Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 5

Programma

Topologia debole:

1. definizione
2. prime proprietà
3. confronto con la topologia forte
4. continuità di funzionali lineari e continui
5. il problema della compattezza
6. spazi di Banach riflessivi
7. il teorema di Kakutani
8. estensione del teorema di Weierstrass

Definizione

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

La topologia $\sigma(V, V')$

Chiamiamo topologia debole su V la topologia indotta dalla famiglia di seminorme

$$|v|_{v'} = |\langle v', v \rangle| \quad \text{con } v \in V,$$

al variare di $v' \in V'$. Denotiamo la topologia debole con il simbolo $\sigma(V, V')$.

- Per ogni $v' \in V'$, $|\cdot|_{v'}$ è una seminorma;
- In generale, la famiglia $\mathcal{F} := \{|\cdot|_{v'} \ : \ v' \in V'\}$ è costituita da un'infinità non numerabile di elementi!

Proprietà della topologia debole (I)

La topologia $\sigma(V, V')$ è di Hausdorff.

Proprietà della topologia debole (II)

Nozione di convergenza per $\sigma(V, V')$

Siano $\{v_n\}_n$, $v \in V$. Allora, $\{v_n\}_n$ converge a v per la topologia $\sigma(V, V')$

se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \langle v', v_n \rangle = \langle v', v \rangle \qquad \text{per ogni } v' \in V',$$

e scriviamo $v_n \rightharpoonup v$.

Quindi ogni $v' \in V'$ è *sequenzialmente continuo* rispetto alla topologia $\sigma(V, V')$.

La topologia debole è meno fine della topologia forte (I)

Un risultato in termini di convergenza di successioni

Siano $\{v_n\}_n$, $v \in V$. Allora

1. Se $v_n \to v$ in V, allora $v_n \rightharpoonup v$ in V;

2. Se $v_n \rightharpoonup v$ in V, allora
$$\{v_n\} \text{ è limitata in } V,$$
$$\|v\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|$$

3. Se $v_n \rightharpoonup v$ in V e $v'_n \to v'$ in V', allora
$$\langle v'_n, v_n \rangle \to \langle v', v \rangle.$$

La topologia debole è meno fine della topologia forte (II)

Dalla disuguaglianza

$$\forall\, v' \in V', \quad \forall\, v \in V \quad |v|_{v'} \leq \|v'\|_{V'} \|v\|_V$$

deduco che la topologia debole è meno fine della topologia forte.

In dimensione finita..

Teorema

Se V ha dimensione finita, allora la topologia debole su V coincide con la topologia forte ed è quindi metrizzabile.

.. e in dimensione infinita

Supponiamo che V abbia dimensione infinita. Allora $\sigma(V, V')$ è strettamente meno fine della topologia forte.

Funzionali lineari e continui

Teorema

Sia $v' \in V'$. Allora $v : V \to \mathbb{R}$ è anche continuo (e non solo *sequenzialmente continuo*) rispetto alla topologia debole.

Chiusi forti e chiusi deboli

Ricordiamo che $C \subset V$ è *convesso* se

Teorema

Sia $C \subset V$ un insieme convesso. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. C è chiuso per la topologia forte
2. C è chiuso per la topologia debole
3. $\forall \{x_n\} \subset C, \quad x_n \to x \;\Rightarrow\; x \in C$
4. $\forall \{x_n\} \subset C, \quad x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; x \in C$

Introduzione

♣ È vero che ogni sottoinsieme $K \subset V$ chiuso e limitato è compatto (per successioni) rispetto alla topologia debole?

Spazi riflessivi

♣ È vero che ogni sottoinsieme $K \subset V$ chiuso e limitato è compatto (per successioni) rispetto alla topologia debole?
SÌ, se lo spazio è riflessivo.

Definizione
Diciamo che uno spazio di Banach V è *riflessivo* se V può essere identificato con il suo spazio biduale tramite l'isometria canonica, cioè se

$$J(V) = V''.$$

Spazi riflessivi & compattezza debole (I)

Il teorema di Kakutani

Sia V uno spazio di Banach. Allora

$$V \text{ è riflessivo } \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B_1(0)} \text{ è compatta per } \sigma(V, V').$$

Spazi riflessivi & compattezza debole (II)

Teorema

Sia V uno spazio di Banach riflessivo. Allora $K \subset V$ è *compatto per successioni* rispetto alla topologia debole se e solo se

1. K è chiuso per $\sigma(V, V')$
2. K è limitato in V.

Il teorema di Weierstrass

La dimostrazione negli spazi metrici rivisitata

Semicontinuità inferiore in spazi topologici

Convessità & semicontinuità inferiore

Estensione del teorema di Weierstrass alla topologia debole