Dispense di Matematica–Analisi Matematica

Riccarda Rossi

Corso di Laurea in Disegno Industriale

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2009/2010

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Capitolo 2

Prime proprietà delle funzioni

Capitolo 3

Limiti

Capitolo 4

Continuità

Capitolo 5

Derivate

5.1 Introduzione

Il concetto di derivata è intrinsecamente legato a quello di limite. Entra naturalmente in gioco nella **modellizzazione matematica** di tutti quei problemi in cui interviene lo studio della variazione di una grandezza rispetto ad un'altra.

5.2 Definizione di derivata

Prima di dare la definizione di derivata, precisiamo che, d'ora in poi, considereremo solo funzioni definite su un generico intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Definizione 5.2.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto. Un punto $x_0 \in I$ si dice* interno ad I *se esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Se x_0 non è un punto interno ad I, si dice* esterno.

Per esempio, se $I = (a, b]$, tutti i punti in (a, b) sono interni, mentre il punto $x_0 = b$ è esterno. Se $I = [a, b]$, allora i punti a e b sono esterni, e tutti i punti in (a, b) sono interni. Se $I = (a, +\infty)$, tutti i punti di I sono interni a I, mentre se $I = (-\infty, a]$, sono interni a I i punti in $(-\infty, a)$, mentre il punto a è esterno a I.

Definizione 5.2.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che x_0 sia un punto interno ad I. Dato $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tale che $x_0 + h \in I$*[1]*, chiamiamo* rapporto incrementale di f relativo al punto x_0 e all'incremento h *il quoziente*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5.2.1}$$

Se esiste (finito o no) il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{5.2.2}$$

[1] e questo è verificato per $|h|$ sufficientemente piccolo, si veda l'Osservazione 5.2.3.

tale limite si chiama derivata di f nel punto x_0 *e si denota con il simbolo* $f'(x_0)$.

Inoltre, se il limite (5.2.2) *(esiste ed) è finito, la funzione* f *si dice* derivabile nel punto x_0.

Osservazione 5.2.3. • È chiaro dalla definizione (5.2.1) che, per poter considerare il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale di f relativo a x_0, è necessario supporre che x_0 sia un punto interno, cioè che esista $r > 0$ con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Allora il quoziente (5.2.1) è ben definito per ogni $h \in \mathbb{R}$ verificante $0 < |h| < r$: in effetti, quest'ultima disuguaglianza assicura proprio che $x_0 + h$ appartiene all'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$, il quale è un sottoinsieme del dominio I.

• La derivata di f in x_0 (punto interno) viene anche definita come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,. \tag{5.2.3}$$

Ovviamente, se il limite (5.2.3) esiste, esso coincide con (5.2.2), pur di effettuare il cambiamento di variabile $h = x - x_0$, quindi la definizione (5.2.3) è del tutto equivalente alla (5.2.2). Notazioni alternative a $f'(x_0)$ sono: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0}|_{x=x_0}$, e $Df(x_0)$.

Definizione 5.2.4. *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \subset I$ *un sottointervallo di* I. *Supponiamo che per ogni* $x \in J$ f *sia derivabile in* x. *Allora si dice che* f è derivabile su J. *Chiamiamo* funzione derivata *la funzione*

$$f' : J \to \mathbb{R} \text{ definita da } \quad x \in J \mapsto f'(x)\,.$$

Significato geometrico della nozione di derivata. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno a I. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora,

$$\begin{gathered} f'(x_0) \textbf{ è il coefficiente angolare della} \\ \textbf{retta tangente al grafico di } f \textbf{ nel punto } (x_0, f(x_0)). \end{gathered} \tag{5.2.4}$$

La (5.2.4) è in accordo con l'interpretazione della retta tangente come "retta limite" delle rette secanti graf(f), passanti per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, al tendere di h a zero. In effetti, per ogni $h \neq 0$ il coefficiente angolare della retta secante graf(f) e passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è dato da

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

cioè è il rapporto incrementale di f relativo a x_0 e all'incremento h. Al tendere di h a zero, il limite di m_h sarà il coefficiente angolare della retta tangente a graf(f) nel punto $(x_0, f(x_0))$. Ma il limite di m_h, quando esiste, è proprio la derivata di f in x_0, il che giustifica la (5.2.4).

