Dispense di
Matematica–Analisi Matematica

Riccarda Rossi

Corso di Laurea in Disegno Industriale

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2009/2010

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Elementi di logica matematica

Una condizione basilare per poter apprendere la matematica è acquisire correttamente il cosiddetto "linguaggio matematico". In effetti, in matematica la verifica di un'affermazione non avviene sperimentalmente, ma dandone una dimostrazione, e dimostrare un'affermazione (in questo contesto si usa anche il termine *tesi*) significa provarne la verità facendola discendere, attraverso una catena di passaggi logici, da un altro asserto (*ipotesi*), di cui si presuppone la verità. Per poter effettuare correttamente questi passaggi (cioè sviluppare il *processo deduttivo*), è necessario impiegare rigorosamente un linguaggio che non ammetta ambiguità. Tale è il linguaggio matematico, basato sulla logica, della quale è opportuno apprendere i primi rudimenti.

1.1.1 Proposizioni e predicati

Gli oggetti basilari della logica sono le proposizioni.

Definizione 1.1.1 (Proposizione)**.** *Chiamiamo* proposizione *una frase di senso compiuto della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Denotiamo la generica proposizione con i simboli* $\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$*.*

Esempio 1.1.2.

1. $\mathcal{P}_1$: "Quest'aula contiene solo studenti di Disegno Industriale" (VERA);
2. $\mathcal{P}_2$: "Ogni anno, il 17 Settembre a Cremona nevica" (FALSA);
3. $\mathcal{P}_3$: "Che ora è?" (NON È UNA PROPOSIZIONE);
4. $\mathcal{P}_4$: $1 + 1 = 2$ (VERA);
5. $\mathcal{P}_5$: "11 è un numero dispari" (VERA);
6. $\mathcal{P}_6$: "60 è un numero primo[1]" (FALSA)......

[1] cioè un numero naturale $n > 1$ i cui unici divisori sono 1 e n.

Definizione 1.1.3 (Predicato)**.** *Chiamiamo* predicato *una frase di senso compiuto che contiene una o più variabili libere. Denotiamo con i simboli* $\mathcal{P}(x)$ *o* $\mathcal{Q}(x)$ *un predicato dipendente dalla variabile* x*, (con* $\mathcal{P}(x,y)$ *o* $\mathcal{Q}(x,y)$ *un predicato dipendente dalle variabili* x*,* y*, con* $\mathcal{P}(x,y,z)$ *o* $\mathcal{Q}(x,y,z)$ *un predicato dipendente dalle variabili* x*,* y*,* z*.....)*

Chiaramente, il valore di verità del predicato $\mathcal{P}(x)$ ($\mathcal{P}(x,y)$...., risp.) dipende dal valore assunto dalla variabile x (da x, y...., risp.). Per trasformare un predicato $\mathcal{P}(x)$ in una proposizione $\mathcal{P}$, è quindi sufficiente assegnare un valore alle variabili libere.

Esempio 1.1.4.

1. $\mathcal{P}_1(x)$: "L'aula x contiene solo studenti di Disegno Industriale";
2. $\mathcal{P}_2(x,y)$: "Ogni anno, nel giorno x e nel luogo y nevica";
3. $\mathcal{P}_3(x,y)$: $x+y=2$;
4. $\mathcal{P}_4(x)$: "x è un numero dispari";
5. $\mathcal{P}_5(x)$: "x è un numero primo"......

1.1.2 Quantificatori

Un altro modo per rendere i predicati degli oggetti a cui attribuire in modo inequivocabile un valore di verità/falsità è usare i cosiddetti *quantificatori*:

- $\forall$: che si legge *Per ogni* (**quantificatore universale**);
- $\exists$: che si legge *Esiste* (**quantificatore esistenziale**);
- $\exists!$: che si legge *Esiste ed è unico.*

Esempio 1.1.5.

1. Consideriamo il predicato "Per ogni numero naturale n, n è primo". Pur dipendendo da una variabile n, a questo predicato si può attribuire inequivocabilmente il valore VERO/FALSO, e quindi è di fatto una proposizione. In questo caso, ovviamente tale proposizione è FALSA;
2. "Esiste un numero naturale n tale che n è primo" (VERA);
3. "Ogni numero dispari è divisibile per 3" (FALSA).

Osservazione 1.1.6. Si noti che

- $\exists$ significa *Esiste almeno uno*,
- $\exists!$ significa *Esiste ed è unico.*

Per esempio:
In alcune zone dello Utah (Stati Uniti) nelle quali è tollerata la poligamia, ogni uomo ha almeno una moglie, mentre ogni donna ha un unico marito.

Osservazione 1.1.7 (Attenzione all'ordine dei quantificatori)**.** In una proposizione/predicato, è essenziale l'ordine con cui compaiono i vari quantificatori. In altri termini, invertire l'ordine di due quantificatori, di diverso tipo, adiacenti, può alterare, anche pesantemente, il senso della frase. Ad esempio:

- *In ogni luogo c'è almeno un giorno all'anno in cui piove*, che si può scrivere più sinteticamente come
$$\forall \,\text{luogo} \quad \exists \,\text{giorno all'anno:} \;\; \text{piove}$$
(e questa proposizione è VERA). Invertendo l'ordine dei quantificatori si ottiene
$$\exists \,\text{giorno all'anno:} \;\; \forall \,\text{luogo} \qquad \text{piove}\,,$$
cioè *C'è almeno un giorno all'anno tale che in ogni luogo piove*, che è FALSA.
- A volte la distinzione è più sottile, anche se significativa:

  In questo libro giallo, per ogni assassinio commesso esiste un unico colpevole,

  da confrontarsi con

  In questo libro giallo, esiste un unico colpevole per ogni assassinio commesso.
- Partiamo da una affermazione FALSA: *Esiste un numero intero più grande di ogni altro numero intero*, cioè
$$\exists \, y \;\; \text{numero intero:} \;\; \forall \,\text{intero } x \qquad y > x\,.$$
Invertendo l'ordine dei quantificatori otteniamo
$$\forall \,\text{intero } x \;\; \exists \, y \;\; \text{numero intero:} \qquad y > x\,,$$
che è VERA.

1.1.3 Connettivi logici

I connettivi logici che ora introduciamo trasformano una o più proposizioni/predicati in altre proposizioni/predicati, **il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza**.

NON (negazione): *questo connettivo trasforma una data proposizione $\mathcal{P}$ (predicato $\mathcal{P}(x)$) nella proposizione* non($\mathcal{P}$) *(nel predicato* non($\mathcal{P}(x)$)*), che ha contenuto contrario a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$.*
Ad esempio: "Oggi piove" diventa "Oggi non piove".

- Una sola fra $\mathcal{P}$ e non($\mathcal{P}$) è vera: vale cioè il principio del terzo escluso[2]
- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide, cioè
$$\text{non}(\text{non}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}\,.$$
Ad esempio: "Non è vero che Bin Laden non sia un criminale"= "Bin Laden è un criminale".

E (congiunzione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$),*
$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}$$
è la proposizione nella quale valgono sia la prima, sia la seconda.
Quindi, "$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$" è vera se e solo se sia $\mathcal{P}$ sia $\mathcal{Q}$ sono vere.
Ad esempio: "Oggi piove e fa freddo".

[2] che caratterizza la cosiddetta logica bivalente, alla base dei calcolatori elettronici.

O (disgiunzione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$),*

$$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}$$

è la proposizione nella quale vale almeno delle due.
Quindi, "$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$" è vera se e solo almeno una fra $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è vera.
Si noti che, scrivendo $\mathcal{P}$o$\mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe: in ogni caso, almeno una delle due lo è. Per esempio: se dico che "Ogni mio cugino gioca o a tennis o a basket", non escludo di avere un cugino molto sportivo che gioca sia a tennis, sia a basket.

$\Longrightarrow$ (implicazione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$), il connettivo implicazione crea la nuova proposizione $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, che si legge*

- "$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$",
- "se $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{Q}$".

e che ha il seguente significato: se $\mathcal{P}$ è vera, anche $\mathcal{Q}$ è vera.
Ad esempio:

- "Se l'acqua viene portate alla temperatura di 0 gradi celsius, allora si ghiaccia."
- "Se un numero naturale n è divisibile per 4, allora n è pari."
- "Se una figura piana è un quadrato, allora le sue diagonali sono perpendicolari."
- $3x + 5 = 17 \implies x = 4$.

Si usano anche le seguenti locuzioni per esprimere $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$:

- "$\mathcal{P}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{Q}$"[3],
- "$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$"[4].

Ad esempio, la proposizione
"Se fa freddo, accendo il riscaldamento."
si riesprime come
"Condizione sufficiente affinché io accenda il riscaldamento è che faccia freddo."

Non si confonda mai "condizione sufficiente" con "condizione necessaria": per esempio, la proposizione "se passo l'esame di matematica, domani sera ti porto al cinema" equivale a "condizione sufficiente per portarti al cinema è che domani io passi l'esame di matematica", ed equivale anche a "portarti al cinema è condizione necessaria per la mia promozione all'esame di matematica." Ha tutt'altro significato la proposizione "Portarti al cinema è una condizione sufficiente affinché io passi l'esame di matematica domani"!!!!

$\Longleftrightarrow$ (doppia implicazione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$), il connettivo doppia implicazione crea la nuova proposizione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$, che equivale a*

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q} \Longleftarrow \mathcal{P}$$

e che si legge "$\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{Q}$". In altri termini, la proposizione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ **è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ hanno lo stesso valore di verità** (cioè sono entrambe vere o entrambe false). Altre locuzioni sono

[3]in altri termini, è sufficiente che valga $\mathcal{P}$ affinché valga anche $\mathcal{Q}$.
[4]in altri termini, se vale $\mathcal{P}$, necessariamente deve valere anche $\mathcal{Q}$.

- "$\mathcal{P}$ è condizione necessaria e sufficiente per $\mathcal{Q}$",
- "$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$".

Ad esempio:

- "Condizione necessaria e sufficiente affinché il Brescia vinca contro l'Atalanta è che il Brescia segni un numero di gol strettamente maggiore dell'Atalanta";
- Dati due numeri reali a e b, si ha

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ o } b = 0.$$

1.1.4 Negazione di proposizioni con quantificatori e connettivi

Apprendiamo alcune regole **fondamentali** per

Negare proposizioni/predicati contenenti quantificatori:

NON $(\forall)$ = $\exists$ **NON**
cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\forall\, x \ \ \mathcal{P}(x)) &\iff \text{"non è vero che } \mathcal{P}(x) \text{ è sempre vera"} \\ &\iff \text{"c'è almeno un } x \text{ per il quale } \mathcal{P}(x) \text{ è falsa"} \\ &\iff \exists\, x : \ \ \text{non}(\mathcal{P}(x))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio:

- "Non è vero che ogni ragazzo di questa classe è senza gli occhiali", cioè "Esiste un ragazzo in questa classe che porta gli occhiali";
- la negazione di "In Irlanda tutti i giorni dell'anno piove" è la proposizione "C'è almeno un giorno all'anno in Irlanda in cui non piove".
  Quindi, **per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata:** si parla allora di un controesempio.

NON $(\exists)$ = $\forall$ **NON**
cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\exists\, x \ \ \mathcal{P}(x)) &\iff \text{"non è vero che esiste un } x \text{ per cui } \mathcal{P}(x) \text{ è vera"} \\ &\iff \text{"per ogni } x\ \mathcal{P}(x) \text{ è falsa"} \\ &\iff \forall\, x : \ \ \text{non}(\mathcal{P}(x))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio:

- "Non esiste nessuno stato europeo il cui nome inizi per *z*", cioè "Tutti gli stati europei hanno nomi che iniziano per lettere diverse da *z*";
- La negazione di "$\exists\, x > 2 \ \ : x^2 \leq 4$" (FALSA) è "$\forall\, x > 2, \ \ x^2 \geq 4$" (VERA).

NON $(\forall + \exists) = \exists + \forall$ **NON**
cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned}
\text{non } (\forall x \ \ \exists y \ \ : \ \ \mathcal{P}(x,y)) &\iff \text{“non è vero che per ogni } x \text{ esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x,y) \text{ è vera”} \\
&\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale è falso che [esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x,y) \text{ è vera]”} \\
&\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale per ogni } y \ \mathcal{P}(x,y) \text{ è falsa”} \\
&\iff \exists x \ \ : \forall y \ \ \text{non}(\mathcal{P}(x,y))\,.
\end{aligned}$$

Ad esempio: “È falso che ogni padre bresciano abbia almeno una figlia bionda” equivale a “esiste un padre bresciano tale che tutte le sue figlie non sono bionde”..

NON $(\exists + \forall) = \forall + \exists$ **NON**
Ad esempio, la proposizione[5]

“Non (esiste un numero naturale x tale che per ogni naturale y si abbia $y \leq x$)”

è equivalente a

“per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che si abbia $y > x$”.

Negare proposizioni/predicati contenenti connettivi:

non($\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$) = [non($\mathcal{P}$) o non($\mathcal{Q}$)]
Per esempio: “Non è vero che entrambe le figlie del medico sono alte” equivale a “Almeno una delle due figlie del medico non è alta”.

non($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$) = [non($\mathcal{P}$) e non($\mathcal{Q}$)]
Per esempio: “Non è vero che mio fratello, a cena, mangia carne o pesce” equivale a “A cena, mio fratello non mangia né carne, né pesce”.

non($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) = [$\mathcal{P}$ e non($\mathcal{Q}$)]
Ad esempio: “È falso che Lucia, se prende correnti d'aria fredda, si ammala” equivale a “Lucia prende correnti d'aria fredda e non si ammala”.

Infine, osserviamo che

$$\text{l'implicazione } \mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \quad \text{è equivalente a} \quad [\text{non}(\mathcal{Q}) \implies \text{non}(\mathcal{P})]. \tag{1.1.1}$$

In altri termini, dire $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, cioè “$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$”, è equivalente a dire “se non vale $\mathcal{Q}$, non può valere neppure $\mathcal{P}$”.

1.1.5 La dimostrazione per assurdo

L'equivalenza (1.1.1) è alla base della cosiddetta *dimostrazione per assurdo*.

Vogliamo dimostrare che, se assumiamo come vera una data ipotesi $\mathcal{P}$, allora vale la tesi $\mathcal{Q}$, cioè che $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Ciò è equivalente a dimostrare che non($\mathcal{Q}$) $\implies$ non($\mathcal{P}$). Allora, nella dimostrazione per assurdo si procede così: si parte dall'ipotesi $\mathcal{P}$, e si nega la tesi che si vuole dimostrare, cioè non($\mathcal{Q}$). Dopodiché si sviluppa un ragionamento che porterà a dedurre

[5] che esprime la cosiddetta “proprietà archimedea” dei numeri naturali.

da non($\mathcal{Q}$) che vale non($\mathcal{P}$)[6]. Ma $\mathcal{P}$ e non($\mathcal{P}$) non possono sussistere contemporaneamente. Quindi non($\mathcal{P}$) è FALSA. Abbiamo quindi provato che, assumendo non($\mathcal{Q}$), si è giunti a non($\mathcal{P}$) (FALSA). Ma allora anche non($\mathcal{Q}$) è FALSA.

Per esempio, dimostriamo il seguente

Teorema 1.1.8. Ipotesi: *a e b sono due numeri naturali strettamente positivi, il cui prodotto è un numero dispari.*
Tesi: *Sia a sia b sono numeri dispari.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che valga l'ipotesi e neghiamo la tesi: quindi

$$a \cdot b \text{ è un numero dispari e almeno uno fra } a \text{ o } b \text{ non è dispari.}$$

Per esempio supponiamo che a sia pari[7]. Quindi $a = 2p$, ove p è un numero naturale strettamente positivo. Ma allora $a \cdot b = 2p \cdot b$, quindi $a \cdot b$ è un intero pari, contro la nostra ipotesi. Assurdo, quindi vale la tesi. □

1.2 Elementi di teoria degli insiemi

Chiamiamo *insieme* una certa entità composta di oggetti elementari. Sinonimi di *insieme* sono i termini: *collezione*, *famiglia*, *classe*. Gli oggetti che costituiscono un insieme sono detti *elementi*.

Notazioni. Useremo:

- una lettera maiuscola (ad es.: A, B, $C \ldots$) per denotare un dato insieme,
- lettere minuscole (ad es.: a, b, c, $x \ldots$) per denotare gli elementi di insieme.

Dati x ed E,

- $x \in E$ significa "x appartiene ad E",
- $x \notin E$ significa "x non appartiene ad E".

Il simbolo $\emptyset$ denota l'insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto*.
Chiamiamo *cardinalità* di un insieme il numero dei suoi elementi.

Descrizione degli insiemi. È possibile descrivere un generico insieme in due modi:

1. elencandone tutti gli elementi, con ciascun elemento indicato una sola volta, ad es. $A = \{-1, 1\}$. Si noti che l'ordine con cui si elencano gli elementi è inessenziale, pertanto

$$A = \{-1, 1\} = \{1, -1\}.$$

   Si noti che A ha cardinalità 2.
   Ulteriori esempi sono i seguenti insiemi numerici:

   (a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$: l'insieme dei *numeri naturali*;

[6] o che vale un'altra affermazione $\mathcal{R}$ che sappiamo essere FALSA.
[7] procederemmo analogamente se supponessimo b pari.

(b) $\mathbb{Z} = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$: l'insieme dei *numeri interi*;

(c) $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$: l'insieme dei *numeri naturali pari*.

Si noti che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e P hanno infiniti elementi: in tal caso si dice che hanno *cardinalità infinita*.

2. Oppure si può descrivere un insieme come la famiglia di tutti gli elementi verificanti una certa proprietà (o predicato). In altri termini, dato un insieme ambiente $\mathcal{U}$ e una proprietà $\mathscr{P}$, possiamo definire un insieme $\mathcal{A}$ come la famiglia di tutti gli elementi $x \in \mathcal{U}$ che rendono vera la proprietà $\mathscr{P}$, cioè gli x per i quali vale $\mathscr{P}(x)$[8]:

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{U} : \ \mathscr{P}(x)\} \ .$$

Ad esempio,

- $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{N} : \ x < 3\} = \{0, 1, 2\}$;
- $\mathcal{A}_2 = \big\{x \in \mathbb{Z} : \ x^2 = 1\big\} = \{-1, 1\}$.

L'inclusione. Siamo I, E due insiemi. Diciamo che $E \subset I$ (cioè E *è un sottoinsieme di* I, o anche E *è incluso in* I) se

$$\text{per ogni } x \in E \text{ si ha che } x \in I$$

(in simboli: $x \in E \implies x \in I$). Chiaramente, se $E = I$ si ha in particolare che $E \subset I$ e $I \subset E$. Di fatto, si ha che

$$E = I \iff E \subset I \text{ e } I \subset E \,.$$

Se $E \subset I$ e $E \neq I$, diciamo che E è un sottoinsieme proprio di I; in simboli, questo si traduce con

$$\forall\, x \in E \,, x \in I \quad \text{e} \quad \exists\, y \in I : \ y \notin E$$

(la prima proposizione afferma che E è incluso in I, e la seconda che I non è incluso in E).

Si conviene che, dato un qualsiasi insieme E, si abbia $\emptyset \subset E$ e $E \subset E$ ($\emptyset$ e E vengono detti *sottoinsiemi impropri* di E).

