Dispense di Matematica–Analisi Matematica

Riccarda Rossi

Corso di Laurea in Disegno Industriale

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2009/2010

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Elementi di logica matematica

Una condizione basilare per poter apprendere la matematica è acquisire correttamente il cosiddetto "linguaggio matematico". In effetti, in matematica la verifica di un'affermazione non avviene sperimentalmente, ma dandone una dimostrazione, e dimostrare un'affermazione (in questo contesto si usa anche il termine *tesi*) significa provarne la verità facendola discendere, attraverso una catena di passaggi logici, da un altro asserto (*ipotesi*), di cui si presuppone la verità. Per poter effettuare correttamente questi passaggi (cioè sviluppare il *processo deduttivo*), è necessario impiegare rigorosamente un linguaggio che non ammetta ambiguità. Tale è il linguaggio matematico, basato sulla logica, della quale è opportuno apprendere i primi rudimenti.

1.1.1 Proposizioni e predicati

Gli oggetti basilari della logica sono le <u>proposizioni</u>.

Definizione 1.1.1 (Proposizione)**.** *Chiamiamo* proposizione *una frase di senso compiuto della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Denotiamo la generica proposizione con i simboli* $\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$*.*

Esempio 1.1.2.

1. $\mathcal{P}_1$: "Quest'aula contiene solo studenti di Disegno Industriale" (VERA);
2. $\mathcal{P}_2$: "Ogni anno, il 17 Settembre a Cremona nevica" (FALSA);
3. $\mathcal{P}_3$: "Che ora è?" (NON È UNA PROPOSIZIONE);
4. $\mathcal{P}_4$: $1 + 1 = 2$ (VERA);
5. $\mathcal{P}_5$: "11 è un numero dispari" (VERA);
6. $\mathcal{P}_6$: "60 è un numero primo[1]" (FALSA)......

[1] cioè un numero naturale $n > 1$ i cui unici divisori sono 1 e n.

Definizione 1.1.3 (Predicato). *Chiamiamo* predicato *una frase di senso compiuto che contiene una o più variabili libere. Denotiamo con i simboli* $\mathcal{P}(x)$ *o* $\mathcal{Q}(x)$ *un predicato dipendente dalla variabile* x*, (con* $\mathcal{P}(x,y)$ *o* $\mathcal{Q}(x,y)$ *un predicato dipendente dalle variabili* x*,* y*, con* $\mathcal{P}(x,y,z)$ *o* $\mathcal{Q}(x,y,z)$ *un predicato dipendente dalle variabili* x*,* y*,* z*.....)*

Chiaramente, il valore di verità del predicato $\mathcal{P}(x)$ ($\mathcal{P}(x,y)$...., risp.) dipende dal valore assunto dalla variabile x (da x, y...., risp.). Per trasformare un predicato $\mathcal{P}(x)$ in una proposizione $\mathcal{P}$, è quindi sufficiente assegnare un valore alle variabili libere.

Esempio 1.1.4.

1. $\mathcal{P}_1(x)$: "L'aula x contiene solo studenti di Disegno Industriale";
2. $\mathcal{P}_2(x,y)$: "Ogni anno, nel giorno x e nel luogo y nevica";
3. $\mathcal{P}_3(x,y)$: $x+y=2$;
4. $\mathcal{P}_4(x)$: "x è un numero dispari";
5. $\mathcal{P}_5(x)$: "x è un numero primo"......

1.1.2 Quantificatori

Un altro modo per rendere i predicati degli oggetti a cui attribuire in modo inequivocabile un valore di verità/falsità è usare i cosiddetti *quantificatori*:

- $\forall$: che si legge *Per ogni* (**quantificatore universale**);
- $\exists$: che si legge *Esiste* (**quantificatore esistenziale**);
- $\exists!$: che si legge *Esiste ed è unico.*

Esempio 1.1.5.

1. Consideriamo il predicato "Per ogni numero naturale n, n è primo". Pur dipendendo da una variabile n, a questo predicato si può attribuire inequivocabilmente il valore VERO/FALSO, e quindi è di fatto una proposizione. In questo caso, ovviamente tale proposizione è FALSA;
2. "Esiste un numero naturale n tale che n è primo" (VERA);
3. "Ogni numero dispari è divisibile per 3" (FALSA).

Osservazione 1.1.6. Si noti che

- $\exists$ significa *Esiste almeno uno*,
- $\exists!$ significa *Esiste ed è unico.*

Per esempio:
In alcune zone dello Utah (Stati Uniti) nelle quali è tollerata la poligamia, ogni uomo ha almeno una moglie, mentre ogni donna ha un unico marito.

Osservazione 1.1.7 (Attenzione all'ordine dei quantificatori). In una proposizione/predicato, è essenziale l'ordine con cui compaiono i vari quantificatori. In altri termini, invertire l'ordine di due quantificatori, di diverso tipo, adiacenti, può alterare, anche pesantemente, il senso della frase. Ad esempio:

- *In ogni luogo c'è almeno un giorno all'anno in cui piove*, che si può scrivere più sinteticamente come
$$\forall \, \text{luogo} \quad \exists \, \text{giorno all'anno:} \;\; \text{piove}$$
(e questa proposizione è VERA). Invertendo l'ordine dei quantificatori si ottiene
$$\exists \, \text{giorno all'anno:} \quad \forall \, \text{luogo} \qquad \text{piove}\,,$$
cioè *C'è almeno un giorno all'anno tale che in ogni luogo piove*, che è FALSA.

- A volte la distinzione è più sottile, anche se significativa:

  In questo libro giallo, per ogni assassinio commesso esiste un unico colpevole,

  da confrontarsi con

  In questo libro giallo, esiste un unico colpevole per ogni assassinio commesso.

- Partiamo da una affermazione FALSA: *Esiste un numero intero più grande di ogni altro numero intero*, cioè
$$\exists \, y \;\; \text{numero intero:} \quad \forall \, \text{intero } x \qquad y > x\,.$$
Invertendo l'ordine dei quantificatori otteniamo
$$\forall \, \text{intero } x \;\; \exists \, y \;\; \text{numero intero:} \qquad y > x\,,$$
che è VERA.

1.1.3 Connettivi logici

I connettivi logici che ora introduciamo trasformano una o più proposizioni/predicati in altre proposizioni/predicati, **il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza**.

NON (negazione): *questo connettivo trasforma una data proposizione $\mathcal{P}$ (predicato $\mathcal{P}(x)$) nella proposizione* non($\mathcal{P}$) *(nel predicato* non($\mathcal{P}(x)$)*), che ha contenuto <u>contrario</u> a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$.*
Ad esempio: "Oggi piove" diventa "Oggi non piove".

- Una sola fra $\mathcal{P}$ e non($\mathcal{P}$) è vera: vale cioè il principio del terzo escluso[2]
- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide, cioè
$$\text{non}(\text{non}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}\,.$$
Ad esempio: "Non è vero che Bin Laden non sia un criminale"= "Bin Laden è un criminale".

E (congiunzione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$),*
$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}$$
è la proposizione nella quale valgono <u>sia</u> la prima, <u>sia</u> la seconda.
Quindi, "$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$" è vera se e solo se sia $\mathcal{P}$ sia $\mathcal{Q}$ sono vere.
Ad esempio: "Oggi piove e fa freddo".

[2]che caratterizza la cosiddetta logica bivalente, alla base dei calcolatori elettronici.

O (disgiunzione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$),*

$$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}$$

è la proposizione nella quale vale almeno delle due.
Quindi, "$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$" è vera se e solo almeno una fra $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è vera.
Si noti che, scrivendo $\mathcal{P}$o$\mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe: in ogni caso, almeno una delle due lo è. Per esempio: se dico che "Ogni mio cugino gioca o a tennis o a basket", non escludo di avere un cugino molto sportivo che gioca sia a tennis, sia a basket.

$\Longrightarrow$ (implicazione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$), il connettivo implicazione crea la nuova proposizione $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, che si legge*

- "$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$",
- "se $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{Q}$".

e che ha il seguente significato: se $\mathcal{P}$ è vera, anche $\mathcal{Q}$ è vera.
Ad esempio:

- "Se l'acqua viene portate alla temperatura di 0 gradi celsius, allora si ghiaccia."
- "Se un numero naturale n è divisibile per 4, allora n è pari."
- "Se una figura piana è un quadrato, allora le sue diagonali sono perpendicolari."
- $3x + 5 = 17 \implies x = 4$.

Si usano anche le seguenti locuzioni per esprimere $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$:

- "$\mathcal{P}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{Q}$"[3],
- "$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$"[4].

Ad esempio, la proposizione
"Se fa freddo, accendo il riscaldamento."
si riesprime come
"Condizione sufficiente affinché io accenda il riscaldamento è che faccia freddo."

Non si confonda mai "condizione sufficiente" con "condizione necessaria": per esempio, la proposizione "se passo l'esame di matematica, domani sera ti porto al cinema" equivale a "condizione sufficiente per portarti al cinema è che domani io passi l'esame di matematica", ed equivale anche a "portarti al cinema è condizione necessaria per la mia promozione all'esame di matematica." Ha tutt'altro significato la proposizione "Portarti al cinema è una condizione sufficiente affinché io passi l'esame di matematica domani"!!!!

$\Longleftrightarrow$ (doppia implicazione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$), il connettivo doppia implicazione crea la nuova proposizione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$, che equivale a*

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q} \Longleftarrow \mathcal{P}$$

e che si legge "$\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{Q}$". In altri termini, la proposizione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ **è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ hanno lo stesso valore di verità** (cioè sono entrambe vere o entrambe false). Altre locuzioni sono

[3] in altri termini, è sufficiente che valga $\mathcal{P}$ affinché valga anche $\mathcal{Q}$.
[4] in altri termini, se vale $\mathcal{P}$, necessariamente deve valere anche $\mathcal{Q}$.

- "$\mathcal{P}$ è condizione necessaria e sufficiente per $\mathcal{Q}$",
- "$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$".

Ad esempio:

- "Condizione necessaria e sufficiente affinché il Brescia vinca contro l'Atalanta è che il Brescia segni un numero di gol strettamente maggiore dell'Atalanta";
- Dati due numeri reali a e b, si ha

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ o } b = 0.$$

1.1.4 Negazione di proposizioni con quantificatori e connettivi

Apprendiamo alcune regole **fondamentali** per

Negare proposizioni/predicati contenenti quantificatori:

NON ($\forall$) = $\exists$ **NON**
cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\forall\, x \ \ \mathcal{P}(x)) &\iff \text{"non è vero che } \mathcal{P}(x) \text{ è sempre vera"} \\ &\iff \text{"c'è almeno un } x \text{ per il quale } \mathcal{P}(x) \text{ è falsa"} \\ &\iff \exists\, x : \quad \text{non}(\mathcal{P}(x))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio:

- "Non è vero che ogni ragazzo di questa classe è senza gli occhiali", cioè "Esiste un ragazzo in questa classe che porta gli occhiali";
- la negazione di "In Irlanda tutti i giorni dell'anno piove" è la proposizione "C'è almeno un giorno all'anno in Irlanda in cui non piove".
  Quindi, **per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata:** si parla allora di un controesempio.

NON ($\exists$) = $\forall$ **NON**
cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\exists\, x \ \ \mathcal{P}(x)) &\iff \text{"non è vero che esiste un } x \text{ per cui } \mathcal{P}(x) \text{ è vera"} \\ &\iff \text{"per ogni } x\ \mathcal{P}(x) \text{ è falsa"} \\ &\iff \forall\, x : \quad \text{non}(\mathcal{P}(x))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio:

- "Non esiste nessuno stato europeo il cui nome inizi per z", cioè "Tutti gli stati europei hanno nomi che iniziano per lettere diverse da z";
- La negazione di "$\exists\, x > 2 \ \ : x^2 \leq 4$" (FALSA) è "$\forall\, x > 2, \ \ x^2 \geq 4$" (VERA).

NON ($\forall + \exists$) $= \exists + \forall$ **NON**
cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned}
\text{non } (\forall x \ \ \exists y \ : \ \mathcal{P}(x,y)) &\iff \text{“non è vero che per ogni } x \text{ esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x,y) \text{ è vera”} \\
&\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale è falso che [esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x,y) \text{ è vera]”} \\
&\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale per ogni } y \ \mathcal{P}(x,y) \text{ è falsa”} \\
&\iff \exists x \ \ : \forall y \ \ \text{non}(\mathcal{P}(x,y))\,.
\end{aligned}$$

Ad esempio: “È falso che ogni padre bresciano abbia almeno una figlia bionda” equivale a “esiste un padre bresciano tale che tutte le sue figlie non sono bionde”..

NON ($\exists + \forall$) $= \forall + \exists$ **NON**
Ad esempio, la proposizione[5]

“Non (esiste un numero naturale x tale che per ogni naturale y si abbia $y \leq x$)”

è equivalente a

“per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che si abbia $y > x$”.

Negare proposizioni/predicati contenenti connettivi:

non($\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$) = [non($\mathcal{P}$) o non($\mathcal{Q}$)]
Per esempio: “Non è vero che entrambe le figlie del medico sono alte” equivale a “Almeno una delle due figlie del medico non è alta”.

non($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$) = [non($\mathcal{P}$) e non($\mathcal{Q}$)]
Per esempio: “Non è vero che mio fratello, a cena, mangia carne o pesce” equivale a “A cena, mio fratello non mangia né carne, né pesce”.

non($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) = [$\mathcal{P}$ e non($\mathcal{Q}$)]
Ad esempio: “È falso che Lucia, se prende correnti d’aria fredda, si ammala” equivale a “Lucia prende correnti d’aria fredda e non si ammala”.

Infine, osserviamo che

$$\text{l'implicazione } \mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \quad \text{è equivalente a} \ \ [\text{non}(\mathcal{Q}) \implies \text{non}(\mathcal{P})]. \tag{1.1.1}$$

In altri termini, dire $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, cioè “$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$”, è equivalente a dire “se non vale $\mathcal{Q}$, non può valere neppure $\mathcal{P}$”.

1.1.5 La dimostrazione per assurdo

L’equivalenza (1.1.1) è alla base della cosiddetta *dimostrazione per assurdo*.

Vogliamo dimostrare che, se assumiamo come vera una data ipotesi $\mathcal{P}$, allora vale la tesi $\mathcal{Q}$, cioè che $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Ciò è equivalente a dimostrare che non($\mathcal{Q}$) $\implies$ non($\mathcal{P}$). Allora, nella dimostrazione per assurdo si procede così: si parte dall’ipotesi $\mathcal{P}$, e si nega la tesi che si vuole dimostrare, cioè non($\mathcal{Q}$). Dopodiché si sviluppa un ragionamento che porterà a dedurre

[5] che esprime la cosiddetta “proprietà archimedea” dei numeri naturali.

da non($\mathcal{Q}$) che vale non($\mathcal{P}$)[6]. Ma $\mathcal{P}$ e non($\mathcal{P}$) non possono sussistere contemporaneamente. Quindi non($\mathcal{P}$) è FALSA. Abbiamo quindi provato che, assumendo non($\mathcal{Q}$), si è giunti a non($\mathcal{P}$) (FALSA). Ma allora anche non($\mathcal{Q}$) è FALSA.

Per esempio, dimostriamo il seguente

Teorema 1.1.8. Ipotesi: *a e b sono due numeri naturali strettamente positivi, il cui prodotto è un numero dispari.*
Tesi: *Sia a sia b sono numeri dispari.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che valga l'ipotesi e neghiamo la tesi: quindi

$$a \cdot b \text{ è un numero dispari e almeno uno fra } a \text{ o } b \text{ non è dispari.}$$

Per esempio supponiamo che a sia pari[7]. Quindi $a = 2p$, ove p è un numero naturale strettamente positivo. Ma allora $a \cdot b = 2p \cdot b$, quindi $a \cdot b$ è un intero pari, contro la nostra ipotesi. Assurdo, quindi vale la tesi. □

1.2 Elementi di teoria degli insiemi

Chiamiamo *insieme* una certa entità composta di oggetti elementari. Sinonimi di *insieme* sono i termini: *collezione*, *famiglia*, *classe*. Gli oggetti che costituiscono un insieme sono detti *elementi*.

Notazioni. Useremo:

- una lettera maiuscola (ad es.: A, B, $C \ldots$) per denotare un dato insieme,
- lettere minuscole (ad es.: a, b, c, $x \ldots$) per denotare gli elementi di insieme.

Dati x ed E,

- $x \in E$ significa "x appartiene ad E",
- $x \notin E$ significa "x non appartiene ad E".

Il simbolo $\emptyset$ denota l'insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto*.
Chiamiamo *cardinalità* di un insieme il numero dei suoi elementi.

Descrizione degli insiemi. È possibile descrivere un generico insieme in due modi:

1. elencandone tutti gli elementi, con ciascun elemento indicato una sola volta, ad es. $A = \{-1, 1\}$. Si noti che l'ordine con cui si elencano gli elementi è inessenziale, pertanto

$$A = \{-1, 1\} = \{1, -1\}.$$

   Si noti che A ha cardinalità 2.
   Ulteriori esempi sono i seguenti insiemi numerici:

   (a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$: l'insieme dei *numeri naturali*;

[6] o che vale un'altra affermazione $\mathcal{R}$ che sappiamo essere FALSA.
[7] procederemmo analogamente se supponessimo b pari.

(b) $\mathbb{Z} = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$: l'insieme dei *numeri interi*;

(c) $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$: l'insieme dei *numeri naturali pari*.

Si noti che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e P hanno infiniti elementi: in tal caso si dice che hanno *cardinalità infinita*.

2. Oppure si può descrivere un insieme come la famiglia di tutti gli elementi verificanti una certa proprietà (o predicato). In altri termini, dato un insieme ambiente $\mathcal{U}$ e una proprietà $\mathscr{P}$, possiamo definire un insieme $\mathcal{A}$ come la famiglia di tutti gli elementi $x \in \mathcal{U}$ che rendono vera la proprietà $\mathscr{P}$, cioè gli x per i quali vale $\mathscr{P}(x)$[8]:

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{U} : \ \mathscr{P}(x)\} \, .$$

Ad esempio,

- $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{N} : \ x < 3\} = \{0, 1, 2\}$;
- $\mathcal{A}_2 = \big\{x \in \mathbb{Z} : \ x^2 = 1\big\} = \{-1, 1\}$.

L'inclusione. Siamo I, E due insiemi. Diciamo che $E \subset I$ (cioè E *è un sottoinsieme di* I, o anche E *è incluso in* I) se

$$\text{per ogni } x \in E \text{ si ha che } x \in I$$

(in simboli: $x \in E \implies x \in I$). Chiaramente, se $E = I$ si ha in particolare che $E \subset I$ e $I \subset E$. Di fatto, si ha che

$$E = I \iff E \subset I \text{ e } I \subset E \, .$$

Se $E \subset I$ e $E \neq I$, diciamo che E è un <u>sottoinsieme proprio</u> di I; in simboli, questo si traduce con

$$\forall\, x \in E \, , x \in I \quad \text{e} \quad \exists\, y \in I : \ y \notin E$$

(la prima proposizione afferma che E è incluso in I, e la seconda che I non è incluso in E).

Si conviene che, dato un qualsiasi insieme E, si abbia $\emptyset \subset E$ e $E \subset E$ ($\emptyset$ e E vengono detti *sottoinsiemi impropri* di E).

Operazioni fra insiemi. Dati A e B (sottoinsiemi di un certo insieme ambiente che non specifichiamo), possiamo definire i seguenti insiemi:

l'*insieme unione*

$$A \cup B := \{x : \ \ x \in A \text{ o } x \in B\} \, ;$$

l'*insieme intersezione*

$$A \cap B := \{x : \ \ x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(se $A \cap B = \emptyset$, si dice che A e B sono disgiunti);

l'*insieme differenza* (di A e B)

$$A \setminus B := \{x : \ \ x \in A \text{ e } x \notin B\} \, .$$

Se A e X sono due insiemi con $A \subset X$, allora l'insieme $X \setminus A$ viene detto *insieme complementare* di A in X (e denotato anche con il simbolo A^c).

[8] quando si definisce un insieme $\mathcal{A}$ in questo modo, si usa la notazione $\mathcal{A} := ...$; il simbolo $:=$ viene in generale usato nelle definizioni.

Si noti che, mentre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (cioè vale la proprietà commutativa), in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$.
Ad esempio, consideriamo

1. l'insieme dei numeri naturali pari P e l'insieme $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ dei numeri naturali dispari. In questo caso,
$$P \cap D = \emptyset, \qquad P \cup D = \mathbb{N}, \qquad P \setminus D = P, \qquad D \setminus P = D\,.$$
2. l'insieme dei numeri naturali pari P e l'insieme M dei multipli naturali di 4 (cioè $M = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 4n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora
$$M \subset P, \qquad P \cap M = M, \qquad P \cup M = P, \qquad M \setminus P = \emptyset.$$

Infine, ricordiamo che, dato un certo insieme A, l'insieme dei sottoinsiemi di A viene detto *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di A, e denotato con il simbolo 2^A. Ad esempio
$$A = \{0, 1, 2\} \quad \Longrightarrow \quad 2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}\,. \tag{1.2.1}$$

Il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, non necessariamente distinti, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B l'insieme delle coppie ordinate (a, b), al variare di $a \in A$ e di $b \in B$, cioè
$$A \times B := \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}\,.$$
"Coppie ordinate" significa che l'ordine con cui appare ciascun elemento della coppia è essenziale. Due coppie ordinate (a, b) e (a', b') sono uguali se hanno uguali ordinatamente primo e secondo elemento, cioè se $a = a'$ e $b = b'$.

Quindi, dati A e B, in generale si ha $A \times B \neq B \times A$. Si provi a verificare ciò descrivendo i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$, con $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$.

Se $A = B$, useremo la notazione A^2 per $A \times A$.

Si può estendere l'operazione di prodotto cartesiano a una n-upla di insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, con $n \geq 2$, definendo
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : \ a_1 \in A_1, \, a_2 \in A_2, \, \dots, \, a_n \in A_n\}$$
cioè l'insieme delle *n-uple ordinate* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, al variare di $a_1 \in A_1$, .. $a_n \in A_n$. Anche in questo caso, se $A_i \equiv A$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, si usa la notazione $A \times A \times \ldots \times A = A^n$.

Il concetto di relazione. Dati due insiemi non vuoti A e B, una *relazione* $\mathcal{R}$ di A in B è per definizione un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$ (se $A = B$, un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset A^2$ viene chiamato relazione in A). Diciamo che un elemento $a \in A$ è in relazione con un elemento $b \in B$ (e scriviamo $a\,\mathcal{R}\,b$) se $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.2.1.

1. Se $A = B$, l'*insieme diagonale* $D = \{(a, b) \in A^2 : \ a = b\}$ corrisponde alla relazione di uguaglianza: in effetti,
$$(a, b) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.$$
2. La relazione "$\leq$ " nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{N}$ si identifica con l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$.

Definizione 1.2.2. *Diciamo che una relazione $\mathcal{R}$ di un insieme A in sé è una* relazione d'ordine *se gode delle seguenti proprietà:*

riflessività $\forall\, x \in A \quad x\,\mathcal{R}\,x$

antisimmetria $\forall\, x,\, y \in A \quad [x\,\mathcal{R}\,y \text{ e } y\,\mathcal{R}\,x] \Longrightarrow x = y$

transitività $\forall\, x,\, y,\, z \in A \quad [x\,\mathcal{R}\,y \text{ e } y\,\mathcal{R}\,z] \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z.$

Inoltre, se una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ gode anche della proprietà

$$\forall\, x,\, y \in A \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{o} \quad y\,\mathcal{R}\,x \qquad \textbf{(dicotomia)}$$

allora la relazione d'ordine si dice *totale* e A viene detto un insieme totalmente ordinato.

Esempio 1.2.3.
- Si verifica facilmente (esercizio!) che la relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine totale;
- la relazione $<$ NON è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$ (verificare!)
- dato un qualsiasi insieme $A \neq \emptyset$, la relazione $\subset$ in 2^A è una relazione d'ordine (esercizio!). In generale, $\subset$ non è una relazione d'ordine totale (ad es., si veda l'insieme A in (1.2.1)).

1.3 Dai numeri naturali ai numeri razionali

Rivediamo brevemente alcuni fatti elementari sui numeri naturali, interi, e razionali.

L'insieme dei numeri naturali.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\,.$$

- Possiamo rappresentare geometricamente $\mathbb{N}$ su una retta, fissando su di essa un punto origine O, a cui viene associato lo 0, e un secondo punto $U \neq O$, a cui si associa il valore 1. Si considera "verso di percorrenza positivo" della retta il verso di percorrenza da O a U. La lunghezza del segmento OU individua un'unità di misura. Riportando il multiplo n di OU sulla retta nel verso positivo, si individua il punto associato al numero naturale n.
- La relazione $\leq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N}$.
- Ogni numero naturale n ha come divisori 1 e n. Se questi sono i suoi unici divisori, n viene detto *primo*.

L'insieme dei numeri interi. Osserviamo che, dati due numeri naturali a, $b \in \mathbb{N}$, l'equazione

$$a + x = b$$

ha una (unica) soluzione $\underline{x \in \mathbb{N}}$ se $b \geq a$. Se, invece, $b < a$, non esiste alcun numero naturale x che verifichi $a+x = b$. Questo fatto motiva l'introduzione dei numeri interi, che si ottengono dai numeri naturali nel seguente modo: ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associamo l'elemento x tale che $x + n = 0$. Denotiamo x con il simbolo $-n$ (x è detto l'*opposto* di n) e definiamo

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

- Anche $\mathbb{Z}$ si può rappresentare geometricamente su una retta: riprendendo la retta che rappresenta $\mathbb{N}$, al numero intero $-n$ (con $n \in \mathbb{N}$) viene associato il punto che si ottiene riportando n volte il segmento unitario OU nel verso opposto al verso positivo.
- La relazione $\leq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{Z}$.
- Si ha chiaramente $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

L'insieme dei numeri razionali. Dati due numeri interi a, $b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, l'equazione

$$ax = b$$

ha una soluzione $\underline{x \in \mathbb{Z}}$ se e solo se b è un multiplo intero di a. In caso contrario, non esiste alcun $x \in \mathbb{Z}$ che la verifichi. Per renderla risolvibile per ogni coppia di interi a, $b \in \mathbb{Z}$ (con $a \neq 0$), ampliamo l'insieme $\mathbb{Z}$, e definiamo

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbb{Z}, \; n \neq 0 \right\},$$

con la convenzione di considerare ogni frazione ridotta ai minimi termini, cioè con numeratore e denominatore privi di denominatori comuni. In altri termini, identifichiamo per esempio $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{18}$.

- $\mathbb{Z}$ può essere identificato con il sottoinsieme $\tilde{\mathbb{Z}}$ di $\mathbb{Q}$ dato da

  $$\tilde{\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \; n = 1 \right\}.$$

  Con un lieve abuso di notazione, scriviamo quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Ad ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ è possibile associare un unico numero $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ che verifichi $xy = 1$. Il numero y viene detto *inverso* (o *reciproco*) di x.
- La relazione d'ordine $\leq$ si estende a $\mathbb{Q}$ nel seguente modo:
  - dato un numero razionale $\frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, si ha che

    $$\frac{m}{n} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ e } n \text{ hanno lo stesso segno,}$$
    $$\frac{m}{n} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ e } n \text{ hanno segni diversi.}$$

  - Dati $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ in $\mathbb{Q}$, li ordiniamo nel seguente modo:
    * se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ hanno <u>segno diverso</u>, è immediato confrontarli. Avremo infatti

      $$\frac{m}{n} \leq 0 \leq \frac{p}{q} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{p}{q} \leq 0 \leq \frac{m}{n}.$$

    * se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono <u>entrambi positivi</u>, possiamo supporre[9] che $m \geq 0$ e $n > 0$ e $p \geq 0$ e $q > 0$. Allora abbiamo che

      $$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad mq \leq pn.$$

[9] in effetti,

$$\frac{3}{5} = \frac{+3}{+5} = \frac{-3}{-5}.$$

∗ se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono entrambi negativi, allora ci "appoggiamo" alla relazione d'ordine definita nel caso di numeri razionali positivi:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{p}{q} \leq -\frac{m}{n}.$$

- **Rappresentazione decimale dei numeri razionali.** Ogni numero $x \in \mathbb{Q}$ può essere espresso in base 10 nella forma

$$\begin{aligned} x = \pm\Big(& c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0 \\ & + c_{-1}10^{-1} + c_{-2}10^{-2} + \ldots\Big) \qquad \text{con le cifre } c_i,\ c_{-j} \in \{0, 1, \ldots, 9\}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Le cifre c_i, c_{-j} vengono dette *cifre decimali*. Equivalentemente, si può scrivere

$$x = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \ldots \tag{1.3.2}$$

Questa è, peraltro, la rappresentazione dei numeri fatta da un calcolatore. Chiamiamo la (1.3.1)/(1.3.2) *rappresentazione* (o *allineamento*) *decimale* del numero x. Osserviamo che, mentre il numero di cifre a sinistra della virgola in (1.3.2) è finito, in generale vi possono essere infinite cifre decimali a destra della virgola.

Si dice che un allineamento decimale è *finito* se vi è un numero finito di cifre a destra della virgola. Ad esempio,

$$\begin{aligned} \frac{18723}{100} &= 187,23 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}, \\ -\frac{1}{6} &= -0,166666666\ldots = -\big(0 + 1 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4} \\ &\qquad +6 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-7} + 6 \cdot 10^{-8} \ldots\big). \end{aligned}$$

Se, in un allineamento decimale (non finito), da una certa posizione decimale in poi un blocco di cifre si ripete indefinitamente, allora l'allineamento viene detto periodico e tale blocco è detto *periodo*[10]. Ad esempio, $-1/6$ ha un allineamento decimale periodico di periodo 6.

Si può dimostrare che ad ogni numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ viene associato uno e un solo allineamento decimale, finito o periodico. Chiaramente, i numeri interi si identificano con gli allineamenti decimali in cui le cifre a destra della virgola sono tutte uguali a zero.

Dai numeri razionali ai numeri reali. Fu scoperto dai matematici greci che esistono segmenti la cui lunghezza non può essere espressa mediante numeri razionali. Ad esempio, la lunghezza x della diagonale del quadrato di lato 1, che, per il teorema di Pitagora, verifica

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Teorema 1.3.1. *Non esiste un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.*

Dimostrazione. Per assurdo esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Rappresentiamo x nella forma

$$x = \frac{m}{n} \qquad \text{con } m,\, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0$$

[10]vengono considerati propri i periodi diversi da 9: ad esempio, il numero $0,99999999\ldots$ viene identificato con 1.

(si intende la frazione ridotta ai minimi termini, cioè m e n privi di divisori comuni). Poiché $x^2 = 2$, segue che

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.3.3}$$

Allora m^2 è un numero pari. Ne consegue che m è un numero pari[11]. Quindi m è della forma $m = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, e dalla (1.3.3) segue che $4k^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2k^2$. Ma allora n^2 è pari, quindi anche n è pari. Abbiamo pertanto concluso che sia m sia n sono pari, cioè divisibili per 2. Ma questo è in contraddizione con il fatto che né m né n abbiano divisori comuni. Assurdo. □

Il Teorema 1.3.1 suggerisce l'esistenza di un'estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$, in cui l'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione. Si tratta dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 1.3.2. *Chiamiamo* numero reale *un (qualsiasi) allineamento decimale, e denotiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.*

Chiaramente i numeri razionali (che, ribadiamo, si identificano con gli allineamenti decimali finiti o periodici) sono un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si ha dunque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Chiamiamo *numero irrazionale* un numero reale non razionale (rappresentato da un allineamento decimale non finito né periodico). L'insieme dei numeri irrazionali si denota ovviamente con il simbolo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ad esempio, sono numeri irrazionali $\pm\sqrt{2}$ (cioè le radici di 2), π, la *costante di Nepero* e (qui approssimata con 55 cifre decimali)

$$\mathrm{e} = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749\ldots\ldots\ldots$$

1.4 L'insieme dei numeri reali

Le proprietà dell'insieme dei numeri reali che presentiamo in questa sezione sono fondamentali per lo sviluppo del calcolo differenziale e integrale, e vanno quindi ben comprese e assimilate.

1.4.1 La relazione d'ordine su $\mathbb{R}$

La relazione d'ordine $\leq$ si estende anche a $\mathbb{R}$ nel seguente modo: siano dati due numeri reali x e y, rappresentati dagli allineamenti decimali

$$x = \pm\,(c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \ldots) \qquad\qquad y = \pm\left(c'_k c'_{k-1} \ldots c'_1 c'_0, c'_{-1} c'_{-2} \ldots\right).$$

Poiché, in entrambe le rappresentazioni, le cifre a sinistra della virgola rappresentano <u>numeri naturali</u>, per semplicità chiamiamo $n := c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ e $m := c'_k c'_{k-1} \ldots c'_1 c'_0$. Se x e y hanno segno diverso, è immediato confrontarli:

$$\begin{aligned} &\left(x = +n, c_{-1}c_{-2}\ldots, \qquad y = -m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots\right) \ \Rightarrow\ y < 0 < x, \\ &\left(x = -n, c_{-1}c_{-2}\ldots, \qquad y = +m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots\right) \ \Rightarrow\ x < 0 < y, \end{aligned}$$

e, inoltre, se x e y sono entrambi negativi (cioè $x = -n, c_{-1}c_{-2}\ldots$ e $y = -m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots$), si ha che

$$x < y \ \Leftrightarrow\ -y < -x\,.$$

[11]in effetti, se m fosse dispari (cioè della forma $m = 2k + 1$), allora anche $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sarebbe dispari.

Possiamo quindi ridurci al caso in cui x e y sono entrambi non negativi, cioè della forma

$$x = +n, c_{-1}c_{-2}\ldots \qquad\qquad y = +m, c'_{-1}c'_{-2}\ldots\,.$$

Per confrontarli, basta confrontare le prime cifre decimali diverse dei due numeri. Si ha:

$$n < m \quad \Rightarrow x < y \qquad n > m \quad \Rightarrow x > y\,.$$

Se $n = m$, confrontiamo allora le prime cifre decimali a destra della virgola:

$$\begin{cases} c_{-1} < c'_{-1} \ \Rightarrow \ x < y, \\ c_{-1} > c'_{-1} \ \Rightarrow \ x > y, \end{cases}$$

mentre, se $c_{-1} = c'_{-1}$, sarà necessario confrontare le seconde cifre decimali a destra della virgola, con la stessa regola:

$$\begin{cases} c_{-2} < c'_{-2} \ \Rightarrow \ x < y, \\ c_{-2} > c'_{-2} \ \Rightarrow \ x > y, \end{cases}$$

mentre, se $c_{-2} = c'_{-2}$, sarà necessario confrontare le terze cifre decimali a destra della virgola, con la stessa regola, e così via......

Notazione. Disponendo delle relazioni $\leq$ e $<$ su $\mathbb{R}$, diremo d'ora in poi che un numero $x \in \mathbb{R}$ è positivo se $0 \leq x$, cioè $x \geq 0$; strettamente positivo se $0 < x$, cioè $x > 0$; negativo se $x \leq 0$; strettamente negativo se $x < 0$. Definiamo

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}\,, \qquad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}\,.$$

Proprietà della relazione d'ordine. Ricordiamo le principali proprietà della relazione $\leq$:

$$\begin{cases} x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z, \\ x \leq y, \ z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz, \\ x \leq y, \ z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \geq yz \end{cases} \qquad \forall\, x, \, y, \, z \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.1}$$

Le stesse proprietà valgono per la relazione $<$. Inoltre,

$$\forall\, x, \, y \in \mathbb{R} \qquad 0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0\,.$$

1.4.2 Il modulo di un numero reale

Definizione 1.4.1. *Dato $x \in \mathbb{R}$, il* modulo *(o* valore assoluto*) di x è il numero reale* **positivo** *definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0, \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}\,.$$

Proprietà del valore assoluto. Si ha $\forall\, a, \, b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geq 0 \text{ e } |a| = 0 \text{ se e solo se } a = 0; \tag{1.4.2a}$$

$$|a| = |-a|; \tag{1.4.2b}$$

$$|ab| = |a||b|; \tag{1.4.2c}$$

$$|a - b| \leq |a| + |b| \text{ e } |a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.4.2d}$$

Disuguaglianze con il valore assoluto. Ricordiamo che, dati a, $b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$,

$$|x - b| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x - b \leq a$$
$$|x - b| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x - b \geq a \text{ o } x - b \leq -a$$

Infine, ricordiamo il seguente fatto

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.3}$$

In generale,

$$\text{se } n \text{ è pari} \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.4}$$

1.4.3 Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Intuitivamente, questo significa che non solo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ma anche che i numeri razionali sono "fitti" in $\mathbb{R}$. Più precisamente, ogni numero $x \in \mathbb{R}$ può essere approssimato arbitrariamente bene da un numero razionale: in altri termini, comunque si fissi una tolleranza (cioè, un margine d'errore) $t > 0$, esiste un numero $y \in \mathbb{Q}$ tale che $-t < x - y < t$ (cioè, y dista da x meno di t). In simboli:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0\ \ \exists\, y \in \mathbb{Q}\ :\ \ |x - y| < t\,. \tag{1.4.5}$$

Se ne deduce che

$$\forall \text{coppia di numeri reali } x_1 < x_2 \text{ esistono infiniti numeri } q \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x_1 < q < x_2. \tag{1.4.6}$$

Si può dimostrare che anche l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso (nel senso appena specificato) in $\mathbb{R}$.

1.4.4 L'assioma di completezza

Per formalizzare l'assioma (o proprietà) di completezza di $\mathbb{R}$, introduciamo alcune definizioni.

Definizione 1.4.2 (Maggiorante). *Consideriamo un insieme $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$.*

- *Si dice che un numero reale $M \in \mathbb{R}$ è un* maggiorante *per A se*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leq M\,.$$

- *Se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto, si dice che A è* limitato superiormente. *Se A è privo di maggioranti, si dice che A è* illimitato superiormente.

Analogamente,

Definizione 1.4.3 (Minorante). *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$.*

- *Si dice che un numero reale $m \in \mathbb{R}$ è un* minorante *per A se*

$$\forall\, x \in A, \quad x \geq m\,.$$

- *Se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto, si dice che A è* limitato inferiormente. *Se A è privo di minoranti, si dice che A è* illimitato inferiormente.

Definizione 1.4.4. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$. Diciamo che A è limitato se esso è sia superiormente, sia inferiormente limitato.*

Esempio 1.4.5. 1. Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \le x < 1\} \ .$$

A è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di A è: $\mathcal{M}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\}$. A è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di A è: $m(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \le -1\}$.

2. Si consideri l'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \le 1\} \ .$$

B è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di B è: $\mathcal{M}(B) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\}$. B è illimitato inferiormente.

3. Si consideri l'insieme

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{2^n} \ n \in N \right\} \ .$$

Si noti che C ha infiniti elementi e che $0 \notin C$. C è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di C è: $\mathcal{M}(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\}$. C è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di C è: $m(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$.

4. Si consideri l'insieme

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x^2 \le 2 \right\} \ .$$

Si noti che D è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$. D è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di D è: $\mathcal{M}(C) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge \sqrt{2}\}$. D è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di D è: $m(D) = \{x \in \mathbb{R} : x \le -\sqrt{2}\}$.

Definizione di estremo superiore di un insieme.

Definizione 1.4.6. *Sia A un insieme non vuoto. Diciamo che un numero reale M^* è* l'estremo superiore *di A se valgono (contemporaneamente) le seguenti condizioni:*

1. *M^* è un maggiorante per A;*
2. *$M^* \le M$ per ogni maggiorante M di A*[12].

Useremo la notazione $M^* = \sup(A)$.

Unicità dell'estremo superiore. Si noti che, nella definizione di *estremo superiore*, è stato usato l'articolo determinativo "il". Questo è dovuto al fatto che, mentre un insieme può avere in generale più di un maggiorante (anche infiniti maggioranti, si veda l'Esempio 1.4.5), **l'estremo superiore di un insieme, se esiste, è unico**. Per dimostrare ciò, supponiamo per assurdo che un dato insieme A possieda due estremi superiori M_1^* e M_2^*, con $M_1^* \neq M_2^*$. Per definizione di sup, si deve avere $M_1^* \le M_2^*$ (in quanto M_2^* è un maggiorante e M_1^* il più "piccolo" fra i maggioranti). Ragionando allo stesso modo, si ha $M_2^* \le M_1^*$. Ma allora $M_1^* = M_2^*$, in contraddizione con quanto supposto.

Si noti che, nella definizione di *estremo superiore*, non viene richiesto che M^* appartenga all'insieme A. Quando ciò accade, M^* viene detto *massimo* di A.

Definizione 1.4.7. *Sia A un insieme non vuoto e sia $M^* = \sup(A)$. Se $M^* \in A$, allora diciamo che M^* è il* massimo *di A e scriviamo $M^* = \max(A)$.*

[12] cioè M^* è "il più piccolo" fra i maggioranti di A.

Definizione di estremo inferiore di un insieme.

Definizione 1.4.8. *Sia A un insieme non vuoto. Diciamo che un numero reale m_* è l'*estremo inferiore *di A se valgono (contemporaneamente) le seguenti condizioni:*

1. *m_* è un minorante per A;*
2. *$m_* \geq m$ per ogni minorante m di A* [13].

Useremo la notazione $m_* = \inf(A)$.

Ragionando come per il sup, si dimostra che **l'inf di un dato insieme, se esiste, è unico**.

Definizione 1.4.9. *Sia A un insieme non vuoto e sia $m_* = \inf(A)$. Se $m_* \in A$, allora diciamo che m_* è il* minimo *di A e scriviamo $m_* = \min(A)$.*

Esempio 1.4.10.

1. Si consideri l'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x < 1\} .$$
Si ha $\inf(A) = -1 \in A$ e quindi $\inf(A) = \min(A) = -1$. Inoltre, $\sup(A) = 1 \notin A$: quindi 1 non è il massimo di A. Siccome $\sup A$ è l'unico candidato a essere il massimo di A, concludiamo che l'insieme A non ha massimo.

2. Si consideri l'insieme
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} .$$
Si ha $\sup(B) = \max(B) = 1$.

3. Si consideri l'insieme
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{2^n} \ n \in N\right\} .$$
Si ha $\sup(C) = \max(C) = 1$. D'altronde, $\inf(C) = 0 \notin C$, quindi C non ha minimo.

4. Si consideri l'insieme
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 2\right\} .$$
Si ha $\sup(D) = \max(D) = \sqrt{2}$ e $\inf(D) = \min(D) = -\sqrt{2}$.

Questi esempi sembrano suggerire che, non appena un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è superiormente (rispettivamente, inferiormente) limitato, esso ammette sup **in** $\mathbb{R}$ (risp., inf **in** $\mathbb{R}$). Questo è vero **nell'insieme ambiente** $\mathbb{R}$, ed è proprio quanto viene affermato da[14]

Assioma di completezza per l'insieme dei numeri reali. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se A è superiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un maggiorante), allora A ha l'estremo superiore* ***in*** *$\mathbb{R}$.*

Analogamente, se A è inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un minorante), allora A ha l'estremo inferiore ***in*** *$\mathbb{R}$.*

Si noti che l'assioma di completezza **NON** afferma che ogni insieme superiormente limitato in $\mathbb{R}$ ha il massimo (o che ogni insieme inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ ha il minimo): l'esistenza del massimo (del minimo, risp.) dipende dal fatto che il sup appartenga all'insieme (che l'inf appartenga all'insieme).

[13] cioè m_* è "il più grande" fra i minoranti di A.

[14] *Assioma* significa "proprietà che si accetta per vera, senza dimostrazione".

Osservazione 1.4.11. Osserviamo che l'insieme $\mathbb{Q}$ non gode della proprietà enunciata dall'assioma di completezza: in altri termini, esistono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ superiormente limitati (rispettivamente, inferiormente limitati) che non ammettono estremo superiore in $\mathbb{Q}$ (risp., estremo inferiore in $\mathbb{Q}$). Infatti, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{Q} \, : \, x^2 \leq 2\right\}$$

e dimostriamo che esso, pur avendo maggioranti in $\mathbb{Q}$ (l'insieme dei maggioranti in $\mathbb{Q}$ per $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$ è $\{x \in \mathbb{Q} \, : \, x \geq \sqrt{2}\}$, quindi per esempio i numeri $\frac{3}{2}$ e 2 sono maggioranti, in $\mathbb{Q}$, per $\mathcal{H}$), non ha sup in $\mathbb{Q}$[15].

Notiamo infatti che $\mathcal{H}$, essendo un sottoinsieme (superiormente limitato) di $\mathbb{R}$, ammette sup in $\mathbb{R}$. Chiamiamo $S := \sup_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$. È immediato osservare che $S = \sqrt{2}$. Ora, per assurdo esista l'estremo superiore $q \in \mathbb{Q}$ di $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$ (quindi q è il "più piccolo" fra tutti i maggioranti di $\mathcal{H}$ che sono numeri razionali). Necessariamente deve essere $q \neq \sqrt{2}$. Inoltre, non è difficile osservare che deve essere $q > \sqrt{2}$. Ma allora, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (si ricordi la (1.4.6)) esistono infiniti $y \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{2} < y < q$. Si noti che tali y sono dei maggioranti razionali per l'insieme $\mathcal{H}$, e che essi sono strettamente minori di q. Questo contraddice il fatto che q sia l'estremo superiore di $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$. Assurdo.

Ne concludiamo che $\mathcal{H}$ non ammette sup in $\mathbb{Q}$.

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathbb{R}$ si possono rappresentare geometricamente come punti di una retta.

Per fare ciò, si fissa un punto O (detto origine) sulla retta, al quale viene associato il numero 0, e un altro punto U. Si conviene che il verso di percorrenza della retta da O a U sia considerato il *verso positivo*, e il verso opposto sia preso come verso negativo. In questo modo, vengono individuate sulla retta:

- una semiretta positiva (la semiretta che contiene U),
- una semiretta negativa.

Per convenzione, la lunghezza del segmento OU viene presa come *unità di misura.*

Dopodiché, dato un punto P sulla retta, a esso viene associato un unico numero reale x in questo modo: si considera la lunghezza $\overline{OP}$ del segmento OP e si definisce

$$x := \begin{cases} \overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta positiva,} \\ -\overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta negativa} \end{cases} .$$

Il numero reale x viene detto *ascissa* del punto P. Viceversa, fissato $x \in \mathbb{R}$, a esso viene associato uno e un solo punto P sulla retta in questo modo:

$$\begin{cases} x > 0 & \leftrightarrow \quad P \text{ nella semiretta positiva tale che } \overline{OP} = x, \\ x < 0 & \leftrightarrow \quad P \text{ nella semiretta negativa tale che } \overline{OP} = -x, \\ x = 0 & \leftrightarrow \quad O \end{cases} .$$

D'ora in poi, useremo il termine *retta reale* come sinonimo dell'insieme dei numeri reali.
Interpretazione geometrica del modulo. Ricordando che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ è univocamente associato un punto P sulla retta reale, il numero $|x|$ è la distanza di P dall'origine O.
Più in generale, dati $x, y \in \mathbb{R}$, il numero $|x - y|$ coincide con la distanza fra i corrispondenti punti P_x e P_y sulla retta reale.

[15]**Esercizio!**: ragionando allo stesso modo, dimostrare che $\mathcal{H}$ non ha inf in $\mathbb{Q}$, pur avendo minoranti in $\mathbb{Q}$.

1.4.5 La nozione di intervallo e la retta reale estesa

Definizione 1.4.12. *Un sottoinsieme $I \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}$ viene detto* intervallo *se, presi due qualunque suoi punti $x < y$, tutti i punti compresi fra x e y appartengono ancora ad I.*

Ad esempio, l'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} \quad \text{è un intervallo,}$$
mentre l'insieme
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 0\} \quad \text{NON è un intervallo.}$$

Tipologia degli intervalli limitati. Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Distinguiamo quattro tipi di intervalli *limitati* (nel senso della Definizione 1.4.4):

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ *intervallo aperto,*
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ *intervallo semiaperto a destra,*
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ *intervallo semiaperto a sinistra,*
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ *intervallo chiuso.*

Dato un intervallo I limitato, si definisce ampiezza dell'intervallo il numero $\sup(I) - \inf(I)$.

Definizione 1.4.13 (Intorno di un punto)**.** *Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, chiamiamo* intorno *aperto (rispettivamente, chiuso) di x_0 di raggio r l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ (risp., l'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$). Denoteremo l'intorno aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ anche con il simbolo $I(x_0, r)$.*

N.B.: si ha che
$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < r\} \ .$$

La retta reale estesa. Estendiamo la retta reale $\mathbb{R}$ con i simboli $+\infty$ e $-\infty$, **che non sono da considerarsi numeri reali!!!!** In effetti, osserviamo che
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ \exists\, y \in \mathbb{R} : \ \ y > x$$
in altri termini, non esistono maggioranti reali per l'insieme $\mathbb{R}$. Analogamente,
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ \exists\, y \in \mathbb{R} : \ \ y < x$$
cioè l'insieme $\mathbb{R}$ non ammette minoranti (in $\mathbb{R}$). Li introduciamo quindi con la seguente

Definizione 1.4.14. *Definiamo il simbolo $+\infty$ mediante la disuguaglianza*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < +\infty\,. \tag{1.4.7}$$
Definiamo il simbolo $-\infty$ mediante la disuguaglianza
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x > -\infty\,. \tag{1.4.8}$$
Chiamiamo retta reale estesa *l'insieme $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Osserviamo che $\overline{\mathbb{R}}$ eredita da $\mathbb{R}$ la relazione d'ordine, completata dalle disuguaglianze (1.4.7)–(1.4.8). Quindi $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato, e si ha che

- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty$ è un maggiorante per A;
- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $-\infty$ è un minorante per A.