Ne risulta che l'equazione della retta tangente a f in x_0[2] è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,. \tag{5.2.5}$$

Esempio 5.2.5. 1. Per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ nel punto $(-2, -8)$, calcoliamo

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h-2)^3 - (-2)^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 - 3h^2 + 12h}{h} = 12\,.$$

Allora, otteniamo $y = 12(x + 2) - 8$.

[2]che si ottiene imponendo che tale retta abbia coefficiente angolare $f'(x_0)$ e passi per il punto $(x_0, f(x_0))$.

2. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = e^x$ nel punto $(0, f(0)) = (0, 1)$ è
$$y = x + 1\,.$$
In effetti,
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$
per un ben noto limite notevole.

Infine, ricordiamo che, data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno a I, se esiste $f'(x_0) = \pm\infty$, allora la retta tangente a $\mathrm{graf}(f)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta verticale di equazione $x = x_0$, e si dice che $(x_0, f(x_0))$ *è un punto a tangente verticale per* $\mathrm{graf}(f)$.

Derivate destre e sinistre. Le stesse motivazioni addotte per limiti unilateri ci portano a introdurre due nozioni di "derivate unilatere", definite come limiti unilateri del rapporto incrementale di f relativo a un dato punto $x_0 \in I$.

Definizione 5.2.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.*

- *Supponiamo che $x_0 \in I$ sia interno a I, o che x_0 sia l'estremo sinistro di I. Se il limite del rapporto incrementale di f, relativo a x_0 e all'incremento h, al tendere di h a 0^+:*
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
esiste, finito o no, allora tale limite viene detto derivata destra di f in x_0 *e denotato con il simbolo $f'_+(x_0)$.*

- *Supponiamo che $x_0 \in I$ sia interno a I, o che x_0 sia l'estremo destro di I. Se il limite del rapporto incrementale di f, relativo a x_0 e all'incremento h, al tendere di h a 0^-:*
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
esiste, finito o no, allora tale limite viene detto derivata sinistra di f in x_0 *e denotato con il simbolo $f'_-(x_0)$.*

In effetti, la nozione di derivata destra (rispettivamente, di derivata sinistra) è l'unica nozione di derivata che si possa dare in x_0, se x_0 è l'estremo sinistro (rispettivamente, destro) dell'intervallo di definizione. Inoltre, come vedremo per esempio nel calcolo della derivata della funzione modulo, anche in un punto interno all'intervallo di definizione può essere significativo distinguere la derivata destra dalla derivata sinistra: ciò può infatti fornire delle informazioni più precise sul comportamento della funzione in tale punto.

Vale il seguente risultato, che è una conseguenza immediata delle Definizioni 5.2.2 e 5.2.6, e inoltre del Teorema 3.2.13 sui rapporti fra limite e limite destro/sinistro.

Teorema 5.2.7. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ un punto interno a I. Allora,*
$$\exists\, f'(x_0) \ \text{ finita o infinita } \ \Leftrightarrow \ \exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \text{ finita o infinita}\,.$$
In tal caso, si ha $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Grazie alle nozioni di derivata destra/sinistra, possiamo estendere ora la definizione di derivabilità di una funzione al caso in cui essa sia definita su un intervallo chiuso e limitato.

Definizione 5.2.8. *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice* derivabile su $[a, b]$ *se:*

- *per ogni* $x \in (a, b)$ *esiste finita la derivata* $f'(x)$*,*
- *esistono finite le derivate unilatere* $f'_+(a)$ *e* $f'_-(b)$*.*

5.2.1 Calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari

Diamo ora qualche esempio di calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari tramite la Definizione 5.2.2.

Derivata delle funzione costante. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante

$$f(x) \equiv c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ha che

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = 0. \tag{5.2.6}$$

Quindi, la funzione derivata f' è definita su $\mathbb{R}$ ed è la funzione identicamente nulla. Per verificare (5.2.6), osserviamo che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0\,.$$

Tenendo conto dell'interpretazione geometrica della nozione di derivata, la formula (5.2.6) ha un chiaro significato: in effetti, nel caso della funzione costante, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente a graf(f) (che è la retta $y = c$) nel punto $(x, f(x))$ è chiaramente la retta $y = c$ stessa.