Operazioni fra insiemi. Dati A e B (sottoinsiemi di un certo insieme ambiente che non specifichiamo), possiamo definire i seguenti insiemi:

l'*insieme unione*

$$A \cup B := \{x : \quad x \in A \text{ o } x \in B\} \,;$$

l'*insieme intersezione*

$$A \cap B := \{x : \quad x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(se $A \cap B = \emptyset$, si dice che A e B sono disgiunti);

l'*insieme differenza* (di A e B)

$$A \setminus B := \{x : \quad x \in A \text{ e } x \notin B\} \,.$$

Se A e X sono due insiemi con $A \subset X$, allora l'insieme $X \setminus A$ viene detto *insieme complementare* di A in X (e denotato anche con il simbolo A^c).

[8] quando si definisce un insieme $\mathcal{A}$ in questo modo, si usa la notazione $\mathcal{A} := \dots$; il simbolo $:=$ viene in generale usato nelle definizioni.

Si noti che, mentre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (cioè vale la proprietà commutativa), in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$.
Ad esempio, consideriamo

1. l'insieme dei numeri naturali pari P e l'insieme $D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dei numeri naturali dispari. In questo caso,

$$P \cap D = \emptyset, \qquad P \cup D = \mathbb{N}, \qquad P \setminus D = P, \qquad D \setminus P = D\,.$$

2. l'insieme dei numeri naturali pari P e l'insieme M dei multipli naturali di 4 (cioè $M = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 4n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora

$$M \subset P, \qquad P \cap M = M, \qquad P \cup M = P, \qquad M \setminus P = \emptyset.$$

Infine, ricordiamo che, dato un certo insieme A, l'insieme dei sottoinsiemi di A viene detto *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di A, e denotato con il simbolo 2^A. Ad esempio

$$A = \{0, 1, 2\} \quad \Longrightarrow \quad 2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}\,. \tag{1.2.1}$$

Il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, non necessariamente distinti, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B l'insieme delle coppie ordinate (a, b), al variare di $a \in A$ e di $b \in B$, cioè

$$A \times B := \{(a, b) : \ \ a \in A, \ b \in B\}\,.$$

"Coppie ordinate" significa che l'ordine con cui appare ciascun elemento della coppia è essenziale. Due coppie ordinate (a, b) e (a', b') sono uguali se hanno uguali ordinatamente primo e secondo elemento, cioè se $a = a'$ e $b = b'$.

Quindi, dati A e B, in generale si ha $A \times B \neq B \times A$. Si provi a verificare ciò descrivendo i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$, con $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$.

Se $A = B$, useremo la notazione A^2 per $A \times A$.

Si può estendere l'operazione di prodotto cartesiano a una n-upla di insiemi $A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_n$, con $n \geq 2$, definendo

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, \ \ldots, \ a_n \in A_n\}$$

cioè l'insieme delle *n-uple ordinate* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, al variare di $a_1 \in A_1$, .. $a_n \in A_n$. Anche in questo caso, se $A_i \equiv A$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, si usa la notazione $A \times A \times \ldots \times A = A^n$.

Il concetto di relazione. Dati due insiemi non vuoti A e B, una *relazione* $\mathcal{R}$ di A in B è per definizione un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$ (se $A = B$, un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset A^2$ viene chiamato relazione in A). Diciamo che un elemento $a \in A$ è in relazione con un elemento $b \in B$ (e scriviamo $a \, \mathcal{R} \, b$) se $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.2.1. 1. Se $A = B$, l'*insieme diagonale* $D = \{(a, b) \in A^2 : \ \ a = b\}$ corrisponde alla relazione di uguaglianza: in effetti,

$$(a, b) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.$$

2. La relazione "$\leq$ " nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{N}$ si identifica con l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$.

Definizione 1.2.2. *Diciamo che una relazione* $\mathcal{R}$ *di un insieme* A *in sé è una* relazione d'ordine *se gode delle seguenti proprietà:*

riflessività $\forall\, x \in A \quad x\,\mathcal{R}\,x$

antisimmetria $\forall\, x,\, y \in A \quad [x\,\mathcal{R}\,y \ e\ y\,\mathcal{R}\,x] \Longrightarrow x = y$

transitività $\forall\, x,\, y,\, z \in A \quad [x\,\mathcal{R}\,y \ e\ y\,\mathcal{R}\,z] \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z.$

Inoltre, se una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ gode anche della proprietà

$$\forall\, x,\, y \in A \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{o} \quad y\,\mathcal{R}\,x \qquad \textbf{(dicotomia)}$$

allora la relazione d'ordine si dice *totale* e A viene detto un insieme totalmente ordinato.

Esempio 1.2.3.
- Si verifica facilmente (esercizio!) che la relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine totale;
- la relazione $<$ NON è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$ (verificare!)
- dato un qualsiasi insieme $A \neq \emptyset$, la relazione $\subset$ in 2^A è una relazione d'ordine (esercizio!). In generale, $\subset$ non è una relazione d'ordine totale (ad es., si veda l'insieme A in (1.2.1)).

1.3 Dai numeri naturali ai numeri razionali

Rivediamo brevemente alcuni fatti elementari sui numeri naturali, interi, e razionali.

L'insieme dei numeri naturali.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}\,.$$

- Possiamo rappresentare geometricamente $\mathbb{N}$ su una retta, fissando su di essa un punto origine O, a cui viene associato lo 0, e un secondo punto $U \neq O$, a cui si associa il valore 1. Si considera "verso di percorrenza positivo" della retta il verso di percorrenza da O a U. La lunghezza del segmento OU individua un'unità di misura. Riportando il multiplo n di OU sulla retta nel verso positivo, si individua il punto associato al numero naturale n.
- La relazione $\leq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N}$.
- Ogni numero naturale n ha come divisori 1 e n. Se questi sono i suoi unici divisori, n viene detto *primo*.

L'insieme dei numeri interi. Osserviamo che, dati due numeri naturali $a,\, b \in \mathbb{N}$, l'equazione

$$a + x = b$$

ha una (unica) soluzione $\underline{x \in \mathbb{N}}$ se $b \geq a$. Se, invece, $b < a$, non esiste alcun numero naturale x che verifichi $a + x = b$. Questo fatto motiva l'introduzione dei numeri interi, che si ottengono dai numeri naturali nel seguente modo: ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associamo l'elemento x tale che $x + n = 0$. Denotiamo x con il simbolo $-n$ (x è detto l'*opposto* di n) e definiamo

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -n, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}.$$

- Anche $\mathbb{Z}$ si può rappresentare geometricamente su una retta: riprendendo la retta che rappresenta $\mathbb{N}$, al numero intero $-n$ (con $n \in \mathbb{N}$) viene associato il punto che si ottiene riportando n volte il segmento unitario OU nel verso opposto al verso positivo.
- La relazione $\leq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{Z}$.
- Si ha chiaramente $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

L'insieme dei numeri razionali. Dati due numeri interi a, $b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, l'equazione

$$ax = b$$

ha una soluzione $\underline{x \in \mathbb{Z}}$ se e solo se b è un multiplo intero di a. In caso contrario, non esiste alcun $x \in \mathbb{Z}$ che la verifichi. Per renderla risolvibile per ogni coppia di interi a, $b \in \mathbb{Z}$ (con $a \neq 0$), ampliamo l'insieme $\mathbb{Z}$, e definiamo

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\},$$

con la convenzione di considerare ogni frazione ridotta ai minimi termini, cioè con numeratore e denominatore privi di denominatori comuni. In altri termini, identifichiamo per esempio $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{18}$.

