione debole* per il problema di Cauchy (P) se

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \right) u(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) v(x,0)\,\mathrm{d}x$$

per ogni funzione test $v \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$

(FD)

Osservazioni:

- L'operatore differenziale $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$
- La condizione iniziale

Formulazione debole & formulazione classica

Confrontiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{P}$$

con

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \right) u(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) v(x,0)\,\mathrm{d}x \tag{FD}$$

per ogni funzione test $v \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$

N.B.: per dare senso a (FD) **non serve più** che $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$

Osservazioni finali

1. Perché gli **spazi di funzioni** (e quindi l'analisi funzionale) sono così **importanti** nella teoria delle PDE?

2. Quali spazi funzionali sono **significativi per la formulazione debole delle PDE**?

3. Perché sono importanti le **proprietà topologiche** degli spazi funzionali?

Integrale di Lebesgue vs. integrale di Riemann (I)

♢ Ambienteremo le formulazioni deboli di PDE in spazi di funzioni integrabili, secondo la **teoria dell'integrale di Lebesgue**:

- infatti, vogliamo rinunciare a ipotesi di tipo "regolarità"

- Se usassimo la nozione di integrale di Riemann, lavoreremmo in spazi tipo $\mathrm{C}^0([a,b])$, $\mathrm{C}^1([a,b])$, dotati di *norme integrali*

  invece di $\mathrm{C}^0([a,b])$ potremmo considerare

  $$\mathcal{L}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f \text{ integrabile secondo Riemann su } [a,b]\}$$

  ma $(\mathcal{L}([a,b]), \|\cdot\|_1)$ NON è completo.

Integrale di Lebesgue vs. integrale di Riemann (II)

- La teoria dell'integrale di Riemann manca di adeguati **risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale**