Analisi funzionale

Riccarda Rossi

Lezione 10

Definizione di prodotto scalare

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale. Chiamiamo *prodotto scalare* su V un'applicazione $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ verificante $\forall\, x,\, y,\, z \in V$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

1. positività
$$(x, x) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad (x, x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0;$$
2. simmetria
$$(x, y) = (y, x)$$
3. linearità
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \qquad \text{e} \qquad (\lambda x, y) = \lambda(x, y).$$

Chiamiamo *spazio prehilbertiano* la coppia $(V, (\cdot, \cdot))$.

Spazio prehilbertiano $\Rightarrow$ spazio normato

Sia $(V, (\cdot,\cdot))$ uno spazio prehilbertiano. Definiamo $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tramite

$$\|v\| := \sqrt{(v,v)} \quad \forall\, v \in V.$$

Si dimostra che $\|\cdot\|$ è una norma su V.

Proprietà della norma e del prodotto scalare

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia $(V, (\cdot,\cdot))$ uno spazio prehilbertiano. Si ha

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall\, x,\, y \in V.$$

Relazione fra norma e prodotto scalare

Sia $(V, (\cdot,\cdot))$ uno spazio prehilbertiano. Vale

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad \forall\, x,\, y \in V.$$

Identità del parallelogramma

Sia $(V, (\cdot, \cdot))$ uno spazio prehilbertiano. Vale

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in V.$$

Definizione di spazio di Hilbert

Uno spazio prehilbertiano $(V, (\cdot, \cdot))$ si dice *di Hilbert* se esso è di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

Esempi: $\mathbb{R}^N$

Esempi: V con $\dim(V) < \infty$

Esempi: $L^2(\Omega)$

Esempi: ℓ^2

Teorema di rappresentazione del duale

Teorema

Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert. Allora

$$\forall\, \varphi \in H' \quad \exists!\, f \in H \ \text{ t.c. } \quad {}_{H'}\langle \varphi, u \rangle_H = (f, u) \quad \forall\, u \in H.$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H.$$

Riflessività

Teorema

Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ un spazio di Hilbert. Allora H è riflessivo.

La topologia debole su H

Teorema delle proiezioni in un convesso chiuso

Teorema

Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un sottoinsieme convesso, chiuso, non vuoto.
Allora

$$\forall\, v \in H \quad \exists!\, u \in K \ : \quad \|v-u\| = \min_{w \in K} \|v-w\|.$$

Inoltre u è caratterizzato dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} u \in K, \\ (v-u, w-u) \leq 0 \quad \forall\, w \in K. \end{cases}$$

Chiamiamo u *proiezione di* v *su* K, e scriviamo $u = P_K(v)$.

Il teorema delle proiezioni su un sottospazio chiuso

Teorema

Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e $M \subset H$ un suo sottospazio chiuso.
Allora

$$\forall\, v \in H \quad \exists!\, u \in M \;: \quad \|v-u\| = \min_{w \in M} \|v-w\|.$$

Inoltre $u = P_M(v)$ è caratterizzato dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} u \in M, \\ (v-u, w) = 0 \quad \forall\, w \in M. \end{cases}$$

Ortogonalità

Il teorema di decomposizione

Vediamo ora un corollario al teorema delle proiezioni su un sottospazio chiuso.

Teorema

Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e $M \subset H$ un suo sottospazio chiuso. Allora ogni $v \in H$ si decompone in uno e un sol modo nella somma

$$v = u + z \quad \text{con } u \in M \text{ e } z \in M^{\perp}.$$

Inoltre

$$u = P_M(v) \text{ e } z = P_{M^{\perp}}(v).$$

Forme bilineari

Ricordiamo la seguente

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale. Chiamiamo *forma bilineare* su V un'applicazione $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ verificante $\forall\, x,\, y,\, z \in V$ e $\forall\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$

$$a(\lambda u + \mu v, z) = \lambda a(u,z) + \mu a(v,z),$$
$$a(u, \lambda v + \mu z) = \lambda a(u,v) + \mu a(u,z).$$

Definizione

Sia $(H, (\cdot,\cdot))$ uno spazio di Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare. Diciamo che $a(\cdot,\cdot)$ è

1. <u>continua</u> se
$$\exists\, C > 0\ \forall\, u, v \in H \quad |a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|;$$
2. <u>coerciva</u> se
$$\exists\, \alpha > 0\ \forall\, u, v \in H \quad a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2.$$

Il teorema di Lax-Milgram

Teorema

Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva.
Allora

$$\forall\, \varphi \in H' \ \exists!\, u \in H \quad \text{t.c.} \quad a(u, v) = {}_{H'}\langle \varphi, v \rangle_H \quad \forall\, v \in H.$$

Inoltre, se a è *simmetrica*,

u è caratterizzata da

$$\begin{cases} u \in H, \\ \frac{1}{2} a(u, u) - {}_{H'}\langle \varphi, u \rangle_H = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - {}_{H'}\langle \varphi, v \rangle_H \right). \end{cases}$$

Introduzione

Base Hilbertiana

Definizione

Chiamiamo *base Hilbertiana* di uno spazio di Hilbert H una successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tale che

1. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ortonormale, cioè
2. lo spazio vettoriale generato dagli $\{e_n\}$ è denso in H.

Proprietà di una base Hilbertiana (1)

Teorema

Sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una base Hilbertiana in H. Per ogni $u \in H$ poniamo

$$u_n := (u, e_n)$$

e chiamiamo i numeri reali u_n *coefficienti di Fourier* di u (rispetto alla base ortonormale $\{e_n\}$).

Allora si ha:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n.$$

Inoltre, vale l'*identità di Parseval*

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2,$$

in particolare $\{u_n\} \subset \ell^2$.

Proprietà di una base Hilbertiana (2)

Teorema

Viceversa, data una successione $\{a_n\} \in \ell^2$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge in H a un certo limite u, tale che

$$a_n = (u, e_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Esistenza di una base Hilbertiana

Teorema

Sia H uno spazio di Hilbert separabile.

Allora H possiede una base Hilbertiana.

Corollario (1)

Sia H uno spazio di Hilbert separabile.
Allora H è isomorfo e isometrico a ℓ^2.

Corollario (2)

Siano H_1 e H_2 due spazio di Hilbert separabili.
Allora H_1 e H_2 sono isomorfi e isometrici.