Teorema 1.4.15. *Per ogni* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, *esistono* $\sup(A), \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.
In particolare, se $A \subset \mathbb{R}$, *si ha che*

1. $\sup(A) = +\infty$ *se e solo se* A non *è superiormente limitato;*
2. $\inf(A) = -\infty$ *se e solo se* A non *è inferiormente limitato;*
3. $\sup(\emptyset) = -\infty$ *e* $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo che $\sup(\emptyset) = -\infty$ (con un ragionamento analogo (**esercizio!**) si ottiene anche che $\inf(\emptyset) = +\infty$). Innanzitutto osserviamo che

$$\text{l'insieme dei maggioranti di } \emptyset \text{ è } \overline{\mathbb{R}}. \tag{1.4.9}$$

In effetti, proviamo a negare la (1.4.9): $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}$ che non è un maggiorante per $\emptyset$, cioè $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\exists x \in \emptyset$ verificante $x > y$. Ma questa affermazione è palesemente falsa, in quanto contiene il termine $\exists x \in \emptyset$. Allora (1.4.9) è vera. Tenendo conto della definizione di sup, concludiamo che $\sup(\emptyset) = -\infty$. □

Intervalli illimitati. Possiamo ora introdurre la notazione per gli intervalli illimitati. Sia $a \in \mathbb{R}$. Distinguiamo quattro tipi di intervalli:

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *semiretta aperta a sinistra*,
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ *semiretta aperta a destra*,
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *semiretta chiusa a sinistra*,
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ *semiretta chiusa a destra*.

Il simbolo $(-\infty, +\infty)$ è un modo alternativo di denotare $\mathbb{R}$, mentre $[-\infty, +\infty]$ denota la retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$.

Capitolo 2

Prime proprietà delle funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione 2.1.1. *Siano A e B due insiemi non vuoti. Una* funzione *f definita su A e a valori in B ($f : A \to B$) è una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa* uno e un solo *elemento $f(x) \in B$. In questo contesto, l'insieme A è detto il* dominio *di f e B il* codominio *di f.*

Si noti che il codominio non è univocamente definito: se $f : A \to B$, allora ogni insieme C tale che $B \subset C$ è un codominio per f. Denoteremo il dominio di f (detto anche *insieme di definizione* di f) con i simboli: $\mathrm{dom}(f)$, D_f. Inoltre, useremo la notazione

$$x \in \mathrm{dom}(f) \mapsto f(x)$$

per denotare la legge che alla *variabile indipendente* x associa la sua *immagine* $f(x)$.

Definizione 2.1.2. *Data una funzione $f : A \to B$ (quindi $A = \mathrm{dom}(f)$), chiamiamo:*

1. insieme immagine *di f l'insieme*

$$\mathrm{im}(f) := \{y \in B \,:\, y = f(x),\ x \in A\}$$

(useremo anche la notazione $f(A)$);

2. grafico *di f l'insieme*

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B : x \in A,\ y = f(x)\}\ .$$

Esempio 2.1.3. 1. Consideriamo la funzione f che a ogni numero reale non negativo r associa l'area del cerchio di raggio r, cioè $f(r) := \pi r^2$ per ogni $r \geq 0$. In questo caso $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^+$, e $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^2$.

2. Sia L una lamina piana (quindi L può essere identificata con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) e consideriamo la funzione T che al generico punto $(x, y) \in L$ associa la temperatura della lamina in tale punto. In questo caso $\mathrm{dom}(f) = L \subset \mathbb{R}^2$, mentre $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^+$, e $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^3$.

3. La legge $f : \{-1, 1\} \to \{a, b, c\}$ definita da
$$f(-1) = a, \quad f(1) = c, \quad f(-1) = b$$
NON È una funzione: ribadiamo che ad ogni elemento del dominio deve essere associato **uno e un solo** elemento del codominio.

Nel seguito considereremo solo funzioni a valori reali, di una sola variabile reale, cioè funzioni della forma
$$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}, \quad \text{ove } \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^1.$$
Si noti che, in questo caso,
$$\mathrm{graf}(f) \subset \mathrm{dom}(f) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Osservazione 2.1.4. Segue dalla definizione di funzione che è proibito che, dato un certo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$, esistano y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$, con $y_1 \neq y_2$, tali che $(\bar{x}, y_1)$ e $(\bar{x}, y_2) \in \mathrm{graf}(f)$: se così fosse, si avrebbe infatti $f(\bar{x}) = y_1$ e $f(\bar{x}) = y_2$, cioè a $\bar{x}$ verrebbero associati due diversi elementi y_1 e y_2.

Infatti, **condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ sia il grafico di una funzione è che ogni retta parallela all'asse delle y intersechi tale sottoinsieme in al massimo un punto.**

Ribadiamo che una funzione si considera ben definita quando vengono forniti:

- sia la formula che definisce f,
- sia il dominio di f.

Quindi, due funzioni f_1 e f_2 coincidono se e solo se
$$\mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2) \ \text{ e } \ f_1(x) = f_2(x) \ \forall\, x \in \mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2).$$
Ad esempio, le funzioni $f_1(x) = x^2 \ \forall\, x \geq 0$ e $f_2(x) = x^2 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ **non coincidono**, cosa che si può vedere anche dal confronto fra i rispettivi grafici: il grafico di f_2 è la parabola $y = x^2$, mentre il grafico di f_1 è il ramo della parabola $y = x^2$ contenuto nel primo quadrante.

Il dominio naturale di definizione. Quando una funzione di variabile reale e a valori reali è data senza che ne venga specificato il dominio, si sottintende che il suo dominio sia l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali il valore $f(x)$ ha senso ed è un numero reale.

Esempio 2.1.5. 1.
$$f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 1}\,.$$
In questo caso, $\mathrm{dom}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.
$$f_2(x) := \sqrt{4 - x^2}\,.$$
In questo caso, $\mathrm{dom}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : \ 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$.

2.2 Funzioni suriettive e iniettive

Preliminarmente, diamo la seguente

Definizione 2.2.1. *Sia $f : A \to B$. Dato $y \in B$, un elemento $x \in A$ si chiama* controimmagine *di y tramite f se esso verifica*

$$f(x) = y.$$

Denotiamo con $f^{-1}(\{y\})$ l'insieme (eventualmente vuoto) delle controimmagini di y tramite f.

È chiaro che

$$y \in \mathrm{im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\,. \tag{2.2.1}$$

Osservazione 2.2.2 (Interpretazione grafica della controimmagine nel caso di funzioni reali di variabile reale)**.** Data $f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un valore $\bar{y} \in \mathbb{R}$, si può individuare graficamente l'insieme controimmagine di $\bar{y}$ $f^{-1}(\{\bar{y}\})$ in questo modo: si considera la retta orizzontale $y = \bar{y}$ e se ne cercano intersezioni con graf(f):

- se $y = \bar{y}$ non interseca graf(f) in alcun punto, allora $f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \emptyset$;
- viceversa, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in$ graf(f) (chiaramente $(x, \bar{y})$ appartiene alla retta $y = \bar{y}$), si ha che $\bar{x} \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$.

Suriettività.

Ricordando la Definizione 2.1.2 di insieme immagine, diamo la seguente:

Definizione 2.2.3. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* suriettiva *se $\mathrm{im}(f) = B$ (cioè quando l'insieme immagine di f coincide con il codominio).*

Osservazione 2.2.4. Si osservi che se consideriamo una funzione $f : A \to B$ come a valori nell'insieme immagine di f, cioè $f : A \to \mathrm{im}(f)$ (questo è possibile: anche $\mathrm{im}(f)$ è un codominio ammissibile), allora

$$f : A \to \mathrm{im}(f) \quad \text{è suriettiva.}$$

Questo mostra che la suriettività di una funzione dipende dalla scelta del codominio.

Osservazione 2.2.5 (Importante). *Nel caso di una funzione reale di variabile reale, cioè*

$$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}, \quad \textit{ove } \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R},$$

considereremo sempre come codominio l'insieme $\mathbb{R}$. Quindi

$$f \textit{ è suriettiva se } \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}.$$

Osservazione 2.2.6 (Interpretazione grafica di suriettività per funzioni reali di variabile reale)**.** Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Segue da (2.2.1) e dalla discussione sviluppata nell'Osservazione 2.2.2 che un numero reale $\bar{y}$ appartiene all'insieme immagine di f se, considerando la retta parallela all'asse x e passante per il punto $y = \bar{y}$ (cioè la retta $y = \bar{y}$), tale retta interseca il graf(f) in almeno un punto. Quindi:

- f è suriettiva se, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$ interseca graf(f) in **almeno** un punto.

Iniettività.

Definizione 2.2.7. *Sia* $f : A \to B$. *Diciamo che* f *è* iniettiva *se*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \,, \tag{2.2.2}$$

o, equivalentemente,

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2) \,.$$

Si noti che con la (2.2.2) si richiede che

$$\text{ogni elemento } y \in B \text{ abbia al più una controimmagine;} \tag{2.2.3}$$

cioè, se $y \in B \setminus \mathrm{im}(f)$, si avrà $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, mentre se $y \in \mathrm{im}(f)$, l'insieme $f^{-1}(\{y\})$ consisterà di un solo elemento[2]. In altri termini, a ogni elemento $y \in \mathrm{im}(f)$ viene associata una e una sola controimmagine $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Osservazione 2.2.8 (Interpretazione grafica di iniettività per funzioni reali di variabile reale)**.** Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Segue da (2.2.3) e dalla discussione sviluppata nell'Osservazione 2.2.2 che

- f è iniettiva se, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$ interseca graf(f) in **al più**[3] un punto.