- $\mathbb{Z}$ può essere identificato con il sottoinsieme $\tilde{\mathbb{Z}}$ di $\mathbb{Q}$ dato da
$$\tilde{\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} :\ n = 1 \right\}.$$
Con un lieve abuso di notazione, scriviamo quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Ad ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ è possibile associare un unico numero $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ che verifichi $xy = 1$. Il numero y viene detto *inverso* (o *reciproco*) di x.
- La relazione d'ordine $\leq$ si estende a $\mathbb{Q}$ nel seguente modo:
  - dato un numero razionale $\frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, si ha che
  $$\frac{m}{n} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ e } n \text{ hanno lo stesso segno,}$$
  $$\frac{m}{n} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ e } n \text{ hanno segni diversi.}$$
  - Dati $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ in $\mathbb{Q}$, li ordiniamo nel seguente modo:
    * se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ hanno <u>segno diverso</u>, è immediato confrontarli. Avremo infatti
    $$\frac{m}{n} \leq 0 \leq \frac{p}{q} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{p}{q} \leq 0 \leq \frac{m}{n}.$$
    * se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono <u>entrambi positivi</u>, possiamo supporre[9] che $m \geq 0$ e $n > 0$ e $p \geq 0$ e $q > 0$. Allora abbiamo che
    $$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad mq \leq pn.$$

[9] in effetti,
$$\frac{3}{5} = \frac{+3}{+5} = \frac{-3}{-5}.$$

∗ se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono entrambi negativi, allora ci "appoggiamo" alla relazione d'ordine definita nel caso di numeri razionali positivi:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{p}{q} \leq -\frac{m}{n}.$$

- **Rappresentazione decimale dei numeri razionali.** Ogni numero $x \in \mathbb{Q}$ può essere espresso in base 10 nella forma

$$\begin{aligned} x = \pm\Big(&c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0 \\ &+ c_{-1}10^{-1} + c_{-2}10^{-2} + \ldots\Big) \qquad \text{con le cifre } c_i,\ c_{-j} \in \{0,1,\ldots,9\}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Le cifre c_i, c_{-j} vengono dette *cifre decimali*. Equivalentemente, si può scrivere

$$x = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \ldots \tag{1.3.2}$$

Questa è, peraltro, la rappresentazione dei numeri fatta da un calcolatore. Chiamiamo la (1.3.1)/(1.3.2) *rappresentazione* (o *allineamento*) *decimale* del numero x. Osserviamo che, mentre il numero di cifre a sinistra della virgola in (1.3.2) è finito, in generale vi possono essere infinite cifre decimali a destra della virgola.

Si dice che un allineamento decimale è *finito* se vi è un numero finito di cifre a destra della virgola. Ad esempio,

$$\begin{aligned} \frac{18723}{100} &= 187,23 = 1\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 7 + 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2}, \\ -\frac{1}{6} &= -0,166666666\ldots = -\big(0 + 1\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2} + 6\cdot 10^{-3} + 6\cdot 10^{-4} \\ &\qquad +6\cdot 10^{-5} + 6\cdot 10^{-6} + 6\cdot 10^{-7} + 6\cdot 10^{-8}\ldots\big). \end{aligned}$$

Se, in un allineamento decimale (non finito), da una certa posizione decimale in poi un blocco di cifre si ripete indefinitamente, allora l'allineamento viene detto periodico e tale blocco è detto *periodo*[10]. Ad esempio, $-1/6$ ha un allineamento decimale periodico di periodo 6.

Si può dimostrare che ad ogni numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ viene associato uno e un solo allineamento decimale, finito o periodico. Chiaramente, i numeri interi si identificano con gli allineamenti decimali in cui le cifre a destra della virgola sono tutte uguali a zero.

Dai numeri razionali ai numeri reali. Fu scoperto dai matematici greci che esistono segmenti la cui lunghezza non può essere espressa mediante numeri razionali. Ad esempio, la lunghezza x della diagonale del quadrato di lato 1, che, per il teorema di Pitagora, verifica

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Teorema 1.3.1. *Non esiste un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.*

Dimostrazione. Per assurdo esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Rappresentiamo x nella forma

$$x = \frac{m}{n} \qquad \text{con } m,\ n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0$$

[10]vengono considerati propri i periodi diversi da 9: ad esempio, il numero $0,99999999\ldots$ viene identificato con 1.

(si intende la frazione ridotta ai minimi termini, cioè m e n privi di divisori comuni). Poiché $x^2 = 2$, segue che

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.3.3}$$

Allora m^2 è un numero pari. Ne consegue che m è un numero pari[11]. Quindi m è della forma $m = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, e dalla (1.3.3) segue che $4k^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2k^2$. Ma allora n^2 è pari, quindi anche n è pari. Abbiamo pertanto concluso che sia m sia n sono pari, cioè divisibili per 2. Ma questo è in contraddizione con il fatto che né m né n abbiano divisori comuni. Assurdo. $\square$

Il Teorema 1.3.1 suggerisce l'esistenza di un'estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$, in cui l'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione. Si tratta dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 1.3.2. *Chiamiamo* numero reale *un (qualsiasi) allineamento decimale, e denotiamo con* $\mathbb{R}$ *l'insieme dei numeri reali.*

Chiaramente i numeri razionali (che, ribadiamo, si identificano con gli allineamenti decimali finiti o periodici) sono un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si ha dunque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Chiamiamo *numero irrazionale* un numero reale non razionale (rappresentato da un allineamento decimale non finito né periodico). L'insieme dei numeri irrazionali si denota ovviamente con il simbolo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ad esempio, sono numeri irrazionali $\pm\sqrt{2}$ (cioè le radici di 2), π, la *costante di Nepero* e (qui approssimata con 55 cifre decimali)

$$\mathrm{e} = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749\ldots\ldots\ldots$$

1.4 L'insieme dei numeri reali

Le proprietà dell'insieme dei numeri reali che presentiamo in questa sezione sono fondamentali per lo sviluppo del calcolo differenziale e integrale, e vanno quindi ben comprese e assimilate.