Derivata della funzione lineare. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, e consideriamo la funzione *lineare* $f(x) := ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = a. \tag{5.2.7}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a\,. \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'interpretazione geometrica della nozione di derivata, la formula (5.2.7) ha un chiaro significato: in effetti, nel caso della funzione lineare, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente a graf(f) (che è la retta $y = ax + b$) nel punto $(x, f(x))$ è chiaramente la retta $y = ax + b$ stessa.

Derivata della funzione modulo. Sia $f(x) := |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\nexists\, f'(0)\,, \qquad \text{mentre } f \text{ è derivabile su } \mathbb{R}\setminus\{0\}, \text{ e si ha}$$

$$f'(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \tag{5.2.8}$$

In effetti, tenendo conto della definizione della funzione modulo $|\cdot|$

$$\forall\, x_0 > 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,,$$

ove abbiamo usato che, per h sufficientemente piccolo, se $x_0 > 0$ anche il numero $x_0 + h$ è strettamente positivo. Ragionando allo stesso modo si verifica che per ogni $x_0 < 0$ si ha $f'(x_0) = -1$: in effetti,

$$\forall\, x_0 < 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x_0+h)-x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1\,,$$

ove abbiamo usato che, per h sufficientemente piccolo, se $x_0 < 0$ anche il numero $x_0 + h$ è strettamente negativo.

Osserviamo ora che

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1\,.$$

Analogamente, si ha

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1\,.$$

Grazie al Teorema 5.2.7, concludiamo che, essendo derivata destra e derivata sinistra diverse,

$$\nexists\, f'(0)\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = x^2$. Sia $f(x) := x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = 2x. \tag{5.2.9}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} = 2x_0\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Sia $f(x) := \sqrt{x}$ per ogni $x \in [0,+\infty)$. Allora

$$f'_+(0) = +\infty\,, \quad \text{e } \forall\, x \in (0,+\infty)\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{5.2.10}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}\forall\, x_0 > 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,,\end{aligned}$$

mentre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Sia $f(x) := \frac{1}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \tag{5.2.11}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 - (x_0+h)}{h(x_0+h)x_0} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}\,.$$

Derivata delle funzioni potenza. In generale, si può dimostrare che, data la generica funzione potenza (a esponente reale) $f(x) = x^r$, con $r \in \mathbb{R}$ e dominio D_f, allora

$$\begin{aligned} &f(x) = x^r \text{ è derivabile, con derivata} \\ &f'(x) = rx^{r-1} \quad \forall\, x \in D_f \text{ tale che } x^{r-1} \text{ è ben definita.} \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Per esempio, si ha che la funzione $f(x) := x^{4/3}$, con $D_f = \mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (si noti che $\mathbb{R}$ è il dominio naturale di f'). Analogamente, la funzione $f(x) := x^{1/2}$, di dominio $[0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$ con derivata $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ (si noti che $(0, +\infty)$ è il dominio naturale di f').

Derivate delle funzioni trigonometriche. Sia $f(x) := \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \cos(x). \tag{5.2.13}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1) + \cos(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\,, \end{aligned}$$

ove la prima uguaglianza segue dalle formule di addizione per il seno, la seconda e la terza da calcoli elementari, e infine la quarta dai limiti notevoli che danno, rispettivamente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2}\, h = 0\,.$$

Sia $f(x) := \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = -\sin(x). \tag{5.2.14}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h) - 1) - \sin(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x_0)\,. \end{aligned}$$

Derivata della funzione $f(x) = e^x$. Sia $f(x) := e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = e^x. \tag{5.2.15}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}\,,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} == 1$.

Derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$. Sia $f(x) := \ln(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Allora

$$\forall\, x \in (0, +\infty)\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \frac{1}{x}. \tag{5.2.16}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}\forall\, x_0 \in (0, +\infty) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\,,\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ e dalla sostituzione $x = h/x_0$.

5.2.2 Derivabilità e continuità

Proposizione 5.2.9. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, o, equivalentemente, che $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. A questo scopo, osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0\,,$$

e l'ultima uguaglianza segue dalla formula per il limite del prodotto di due funzioni: si noti che, in questo caso, non si incappa in una forma indeterminata $\infty \cdot 0$, in quanto la funzione $h(x) := (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ tende al limite finito $f'(x_0)$ per $x \to x_0$. □

Osservazione 5.2.10.