Concludiamo con la seguente definizione, che non verrà mai richiamata nel seguito delle dispense, ma che comunque diamo per completezza di esposizione.

Definizione 2.2.9. *Sia* $f : A \to B$. *Diciamo che* f *è* biiettiva *se*

- f *è suriettiva,*
- f *è iniettiva.*

Ricordando l'Osservazione 2.2.4, notiamo che, se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora, prendendo come codominio di f il più piccolo insieme possibile (cioè $\mathrm{im}(f)$), si ha che $f : A \to \mathrm{im}(f)$ è chiaramente biiettiva. Questo evidenzia che la biettività di una funzione dipende dalla scelta del codominio.

2.3 Invertibilità

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, ove $D_f \subset \mathbb{R}$, una funzione iniettiva. Segue da (2.2.3) che

$$\forall y \in \mathrm{im}(f) \;\; \exists!\, x \in D_f \;:\; f(x) = y \,. \tag{2.3.1}$$

Possiamo quindi considerare la funzione che a ogni $y \in \mathrm{im}(f)$ associa l'unico $x \in D_f$ verificante $f(x) = y$. Tale funzione avrà quindi come dominio l'insieme immagine di f, e come codominio il dominio di f.

Definizione 2.3.1. *Sia* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *una funzione iniettiva. Chiamiamo* funzione inversa *di* f *la funzione* $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to D_f$ *definita da*

$$\forall y \in \mathrm{im}(f), \quad f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \,. \tag{2.3.2}$$

Sottolineiamo che **la sola iniettività è sufficiente a garantire l'invertibilità.**

[2] Gli insiemi costituiti da un unico elemento vengono detti *singoletti.*
[3] cioè uno solo oppure nessuno

Proprietà della funzione inversa.

- $$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)\,, \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)\,.$$

  La prima uguaglianza viene dalla definizione di funzione inversa, mentre con

  $$\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$$

  affermiamo che non solo $\mathrm{dom}(f)$ è il codominio di f^{-1}, ma coincide l'insieme immagine di f^{-1}.

  Verifichiamo ciò: fissato $x \in \mathrm{dom}(f)$, bisogna trovare una controimmagine di x tramite f^{-1}, cioè un $y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ tale che $f^{-1}(y) = x$, cioè, per la definizione di f^{-1}, $y = f(x)$. Ma allora dato $x \in \mathrm{dom}(f)$, prendiamo come sua controimmagine tramite f^{-1} proprio $f(x)$.

  In questo modo concludiamo che $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{im}(f^{-1})$.

  L'inclusione opposta $\mathrm{im}(f^{-1}) \subset \mathrm{dom}(f)$ (che ci permette di concludere l'uguaglianza fra i due insiemi) deriva dal fatto che, per definizione di funzione inversa, $\mathrm{dom}(f)$ è (un) codominio per f^{-1}.

- la funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ è iniettiva. In effetti, siano dati y_1, $y_2 \in \mathrm{im}(f)$ tali che $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$. Chiamiamo x l'elemento $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \in \mathrm{dom}(f)$. Per definizione di f^{-1}, $x = f^{-1}(y_1)$ equivale a $f(x) = y_1$ e analogamente $x = f^{-1}(y_2)$ equivale a $f(x) = y_2$. Ma f è una funzione: quindi a x viene associato uno e un solo elemento tramite f. Necessariamente y_1 e y_2 coincidono, il che prova l'iniettività di f^{-1}.

- La funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ è biiettiva. Questo è chiaro poiché essa è iniettiva e il suo codominio $\mathrm{dom}(f)$ coincide con il suo insieme immagine $\mathrm{im}(f^{-1})$.

D'ora in poi, useremo indifferentemente la lettera y o la x per denotare la variabile indipendente della funzione inversa f^{-1}.

Il grafico della funzione inversa. Il grafico di f^{-1} si ottiene considerando la curva simmetrica del $\mathrm{graf}(f)$ rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$.

2.4 Funzioni pari, dispari, e periodiche

2.4.1 Parità e disparità

Definizione 2.4.1. *Diciamo che un insieme $D \subset \mathbb{R}$ è* simmetrico rispetto all'origine *se gode della seguente proprietà:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad x \in D \quad \Leftrightarrow \quad -x \in D\,.$$

Ad esempio, sono insiemi simmetrici rispetto all'origine tutti gli intervalli della forma $(-M, M)$, con $M > 0$. Ma anche l'insieme $I = \{7\} \cup [-5, -3) \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup (3, 5] \cup \{7\}$ è simmetrico rispetto all'origine.

Definizione 2.4.2. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, con $D_f \subset \mathbb{R}$* simmetrico rispetto all'origine. *Diciamo che*

- *f è* pari *se*
  $$f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f\,;$$

- f *è* dispari *se*
$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f\,.$$

Si noti che:

- la definizione di funzione pari/dispari ha significato solo su domini simmetrici rispetto all'origine;
- se $D_f \subset \mathbb{R}$ è *simmetrico rispetto all'origine* e $\mathbf{0 \in D_f}$, e se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari, necessariamente $f(0) = 0$[4].
- Se una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è pari o dispari, allora il suo grafico ha la seguente notevole proprietà:
  - se f è pari, allora graf(f) è **simmetrico rispetto all'asse** y;
  - se f è dispari, allora graf(f) è **simmetrico rispetto all'origine degli assi**.

  Quindi, per disegnare il grafico qualitativo di una funzione pari o dispari, è sufficiente conoscerne l'andamento solo per $x \geq 0$: il grafico completo si otterrà facendo l'opportuna simmetria.

2.4.2 Periodicità

Definizione 2.4.3. *Sia $T > 0$ e $D \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto con la proprietà che*
$$\forall\, x \in D, \qquad x + T \in D\,. \tag{2.4.1}$$
Diciamo che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T *(brevemente, T-*periodica*), se si ha*
$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall\, x \in D\,. \tag{2.4.2}$$

Godono della proprietà (2.4.1) per esempio gli insiemi $D = \mathbb{R}$, per ogni $T > 0$, e $D = \mathrm{dom}(\tan)$, per $T = \pi$, (si denota tan la funzione tangente, che verrà definita nella Sezione 2.5.7.
Si noti che se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione T-periodica, f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il minimo $T' > 0$ per il quale f è periodica di periodo T', se esiste, viene chiamato *periodo minimo.*
Nel seguito presentiamo alcuni notevoli esempi di funzioni periodiche.

2.5 Funzioni elementari

Vengono comunemente definite *funzioni elementari* le

- le funzioni potenza a esponente naturale, intero, razionale, e reale;
- le funzioni esponenziali di base $a > 0$;
- le funzioni logaritmiche di base $a > 0$, con $a \neq 1$;

[4] in quanto, per la disparità, si ha $f(0) = -f(-0) = -f(0)$: l'unica possibilità perché valga ciò è che $f(0)$ sia 0.

- le funzioni trigonometriche sin, cos, tan[5];
- le funzioni trigonometriche inverse arcsin, arccos, arctan.

Ricordiamo brevemente alcune proprietà delle funzioni elementari. Per i grafici delle funzioni elementari rimandiamo alla tabella distribuita a lezione.
I GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI DEVONO ESSERE MEMORIZZATI.

2.5.1 Le funzioni potenza a esponente naturale

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

1. Per $n = 0$, otteniamo la funzione costante

$$f(x) = x^0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si ha che $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di tale funzione è la retta $y = 1$. Chiaramente $\mathrm{im}(f) = \{1\}$, quindi f non è né suriettiva, né iniettiva. f è pari. f è periodica con periodo $T > 0$ **per ogni** $T > 0$ (quindi f non ha periodo minimo). **Le considerazioni appena sviluppate valgono anche per la generica funzione costante $\mathbf{f(x) \equiv c}$**, con $c \in \mathbb{R}$.

2. Per $n = 1$, otteniamo la funzione identità

$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   Il suo grafico è la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$. È immediato vedere che f è iniettiva e che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre f è dispari.

   - più in generale, consideriamo la funzione lineare

$$f(x) = ax + b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

     Il suo grafico è la retta $y = ax + b$. f è iniettiva e $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre, f è dispari se e solo se $b = 0$.
   - A partire dalla funzione identità definiamo la funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

     Si vede subito che l'insieme immagine della funzione modulo è la semiretta positiva $[0, +\infty)$, quindi $|\cdot|$ non è suriettiva. Essendo

$$|x| = |-x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

     (in virtù della definizione di modulo), si ha che la funzione modulo $|\cdot|$ è pari, e quindi non è neppure iniettiva.

[5] non tratteremo le funzioni *cotangente* cot, *secante* sec, *cosecante* csc, e neppure le funzioni iperboliche sinh, cosh, tanh, coth..

3. Per $n = 2$, otteniamo la funzione quadratica

$$f(x) = x^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la parabola $y = x^2$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$ (quindi f non è suriettiva). Inoltre f è pari, quindi non è iniettiva. Notiamo tuttavia che le funzioni

$$\left.\begin{array}{ll} f|_{[0,+\infty)} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } [0, +\infty), \\ f|_{(-\infty,0]} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } (-\infty, 0], \end{array}\right. \quad \text{sono iniettive.}$$

4. Per $n = 3$, otteniamo la funzione cubica

$$f(x) = x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la curva cubica $y = x^3$. Si vede che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è suriettiva. Inoltre f è iniettiva. Si verifica immediatamente che f è dispari.

5. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale pari**

$$f(x) = x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^2$.

6. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale dispari**

$$f(x) = x^{2k+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^3$.

Definizione 2.5.1. *Chiamiamo* funzione polinomiale *una funzione $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

ove i coefficienti a_i, $i = 1, \ldots, n$, sono numeri reali, con $a_n \neq 0$, e il numero $n \in \mathbb{N}$ viene detto grado del polinomio.