1.4.1 La relazione d'ordine su $\mathbb{R}$

La relazione d'ordine $\leq$ si estende anche a $\mathbb{R}$ nel seguente modo: siano dati due numeri reali x e y, rappresentati dagli allineamenti decimali

$$x = \pm\left(c_k c_{k-1}\ldots c_1 c_0, c_{-1}c_{-2}\ldots\right) \qquad\qquad y = \pm\left(c'_k c'_{k-1}\ldots c'_1 c'_0, c'_{-1}c'_{-2}\ldots\right).$$

Poiché, in entrambe le rappresentazioni, le cifre a sinistra della virgola rappresentano <u>numeri naturali</u>, per semplicità chiamiamo $n := c_k c_{k-1}\ldots c_1 c_0$ e $m := c'_k c'_{k-1}\ldots c'_1 c'_0$. Se x e y hanno segno diverso, è immediato confrontarli:

$$\begin{aligned}
&\left(x = +n, c_{-1}c_{-2}\ldots, \qquad y = -m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots\right) \;\Rightarrow\; y < 0 < x,\\
&\left(x = -n, c_{-1}c_{-2}\ldots, \qquad y = +m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots\right) \;\Rightarrow\; x < 0 < y,
\end{aligned}$$

e, inoltre, se x e y sono entrambi negativi (cioè $x = -n, c_{-1}c_{-2}\ldots$ e $y = -m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots$), si ha che

$$x < y \;\Leftrightarrow\; -y < -x\,.$$

[11] in effetti, se m fosse dispari (cioè della forma $m = 2k+1$), allora anche $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sarebbe dispari.

Possiamo quindi ridurci al caso in cui x e y sono entrambi non negativi, cioè della forma

$$x = +n, c_{-1}c_{-2}\dots \qquad\qquad y = +m, c'_{-1}c'_{-2}\dots .$$

Per confrontarli, basta confrontare le prime cifre decimali diverse dei due numeri. Si ha:

$$n < m \quad \Rightarrow x < y \qquad n > m \quad \Rightarrow x > y\,.$$

Se $n = m$, confrontiamo allora le prime cifre decimali a destra della virgola:

$$\begin{cases} c_{-1} < c'_{-1} \;\Rightarrow\; x < y, \\ c_{-1} > c'_{-1} \;\Rightarrow\; x > y, \end{cases}$$

mentre, se $c_{-1} = c'_{-1}$, sarà necessario confrontare le seconde cifre decimali a destra della virgola, con la stessa regola:

$$\begin{cases} c_{-2} < c'_{-2} \;\Rightarrow\; x < y, \\ c_{-2} > c'_{-2} \;\Rightarrow\; x > y, \end{cases}$$

mentre, se $c_{-2} = c'_{-2}$, sarà necessario confrontare le terze cifre decimali a destra della virgola, con la stessa regola, e così via......

Notazione. Disponendo delle relazioni $\leq$ e $<$ su $\mathbb{R}$, diremo d'ora in poi che un numero $x \in \mathbb{R}$ è positivo se $0 \leq x$, cioè $x \geq 0$; strettamente positivo se $0 < x$, cioè $x > 0$; negativo se $x \leq 0$; strettamente negativo se $x < 0$. Definiamo

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\}\,, \qquad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq 0\}\,.$$

Proprietà della relazione d'ordine. Ricordiamo le principali proprietà della relazione $\leq$:

$$\begin{cases} x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z, \\ x \leq y, \; z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz, \\ x \leq y, \; z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \geq yz \end{cases} \qquad \forall\, x, \, y, \, z \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.1}$$

Le stesse proprietà valgono per la relazione $<$. Inoltre,

$$\forall\, x, \, y \in \mathbb{R} \qquad 0 < x < y \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0\,.$$

1.4.2 Il modulo di un numero reale

Definizione 1.4.1. *Dato $x \in \mathbb{R}$, il* modulo *(o* valore assoluto*) di x è il numero reale* **positivo** *definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \,.$$

Proprietà del valore assoluto. Si ha $\forall\, a, \, b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geq 0 \text{ e } |a| = 0 \text{ se e solo se } a = 0; \tag{1.4.2a}$$

$$|a| = |-a|; \tag{1.4.2b}$$

$$|ab| = |a||b|; \tag{1.4.2c}$$

$$|a - b| \leq |a| + |b| \text{ e } |a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.4.2d}$$

Disuguaglianze con il valore assoluto. Ricordiamo che, dati a, $b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$,

$$|x-b| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x-b \leq a$$
$$|x-b| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x-b \geq a \text{ o } x-b \leq -a$$

Infine, ricordiamo il seguente fatto

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.3}$$

In generale,

$$\text{se } n \text{ è pari} \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.4}$$

1.4.3 Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Intuitivamente, questo significa che non solo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ma anche che i numeri razionali sono "fitti" in $\mathbb{R}$. Più precisamente, ogni numero $x \in \mathbb{R}$ può essere approssimato arbitrariamente bene da un numero razionale: in altri termini, comunque si fissi una tolleranza (cioè, un margine d'errore) $t > 0$, esiste un numero $y \in \mathbb{Q}$ tale che $-t < x - y < t$ (cioè, y dista da x meno di t). In simboli:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0\ \ \exists\, y \in \mathbb{Q}:\ \ |x-y| < t\,. \tag{1.4.5}$$

Se ne deduce che

$$\forall \text{coppia di numeri reali } x_1 < x_2 \text{ esistono infiniti numeri } q \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x_1 < q < x_2. \tag{1.4.6}$$

Si può dimostrare che anche l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso (nel senso appena specificato) in $\mathbb{R}$.

1.4.4 L'assioma di completezza

Per formalizzare l'assioma (o proprietà) di completezza di $\mathbb{R}$, introduciamo alcune definizioni.

Definizione 1.4.2 (Maggiorante). *Consideriamo un insieme $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$.*

- *Si dice che un numero reale $M \in \mathbb{R}$ è un* maggiorante *per A se*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leq M\,.$$

- *Se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto, si dice che A è* limitato superiormente. *Se A è privo di maggioranti, si dice che A è* illimitato superiormente.

Analogamente,

Definizione 1.4.3 (Minorante). *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$.*

- *Si dice che un numero reale $m \in \mathbb{R}$ è un* minorante *per A se*

$$\forall\, x \in A, \quad x \geq m\,.$$

- *Se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto, si dice che A è* limitato inferiormente. *Se A è privo di minoranti, si dice che A è* illimitato inferiormente.