- Il viceversa di questo teorema non vale. In altri termini, è falso che, se una funzione è continua in un punto x_0, essa sia anche ivi derivabile (e neppure è vero che la continuità in un punto implica l'esistenza della derivata in tale punto): basti pensare alla funzione $f(x) = |x|$, che è continua in $x_0 = 0$ ma non ammette ivi derivata.
- Questo risultato si estende anche al caso in cui
  1. f sia derivabile solo a destra in x_0, cioè si abbia per ipotesi solo che esiste finita la derivata destra $f'_+(x_0)$: allora, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 5.2.9, si conclude che f è continua a destra in x_0;
  2. f sia derivabile solo a sinistra in x_0, cioè si abbia per ipotesi solo che esiste finita la derivata sinistra $f'_-(x_0)$: allora, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 5.2.9, si conclude che f è continua a sinistra in x_0.

5.3 Alcuni risultati sulle derivate

5.3.1 Derivate e operazioni su funzioni

I calcoli precedentemente sviluppati mostrano che la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale non è lo strumento più agevole per il calcolo delle derivate. Come nel caso della teoria dei limiti, anche per il calcolo delle derivate si dispone di alcuni fondamentali risultati sul legame fra l'operazione di derivazione e la somma/prodotto/quoziente/composizione/inversione di funzioni.

L'algebra delle derivate.

Teorema 5.3.1. *Siano f, $g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ un punto interno ad I, e $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } x_0.$$

Allora,

- *la funzione somma $f + g$ è derivabile in x_0, e vale*
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{5.3.1}$$
- *la funzione cf è derivabile in x_0, e vale*
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0); \tag{5.3.2}$$
- *la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile in x_0, e vale*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0); \tag{5.3.3}$$
- *se $g(x_0) \neq 0$, la funzione quoziente $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e vale*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{5.3.4}$$

Osservazione 5.3.2.
- Notiamo che ciascuna parte della tesi si articola a sua volta in due punti: il primo è un risultato di derivabilità della funzione somma/prodotto/quoziente, mentre il secondo è una formula per il calcolo della derivata.
- Le formule (5.3.1)–(5.3.4), che non dimostriamo, possono essere ricavate usando direttamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (per (5.3.1)–(5.3.2)), eventualmente operando anche alcune opportune manipolazioni algebriche (per (5.3.3)–(5.3.4)).

Esempio 5.3.3.
1. La funzione $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$, con dominio $D_f = (0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$, e, applicando le formule (5.2.10), (5.2.11), (5.3.1) e (5.3.2), si ha
$$f'(x) = 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2} \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

2. La generica funzione polinomiale $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ è derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata
$$P'(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

3. La funzione $f(x) = (x^2 + 3\sqrt{x})(x^{-3} - 4x^3)$, con dominio $D_f = (0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$, e, applicando le formule (5.2.12), (5.3.1), (5.3.2), e (5.3.3) si ha
$$f'(x) = \left(2x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)(x^{-3} - 4x^3) + (x^2 + 3\sqrt{x})\left(\frac{3}{x^4} - 12x^2\right) \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

4. La funzione $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2x^4+1}$, con dominio $D_f = \mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(2x^4 + 1) - 8\sqrt[3]{x}\,x^3}{(2x^4 + 1)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Esempio 5.3.4 (Derivata della funzione tangente)**.** La funzione $f(x) := \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, con dominio $D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R}\, :\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, è derivabile in ogni $x \in D_{\tan}$, con (usando la formula (5.3.4) e le derivate di sin e cos),
$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \qquad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Esempio 5.3.5 (Derivata della funzione $\log_a$, con $a > 0$, $a \neq 1$)**.** Sia $a > 0$, $a \neq 1$, e si consideri la funzione $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Si ha che
$$\log_a \text{ è derivabile su } (0, +\infty), \text{ e } \quad \log_a'(x) = \log_a(e)\frac{1}{x} \quad \forall\, x \in (0, +\infty). \tag{5.3.6}$$
La (5.3.6) si dimostra osservando che, per la proprietà di cambiamento di base dei logaritmi,
$$\forall\, a > 0,\ a \neq 1 \quad \log_a(x) = \log_a(e) \cdot \log_e(x) = \log_a(e) \cdot \ln(x) \quad \forall\, x > 0.$$
Allora la (5.3.6) segue dalla formula per la derivata di ln e dalla (5.3.2).

Derivabilità della composizione di funzioni.