Definizione 1.4.4. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$. Diciamo che A è limitato se esso è sia superiormente, sia inferiormente limitato.*

Esempio 1.4.5.

1. Si consideri l'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x < 1\} \ .$$
A è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di A è: $\mathcal{M}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. A è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di A è: $m(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$.

2. Si consideri l'insieme
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \ .$$
B è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di B è: $\mathcal{M}(B) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. B è illimitato inferiormente.

3. Si consideri l'insieme
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{2^n} \ n \in N\right\} \ .$$
Si noti che C ha infiniti elementi e che $0 \notin C$. C è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di C è: $\mathcal{M}(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. C è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di C è: $m(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

4. Si consideri l'insieme
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 2\right\} \ .$$
Si noti che D è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$. D è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di D è: $\mathcal{M}(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$. D è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di D è: $m(D) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\}$.

Definizione di estremo superiore di un insieme.

Definizione 1.4.6. *Sia A un insieme non vuoto. Diciamo che un numero reale M^* è* l'estremo superiore *di A se valgono (contemporaneamente) le seguenti condizioni:*

1. *M^* è un maggiorante per A;*
2. *$M^* \leq M$ per ogni maggiorante M di A*[12].

Useremo la notazione $M^* = \sup(A)$.

Unicità dell'estremo superiore. Si noti che, nella definizione di *estremo superiore*, è stato usato l'articolo determinativo "il". Questo è dovuto al fatto che, mentre un insieme può avere in generale più di un maggiorante (anche infiniti maggioranti, si veda l'Esempio 1.4.5), **l'estremo superiore di un insieme, se esiste, è unico**. Per dimostrare ciò, supponiamo per assurdo che un dato insieme A possieda due estremi superiori M_1^* e M_2^*, con $M_1^* \neq M_2^*$. Per definizione di sup, si deve avere $M_1^* \leq M_2^*$ (in quanto M_2^* è un maggiorante e M_1^* il più "piccolo" fra i maggioranti). Ragionando allo stesso modo, si ha $M_2^* \leq M_1^*$. Ma allora $M_1^* = M_2^*$, in contraddizione con quanto supposto.

Si noti che, nella definizione di *estremo superiore*, non viene richiesto che M^* appartenga all'insieme A. Quando ciò accade, M^* viene detto *massimo* di A.

Definizione 1.4.7. *Sia A un insieme non vuoto e sia $M^* = \sup(A)$. Se $M^* \in A$, allora diciamo che M^* è il* massimo *di A e scriviamo $M^* = \max(A)$.*

[12] cioè M^* è "il più piccolo" fra i maggioranti di A.

Definizione di estremo inferiore di un insieme.

Definizione 1.4.8. *Sia A un insieme non vuoto. Diciamo che un numero reale m_* è l'*estremo inferiore *di A se valgono (contemporaneamente) le seguenti condizioni:*

1. *m_* è un minorante per A;*
2. *$m_* \geq m$ per ogni minorante m di A* [13].

Useremo la notazione $m_* = \inf(A)$.

Ragionando come per il sup, si dimostra che **l'inf di un dato insieme, se esiste, è unico**.

Definizione 1.4.9. *Sia A un insieme non vuoto e sia $m_* = \inf(A)$. Se $m_* \in A$, allora diciamo che m_* è il* minimo *di A e scriviamo $m_* = \min(A)$.*

Esempio 1.4.10.

1. Si consideri l'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x < 1\} \ .$$
Si ha $\inf(A) = -1 \in A$ e quindi $\inf(A) = \min(A) = -1$. Inoltre, $\sup(A) = 1 \notin A$: quindi 1 non è il massimo di A. Siccome $\sup A$ è l'unico candidato a essere il massimo di A, concludiamo che l'insieme A non ha massimo.

2. Si consideri l'insieme
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \ .$$
Si ha $\sup(B) = \max(B) = 1$.

3. Si consideri l'insieme
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{2^n} \ n \in N\right\} \ .$$
Si ha $\sup(C) = \max(C) = 1$. D'altronde, $\inf(C) = 0 \notin C$, quindi C non ha minimo.

4. Si consideri l'insieme
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 2\right\} \ .$$
Si ha $\sup(D) = \max(D) = \sqrt{2}$ e $\inf(D) = \min(D) = -\sqrt{2}$.

Questi esempi sembrano suggerire che, non appena un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è superiormente (rispettivamente, inferiormente) limitato, esso ammette sup **in** $\mathbb{R}$ (risp., inf **in** $\mathbb{R}$). Questo è vero **nell'insieme ambiente** $\mathbb{R}$, ed è proprio quanto viene affermato da[14]

Assioma di completezza per l'insieme dei numeri reali. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se A è superiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un maggiorante), allora A ha l'estremo superiore **in** $\mathbb{R}$.*

*Analogamente, se A è inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un minorante), allora A ha l'estremo inferiore **in** $\mathbb{R}$.*

Si noti che l'assioma di completezza **NON** afferma che ogni insieme superiormente limitato in $\mathbb{R}$ ha il massimo (o che ogni insieme inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ ha il minimo): l'esistenza del massimo (del minimo, risp.) dipende dal fatto che il sup appartenga all'insieme (che l'inf appartenga all'insieme).

[13] cioè m_* è "il più grande" fra i minoranti di A.

[14] *Assioma* significa "proprietà che si accetta per vera, senza dimostrazione".

Osservazione 1.4.11. Osserviamo che l'insieme $\mathbb{Q}$ non gode della proprietà enunciata dall'assioma di completezza: in altri termini, esistono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ superiormente limitati (rispettivamente, inferiormente limitati) che non ammettono estremo superiore in $\mathbb{Q}$ (risp., estremo inferiore in $\mathbb{Q}$). Infatti, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leq 2\right\}$$

e dimostriamo che esso, pur avendo maggioranti in $\mathbb{Q}$ (l'insieme dei maggioranti in $\mathbb{Q}$ per $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$ è $\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq \sqrt{2}\}$, quindi per esempio i numeri $\frac{3}{2}$ e 2 sono maggioranti, in $\mathbb{Q}$, per $\mathcal{H}$), non ha sup in $\mathbb{Q}$[15].

Notiamo infatti che $\mathcal{H}$, essendo un sottoinsieme (superiormente limitato) di $\mathbb{R}$, ammette sup in $\mathbb{R}$. Chiamiamo $S := \sup_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$. È immediato osservare che $S = \sqrt{2}$. Ora, per assurdo esista l'estremo superiore $q \in \mathbb{Q}$ di $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$ (quindi q è il "più piccolo" fra tutti i maggioranti di $\mathcal{H}$ che sono numeri razionali). Necessariamente deve essere $q \neq \sqrt{2}$. Inoltre, non è difficile osservare che deve essere $q > \sqrt{2}$. Ma allora, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (si ricordi la (1.4.6)) esistono infiniti $y \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{2} < y < q$. Si noti che tali y sono dei maggioranti razionali per l'insieme $\mathcal{H}$, e che essi sono strettamente minori di q. Questo contraddice il fatto che q sia l'estremo superiore di $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$. Assurdo.