Teorema 5.3.6. *Siano $g : I_g \to \mathbb{R}$ e $f : I_f \to \mathbb{R}$ (con I_g, I_f intervalli non vuoti) tali che $\mathrm{im}(g) \cap I_f \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in I_g$ un punto interno a I_g, e supponiamo che g sia derivabile in x_0. Supponiamo che $g(x_0)$ sia un punto interno a I_f, e che f sia derivabile in $g(x_0)$. Allora, $f \circ g$ è derivabile in x_0, e vale la formula*
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,. \tag{5.3.7}$$
Chiaramente, questo risultato si estende, con ovvie modifiche, al caso in cui si debba derivare la composizione di un numero N di funzioni, $N \geq 1$. Per esempio, si ha che, date tre funzioni <u>derivabili</u> sui loro domini $g : I_g \to \mathbb{R}$, $f : I_f \to \mathbb{R}$, $h : I_h \to \mathbb{R}$, (I_g, I_f e I_h intervalli aperti, cosicché tutti i loro punti sono interni) tali che la composizione $h \circ f \circ g$ sia ben definita, la funzione $h \circ f \circ g$ è derivabile, con
$$(h \circ f \circ g)'(x) = h'(f(g(x))) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \forall\, x \in I_g\,.$$

Esempio 5.3.7. 1. Calcoliamo la derivata della funzione $h(x) = \cos(x^3 - 3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Si vede immediatamente che h è data dalla composizione $f \circ g$, con $g(x) = x^3 - 3x$ e $f(x) = \cos(x)$. Essendo g e f funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, concludiamo che la funzione h è anch'essa derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata data dalla formula (5.3.7). Pertanto

$$h'(x) = (-\sin(x^3 - 3x))(3x^2 - 3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Calcoliamo la derivata della funzione $k(x) = \sin^2\left(\ln\left(x^4 + 1\right)\right)$, $x \in \mathbb{R}$, che è data dalla composizione di quattro funzioni. Infatti, $k = j \circ h \circ f \circ g$, con $g(x) = x^4 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ per ogni $x > 0$, $h(x) = \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $j(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si vede subito che la composizione $j \circ h \circ f \circ g$ è ben definita, e da' luogo a una funzione derivabile, in quanto tutte le funzioni componende sono derivabili sui rispettivi domini. Pertanto

$$k'(x) = 2\sin\left(\ln\left(x^4 + 1\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\ln\left(x^4 + 1\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{x^4 + 1} \cdot 4x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 5.3.8 (Derivata della funzione a^x, con $a > 0$)**.** Sia $a > 0$, e si consideri la funzione a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè l'esponenziale di base a). Per calcolarne la derivata, usiamo la relazione di inversione fra logaritmo in base e e l'esponenziale exp, cioè

$$y = \exp(\ln(y)) \quad \forall\, y \in (0, +\infty).$$

Allora

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln(a)) = e^{x \ln(a)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Applicando la (5.3.7), otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a) e^{x \ln(a)} = \ln(a) a^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5.3.8}$$

Derivata della funzione inversa. Consideriamo una funzione

$$f : I \to \mathbb{R}\,, \quad f \text{ invertibile e continua su } I. \tag{5.3.9}$$

Per il Teorema dei valori intermedi, concludiamo che $\mathrm{im}(f)$ è un intervallo J. La funzione inversa f^{-1} è quindi definita su J, e assume valori nell'intervallo I, verificando

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in (a, b)\,. \tag{5.3.10}$$

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti affinché f^{-1} sia a sua volta derivabile.

Teorema 5.3.9. *Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ verifichi la* (5.3.9)*. Sia $x_0 \in I$ (interno) tale che f è derivabile in x_0, con derivata $f'(x_0) \neq 0$. Allora, f^{-1} è anche derivabile in $f(x_0)$, e vale*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{5.3.11}$$

In particolare, concludiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è invertibile e derivabile su I e se $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, allora $f^{-1} : \mathrm{im}(f) = J \to I$ è a sua volta derivabile su J, con derivata

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall\, y \in \mathrm{im}(f) = J\,. \tag{5.3.12}$$

Per esempio, usando la (5.3.12) ritroviamo la formula (5.2.16) per la derivata della funzione ln, che è l'inversa dell'esponenziale di base e: in effetti, tenendo conto della (5.2.15), si ha

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y} \qquad \forall\, y \in (0, +\infty)\,.$$

Esempio 5.3.10 (Derivate delle funzioni trigonometriche inverse)**.** 1. Ricordiamo che la funzione $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è l'inversa della restrizione della funzione (derivabile) sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ora osserviamo che per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si ha $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Allora segue dal Teorema 5.3.9 che la funzione arcsin è derivabile sull'insieme $\{y \in [-1,1] : y = \arcsin(x),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ (cioè sull'insieme immagine della restrizione di sin a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), e questo insieme coincide con $(-1,1)$. In conclusione, si ha che

$$\text{arcsin è derivabile su } (-1,1), \text{ e}$$
$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1,1)\,,\end{aligned}$$

ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\sin' = \cos$, la terza dall'identità fondamentale della trigonometria e dal fatto che, essendo $x \in (-1,1)$, $\arcsin(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ e la restrizione di cos a $(-\pi/2, \pi/2)$ assume valori positivi, di modo che dall'identità della trigonometria possiamo ricavare la formula $\cos^2(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$ per ogni $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Infine, l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\sin(\arcsin(x)) = x$ per ogni $x \in (-1,1)$.

2. Allo stesso modo, si verifica che la funzione $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ (inversa della restrizione della funzione (derivabile) cos all'intervallo $[0,\pi]$), è derivabile sull'intervallo $(-1,1)$ e verifica

$$\begin{aligned}\arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \\ &= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1,1) \quad ,\end{aligned}$$

ove abbiamo usato che, essendo $x \in (-1,1)$, $\arccos(x) \in (0,\pi)$, cosicché, visto che sin assume valori positivi se ristretta a $(0,\pi)$, dall'identità della trigonometria $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}$ per ogni $x \in (-1,1)$.

3. Consideriamo $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, inversa della restrizione di tan a $(-\pi/2, \pi/2)$. Siccome $\tan'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D(\tan)$ (in effetti, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1$ per ogni $x \in D(\tan)$), si vede che arctan è derivabile su $\mathbb{R}$, con

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

ove abbiamo usato la formula (5.3.5) per la derivata di tan.

5.3.2 Classificazione dei punti di non derivabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ un punto interno a I. Supponiamo che f sia continua in x_0, e che

$$f \text{ non sia derivabile in } x_0.$$

Allora, possono presentarsi le seguenti situazioni:

♣ $(x_0, f(x_0))$ *è un punto a tangente verticale per* graf(f) se

$$\exists\, f'(x_0) = +\infty\,, \quad \text{o} \quad \exists\, f'(x_0) = -\infty. \tag{5.3.13}$$

Per esempio, la funzione

$$f(x) = x^{1/3} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

è tale che $f'(0) = +\infty$ (in effetti, $f'(0) = \lim_{h\to 0} h^{1/3}/h = \lim_{h\to 0} h^{-2/3} = +\infty$). Il punto $(0, 0)$ è a tangente verticale per graf(f). Analogamente, si verifica immediatamente che la funzione $g(x) = -x^{1/3}$, con $x \in \mathbb{R}$, ha $g'(0) = -\infty$. Anche in questo caso, il punto $(0, 0)$ è a tangente verticale per graf(g).

♣ *il punto x_0 è angoloso per f* se

$$\begin{aligned} &\exists\, f'_+(x_0)\,, \quad \exists\, f'_-(x_0)\,, \quad \text{almeno una fra } f'_+(x_0) \text{ e } f'_-(x_0) \text{ è finita, e} \\ &\qquad\qquad f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

(in particolare, $\nexists\, f'(x_0)$). Per esempio, il punto $x_0 = 0$ è angoloso per la funzione $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Anche la funzione

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ x^{1/3} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ha in 0 un punto angoloso, in quanto $g'_+(0) = 0$ e $g'_-(0) = +\infty$.

♣ *il punto x_0 è una cuspide per f* se

$$\exists\, f'_+(x_0)\,, \quad \exists\, f'_-(x_0)\,, \quad \text{entrambe sono infinite, e} \quad f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \tag{5.3.15}$$

(in particolare, $\nexists\, f'(x_0)$). Per esempio, la funzione $f(x) = x^{2/3}$, con dominio $\mathbb{R}$, ha una cuspide in $x_0 = 0$, in quanto

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = +\infty, \quad \text{e} \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty.$$

Chiaramente, la funzione $g(x) = -x^{2/3}$ ha anch'essa in 0 un punto di cuspide, con caratteristiche opposte: $g'_+(0) = -\infty$ e $g'_-(0) = +\infty$.