Ne concludiamo che $\mathcal{H}$ non ammette sup in $\mathbb{Q}$.

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathbb{R}$ si possono rappresentare geometricamente come punti di una retta.

Per fare ciò, si fissa un punto O (detto origine) sulla retta, al quale viene associato il numero 0, e un altro punto U. Si conviene che il verso di percorrenza della retta da O a U sia considerato il *verso positivo*, e il verso opposto sia preso come verso negativo. In questo modo, vengono individuate sulla retta:

- una semiretta positiva (la semiretta che contiene U),
- una semiretta negativa.

Per convenzione, la lunghezza del segmento OU viene presa come *unità di misura.*

Dopodiché, dato un punto P sulla retta, a esso viene associato un unico numero reale x in questo modo: si considera la lunghezza $\overline{OP}$ del segmento OP e si definisce

$$x := \begin{cases} \overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta positiva,} \\ -\overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta negativa} \end{cases} .$$

Il numero reale x viene detto *ascissa* del punto P. Viceversa, fissato $x \in \mathbb{R}$, a esso viene associato uno e un solo punto P sulla retta in questo modo:

$$\begin{cases} x > 0 & \leftrightarrow & P \text{ nella semiretta positiva tale che } \overline{OP} = x, \\ x < 0 & \leftrightarrow & P \text{ nella semiretta negativa tale che } \overline{OP} = -x, \\ x = 0 & \leftrightarrow & O \end{cases} .$$

D'ora in poi, useremo il termine *retta reale* come sinonimo dell'insieme dei numeri reali.

Interpretazione geometrica del modulo. Ricordando che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ è univocamente associato un punto P sulla retta reale, il numero $|x|$ è la distanza di P dall'origine O.

Più in generale, dati $x, y \in \mathbb{R}$, il numero $|x - y|$ coincide con la distanza fra i corrispondenti punti P_x e P_y sulla retta reale.

[15]**Esercizio!**: ragionando allo stesso modo, dimostrare che $\mathcal{H}$ non ha inf in $\mathbb{Q}$, pur avendo minoranti in $\mathbb{Q}$.

1.4.5 La nozione di intervallo e la retta reale estesa

Definizione 1.4.12. *Un sottoinsieme $I \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}$ viene detto* intervallo *se, presi due qualunque suoi punti $x < y$, tutti i punti compresi fra x e y appartengono ancora ad I.*

Ad esempio, l'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} \quad \text{è un intervallo,}$$
mentre l'insieme
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 0\} \quad \text{NON è un intervallo.}$$

Tipologia degli intervalli limitati. Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Distinguiamo quattro tipi di intervalli *limitati* (nel senso della Definizione 1.4.4):

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ *intervallo aperto*,
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ *intervallo semiaperto a destra*,
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ *intervallo semiaperto a sinistra*,
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ *intervallo chiuso.*

Dato un intervallo I limitato, si definisce ampiezza dell'intervallo il numero $\sup(I) - \inf(I)$.

Definizione 1.4.13 (Intorno di un punto)**.** *Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, chiamiamo* intorno *aperto (rispettivamente, chiuso) di x_0 di raggio r l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ (risp., l'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$). Denoteremo l'intorno aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ anche con il simbolo $I(x_0, r)$.*

N.B.: si ha che
$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < r\} \ .$$

La retta reale estesa. Estendiamo la retta reale $\mathbb{R}$ con i simboli $+\infty$ e $-\infty$, **che non sono da considerarsi numeri reali!!!!** In effetti, osserviamo che
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ \exists\, y \in \mathbb{R} : \ \ y > x$$
in altri termini, non esistono maggioranti reali per l'insieme $\mathbb{R}$. Analogamente,
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ \exists\, y \in \mathbb{R} : \ \ y < x$$
cioè l'insieme $\mathbb{R}$ non ammette minoranti (in $\mathbb{R}$). Li introduciamo quindi con la seguente

Definizione 1.4.14. *Definiamo il simbolo $+\infty$ mediante la disuguaglianza*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < +\infty\,. \tag{1.4.7}$$
Definiamo il simbolo $-\infty$ mediante la disuguaglianza
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x > -\infty\,. \tag{1.4.8}$$
Chiamiamo retta reale estesa *l'insieme $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Osserviamo che $\overline{\mathbb{R}}$ eredita da $\mathbb{R}$ la relazione d'ordine, completata dalle disuguaglianze (1.4.7)–(1.4.8). Quindi $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato, e si ha che

- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty$ è un maggiorante per A;
- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $-\infty$ è un minorante per A.

Teorema 1.4.15. *Per ogni* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, *esistono* $\sup(A), \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.
In particolare, se $A \subset \mathbb{R}$, *si ha che*

1. $\sup(A) = +\infty$ *se e solo se* A non *è superiormente limitato;*
2. $\inf(A) = -\infty$ *se e solo se* A non *è inferiormente limitato;*
3. $\sup(\emptyset) = -\infty$ *e* $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo che $\sup(\emptyset) = -\infty$ (con un ragionamento analogo (**esercizio!**) si ottiene anche che $\inf(\emptyset) = +\infty$). Innanzitutto osserviamo che

$$\text{l'insieme dei maggioranti di } \emptyset \text{ è } \overline{\mathbb{R}}. \tag{1.4.9}$$

In effetti, proviamo a negare la (1.4.9): $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}$ che non è un maggiorante per $\emptyset$, cioè $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\exists x \in \emptyset$ verificante $x > y$. Ma questa affermazione è palesemente falsa, in quanto contiene il termine $\exists x \in \emptyset$. Allora (1.4.9) è vera. Tenendo conto della definizione di sup, concludiamo che $\sup(\emptyset) = -\infty$. □

Intervalli illimitati. Possiamo ora introdurre la notazione per gli intervalli illimitati. Sia $a \in \mathbb{R}$. Distinguiamo quattro tipi di intervalli:

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *semiretta aperta a sinistra,*
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ *semiretta aperta a destra,*
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *semiretta chiusa a sinistra,*
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ *semiretta chiusa a destra.*

Il simbolo $(-\infty, +\infty)$ è un modo alternativo di denotare $\mathbb{R}$, mentre $[-\infty, +\infty]$ denota la retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$.