Esempio 5.3.11. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{1/3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ \arcsin(x) - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x \in (-1, 1), \\ -\pi & \text{se } x = -1, \\ (x+1)^{4/5} - \pi & \text{se } x < -1. \end{cases} \tag{5.3.16}$$

- Osserviamo che f è continua su $\mathbb{R}$: in effetti,
  - f è continua su $(1, +\infty)$, in quanto composizione di funzioni continue;
  - si ha
  $$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/3} = 0 \\ f(1) = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$
  e quindi f è continua in 1;
  - f è continua su $(-1, 1)$, in quanto arcsin è ivi continua e f si ottiene traslando arcsin;
  - si ha
  $$\begin{cases} \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \\ f(-1) = -\pi \\ \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \left((x+1)^{4/5} - \pi\right) = -\pi \end{cases}$$
  e quindi f è continua in -1;
  - f è continua su $(-\infty, -1)$, in quanto data dalla differenza e composizione di funzioni continue.
- Osserviamo che f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: in effetti,
  - f è derivabile su $(1, +\infty)$, in quanto composizione di funzioni derivabili;
  - f è derivabile su $(-1, 1)$, in quanto arcsin è ivi derivabile e f si ottiene traslando arcsin;
  - f è derivabile su $(-\infty, -1)$, in quanto data dalla differenza e composizione di funzioni derivabili.
- Classifichiamo, dal punto di vista della derivabilità, i punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$:
  - f non è derivabile in $x_1 = 1$: in effetti,
  $$\begin{aligned} f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h-1)^{1/3} - 0}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{1/3} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty, \end{aligned}$$
  e
  $$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\arcsin(1+h) - \frac{\pi}{2}}{h} = +\infty$$
  come vedremo nell'Esempio 5.3.15 fra qualche pagina. Quindi f ha in $x_1 = 1$ un punto a tangente verticale. Si noti che $\exists\, f'(1) = +\infty$.
  - f non è derivabile in $x_2 = -1$: in effetti,
  $$\begin{aligned} f'_+(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+h) - \frac{\pi}{2} + \pi}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+h) + \frac{\pi}{2}}{h} = +\infty \end{aligned}$$

come vedremo nell'Esempio 5.3.15 fra qualche pagina, e

$$\begin{aligned} f'_-(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(-1+h+1)^{4/5} - \pi - (-\pi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{4/5}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{1/5}} = -\infty. \end{aligned}$$

come vedremo nell'Esempio 5.3.15 fra qualche pagina. Quindi f ha in $x_2 = -1$ una cuspide. Si noti che $\nexists\, f'(-1)$.

5.3.3 Il teorema di De l'Hôpital

Il risultato che presenteremo è, di fatto, un complemento alla teoria dei limiti, e più precisamente al problema della risoluzione delle forme indeterminate di tipo quoziente $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$.

Teorema 5.3.12 (De l'Hôpital (I))**.** *Siano $a,\, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e $f,\, g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0\,, \tag{5.3.17}$$

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } (a,b), \text{ con } g'(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \tag{5.3.18}$$

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [-\infty,+\infty]\,. \tag{5.3.19}$$

Allora, <u>esiste</u> il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,. \tag{5.3.20}$$

Osservazione 5.3.13.

- L'enunciato del teorema continua a valere se al limite $\lim_{x\to a^+}$ viene sistematicamente sostituito il limite $\lim_{x\to b^-}$, oppure il limite ("bilatero") $\lim_{x\to x_0}$, oppure (nel caso in cui le funzioni f e g siano definite su semirette) i limiti $\lim_{x\to+\infty}$ o $\lim_{x\to-\infty}$.
- Osserviamo che la tesi si compone di due parti: innanzitutto, viene enunciata l'esistenza del limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e poi il suo calcolo viene ricondotto al calcolo del limite del **quoziente fra le derivate** $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, sotto la condizione che quest'ultimo limite esista!

Esempio 5.3.14 (**Ritroviamo i limiti notevoli**)**.** Usando il teorema di De l'Hôpital, è possibile dimostrare i limiti notevoli dati dalle formule (3.5.2)–(3.5.6). Per esempio, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1, \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1\,, \\ &\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,, \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1, \end{aligned}$$

ove il simbolo $\overset{H}{=}$ indica che in quel passaggio viene applicata la formula (5.3.20). Si ha anche

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

il che dimostra che può essere necessario applicare il teorema di De l'Hôpital più volte.

Esempio 5.3.15. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin(1+x)-\frac{\pi}{2}}{x}.$$

Si noti che si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, alla quale applichiamo il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin(1+x)-\dfrac{\pi}{2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}} = +\infty.$$

Allo stesso modo risolviamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ associata a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}}{x}$$

e dimostriamo che (**esercizio!**)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}}{x} = +\infty.$$

Osservazione 5.3.16. Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie. In particolare, se valgono le (5.3.17)–(5.3.18) ma non la (5.3.19), la (5.3.20) è, in generale, falsa, come mostra il seguente controesempio: consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,. \tag{5.3.21}$$

Vediamo che si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ora consideriamo il limite del rapporto fra le derivate del numeratore e del denominatore: si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 0^+}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,,$$

e tale limite non esiste, in quanto $\nexists \lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Se applicassi (erroneamente) l'uguaglianza (5.3.20) data dal teorema di De l'Hôpital, concluderei che il limite in (5.3.21) non esiste. **Invece, il limite in** (5.3.21) **esiste,** poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che la funzione $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata, mentre la funzione $x \mapsto x$ è infinitesima per $x \to 0^+$.

Diamo ora la versione del Teorema di De l'Hôpital relativa alla risoluzione delle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Anche in questo caso, enunceremo il teorema solo per limiti destri, ma precisiamo che esso vale anche per limiti sinistri, per limiti "bilateri", e per limiti per $x \to \pm\infty$.

Teorema 5.3.17 (De l'Hôpital (II))**.** *Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty\,, \tag{5.3.22}$$

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } (a,b), \text{ con } g'(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \tag{5.3.23}$$

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [-\infty, +\infty]\,. \tag{5.3.24}$$

Allora, esiste il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, *e si ha*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,. \tag{5.3.25}$$

Osserviamo che la (5.3.22) significa che la funzione f e la g devono tendere, per $x \to a^+$, o a $+\infty$ o a $-\infty$ (dando per l'appunto origine a una forma indeterminata $\pm\infty/\pm\infty$). In particolare, osserviamo che f e g possono tendere a due infiniti di segno diverso.

Esempio 5.3.18.

1. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$
In effetti,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty\,.$$
In generale, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, e per ogni base $a > 1$ si ha che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \tag{5.3.26}$$
(si noti che, se k è un numero naturale, la (5.3.26) si dimostra applicando k volte la formula (5.3.25)).

2. Si ha per ogni $k > 0$ e per ogni $b > 1$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log_b(x)} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b(x)}{x^k} = 0\,. \tag{5.3.27}$$
Per esempio, verifichiamolo nel caso $k = 1/2$ e $b = e$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{\ln(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{x^{-1/2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^{1/2} = +\infty\,.$$

3. Come ovvio corollario della (5.3.26) e della (5.3.27) abbiamo che per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 1$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b(x)} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b(x)}{a^x} = 0\,. \tag{5.3.28}$$

4. Si ha per ogni $k > 0$ e per ogni $b > 1$
$$\lim_{x\to0^+} x^k \log_b(x) = 0\,.$$

Si noti che il $\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x)$ da luogo a una forma indeterminata di tipo $0 \cdot \infty$, e non a una forma indeterminata di tipo quoziente. Per applicare il teorema di De l'Hôpital in una delle due forme viste, è quindi necessario ricondursi a una forma indeterminata di tipo quoziente. Questo può essere fatto in due modi:

- effettuando il cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$ (cosicché $\log_b(x) = -\log_b(z)$), ci si riconduce a una forma indeterminata di tipo ∞/∞ e si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = \lim_{z\to +\infty} \frac{-\log_b(z)}{z^k} = 0$$

  (e l'ultima uguaglianza segue da (5.3.27));

- scrivendo il prodotto come un quoziente, cioè

$$x^k \log_b(x) = \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}},$$

  da cui

$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}}$$

  (ci siamo così ricondotti a una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$), e applicando a quest'ultimo limite il teorema di De l'Hôpital. In effetti,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(e)\frac{1}{x}}{-k\frac{1}{x^{k+1}}} = -\frac{\log_b(e)}{k} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{k+1}}{x} = -\frac{\log_b(e)}{k} \lim_{x\to 0^+} x^k = 0.$$