2.5.2 Le funzioni potenza a esponente intero negativo

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad n > 0, \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

1. Per $n = 1$, otteniamo la funzione reciproco

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Il suo grafico è l'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi f non è suriettiva. f è iniettiva e dispari.

2. Per $n = 2$, otteniamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. Inoltre, f è pari, quindi non è iniettiva.

3. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo pari**

$$f(x) = x^{-2k} := \frac{1}{x^{2k}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-2}$.

4. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo dispari**

$$f(x) = x^{-(2k+1)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-3}$.

Definizione 2.5.2. *Chiamiamo* funzione razionale fratta *una funzione data dal quoziente di due polinomi, cioè della forma*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad \begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n, \quad a_n \neq 0 \\ b_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, m, \quad b_m \neq 0 \end{cases}.$$

Il dominio di f è allora $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

2.5.3 Inverse delle funzioni potenza a esponente naturale (strettamente positivo)

- La funzione identità $f(x) = x$ è iniettiva su $\mathbb{R}$, quindi invertibile. Poichè $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, la funzione inversa f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$. Si vede immediatamente che $f(x) = x$ coincide con la sua inversa.

- Più in generale, la funzione lineare $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, è invertibile. Essendo $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, si ha che f^{-1} è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si verifica immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Prima di introdurre le inverse delle funzioni potenza $f(x) = x^n$, con $n \geq 2$, diamo la seguente

Definizione 2.5.3. *Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $x \in [0, +\infty)$. Chiamiamo* radice n-esima di x *l'unico numero $y \in [0, +\infty)$ verificante $y^n = x$. Useremo la notazione $y = \sqrt[n]{x}$.*

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $n \geq 2$, n **pari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari, quindi non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. **Si conviene di considerare la restrizione di f alla semiretta** $[0, +\infty)$. Tale restrizione ha ancora come insieme immagine la semiretta $[0, +\infty)$ ed è una funzione iniettiva, quindi invertibile. La funzione inversa avrà quindi come dominio la semiretta $[0, +\infty)$, e come insieme immagine il dominio della restrizione di x^n a $[0, +\infty)$. Allora l'insieme immagine della funzione inversa è $[0, +\infty)$. Si vede immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

2. $n \geq 2$, n **dispari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è iniettiva, quindi è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Il suo insieme immagine è $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$, con $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Si ha

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,. \end{cases}$$

In generale, useremo la notazione $x^{1/n}$ per la funzione inversa di x^n. Si hanno quindi le formule

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ PARI},$$

$$x^{1/n} = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ DISPARI}.$$

2.5.4 Le funzioni potenza a esponente razionale e reale

Funzioni potenza a esponente razionale. Vogliamo ora definire le funzioni $f(x) = x^q$, con $q \in \mathbb{Q}$. Distingueremo il caso $q > 0$ dal caso $q < 0$[6].

- $q > 0$: allora $q = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$, e concordi. Non è limitativo supporre che m e n siano entrambi strettamente positivi. Allora definiamo

$$x^q = x^{m/n} := (x^{1/n})^m \qquad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari}, \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

- caso $q < 0$. Non è limitativo supporre che $q = -\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 0$. Allora definiamo

$$x^q = x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}} \qquad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = (0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari}, \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Osserviamo quindi che **il dominio naturale della generica funzione x^q è $(0, +\infty)$.**

Funzioni potenza a esponente reale. Dato $r \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione potenza $x \mapsto x^r$ sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Quest'ultima proprietà assicura infatti che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, q \in \mathbb{Q} : \quad |r - q| < \varepsilon,$$

cioè che il numero reale $r \in \mathbb{R}$ può essere approssimato "arbitrariamente bene" da numeri razionali $q \in \mathbb{Q}$. Allora si può definire x^r tramite approssimazione[7] con le potenze x^q, $q \in \mathbb{Q}$, che abbiamo testè definito. Poiché il dominio naturale della generica potenza x^q è $(0, +\infty)$, abbiamo che

per ogni $r \in \mathbb{R}$, il dominio naturale della funzione $x \mapsto x^r$ è $(0, +\infty)$.

[6] abbiamo già studiato il caso $q = 0$!

[7] lo sviluppo rigoroso di questo procedimento di approssimazione si basa sulla nozione di *limite di una successione*, che non verrà affrontata in questo corso.

2.5.5 Le funzioni esponenziali

Sia a un numero reale strettamente positivo e consideriamo la funzione esponenziale di base a

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x, \qquad \text{con dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

Si osservi che, per dare senso alla potenza a^x con esponente reale x, il numero a deve essere strettamente positivo!

Proprietà delle funzioni esponenziali. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$ le seguenti proprietà:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
5. $(ab)^x = a^x b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $b > 0$.

Abbiamo tre tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni esponenziali:

1. $a = 1$. In questo caso $f(x) = 1^x \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè ritroviamo la funzione costantemente uguale a 1.
2. $a > 1$. In questo caso $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva. Un caso notevole si ha per $a = e = 2,7218......$, la costante di Nepero (o costante di Eulero). Nel caso $a = e$ si usa

   $$\text{la notazione alternativa} \quad e^x \equiv \exp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

3. $0 < a < 1$. In questo caso $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva.

Si noti la relazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, a > 0\,,$$

che permette di passare dal caso 2. al caso 3. e viceversa.

2.5.6 Le funzioni logaritmiche

Le funzioni esponenziali $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ sono iniettive (quindi invertibili) per $a \neq 1$ e, in tal caso, hanno come insieme immagine $(0, +\infty)$.

Definizione 2.5.4. *Sia $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Chiamiamo* funzione logaritmica in base a *(o* logaritmo in base a*) la funzione inversa dell'esponenziale $x \mapsto a^x$, e usiamo la notazione* $\log_a$. *Nel caso particolare in cui $a = e$, useremo la notazione* ln *(o semplicemente* log*) invece di* $\log_e$ *e ci riferiremo alla funzione* ln *con il nome* logaritmo naturale.

- Per definizione di funzione inversa, la funzione $\log_a$ è data dalla formula

$$\forall\, x > 0 \quad \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

cioè *il logaritmo in base a di un numero strettamente positivo x è quel numero reale y tale che a elevato alla y sia uguale a x.*

- In particolare, segue dal fatto che $a^0 = 1$ che

$$\log_a(1) = 0 \qquad \forall\, a \in (0, +\infty),\ a \neq 1.$$

- Per costruzione si che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

$$\mathrm{dom}(\log_a) = (0, +\infty), \qquad \mathrm{im}(\log_a) = \mathbb{R}, \qquad \log_a \text{ è iniettiva.}$$

Abbiamo due tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni logaritmiche (si noti che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. il grafico di $\log_a$ passa per il punto $(1, 0)$):

1. $a > 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $a > 1$.
2. $0 < a < 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $0 < a < 1$.

Proprietà delle funzioni logaritmiche. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ le seguenti proprietà:

$$\log_a(1) = 0, \tag{2.5.1}$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{per ogni } x, y > 0, \tag{2.5.2}$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \qquad \text{per ogni } x > 0, \tag{2.5.3}$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \qquad \text{per ogni } x \in (0, +\infty) \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}, \tag{2.5.4}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \text{per ogni } x > 0 \text{ e per ogni } b \in (0, +\infty),\ b \neq 1. \tag{2.5.5}$$

Da (2.5.2) e (2.5.3) segue che

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall\, x,\, y > 0.$$

Dimostriamo alcune di queste proprietà a partire dalle proprietà delle funzioni esponenziali, usando la relazione di inversione

$$y = \log_a(x) \;\Leftrightarrow\; a^y = x\,.$$

- Per dimostrare la (2.5.2), poniamo

$$z = \log_a(xy), \quad t = \log_a(x), \quad w = \log_a(y).$$

Per definizione, si ha quindi

$$xy = a^z, \quad x = a^t, \quad y = a^w,$$

da cui

$$xy = (a^t)(a^w) = a^{t+w}$$

ove l'ultima relazione segue dalle proprietà delle funzioni esponenziali. Quindi

$$xy = a^{t+w} \quad \Rightarrow t + w = \log_a(xy) = z,$$

che è la relazione che volevamo dimostrare.

- Per dimostrare la (2.5.3) osserviamo che

$$w = \log_a(x), \quad t = \log_a\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^t = \frac{1}{x} = x^{-1} = (a^w)^{-1} = a^{-w}.$$

Allora da $a^t = a^{-w}$ e dall'iniettività della funzione esponenziale in base a concludiamo che

$$t = -w \quad \Rightarrow \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x).$$

Esercizio. Ragionando in modo completamente analogo, dimostrare la (2.5.4) e la (2.5.5).

2.5.7 Le funzioni trigometriche e le loro inverse

Definizione di seno e coseno mediante la circonferenza goniometrica. Si consideri un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$, percorrendola in senso antiorario, a partire dal punto $(1, 0)$. Sia $t > 0$ la lunghezza dell'arco di circonferenza compreso fra il punto $(1, 0)$ e il punto P. Si noti che t è la misura in radianti dell'angolo compreso fra il segmento congiungente $O = (0, 0)$ e $(1, 0)$, e il raggio OP.

D'altra parte, ogni valore $t \in [0, 2\pi]$ individua uno e un solo punto P sulla circonferenza trigonometrica, tale che l'arco orientato da $(1, 0)$ a P abbia lunghezza t (il punto corrispondente a $t = 0$ e $t = 2\pi$ è il punto $(1, 0)$). Possiamo quindi considerare il punto $P = P_t$ come in funzione del parametro t e definire le quantità *seno di* t e *coseno di* t.

$$\text{Fissato } t \in [0, 2\pi], \text{ definiamo} \quad \begin{cases} \cos(t) := \text{ascissa di } P_t, \\ \sin(t) := \text{ordinata di } P_t. \end{cases}$$

Estensione di seno e coseno a valori di $t \in \mathbb{R}$. Le funzioni sin e cos si estendono a $\mathbb{R}$ e verificano le relazioni

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2.5.6}$$

e

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5.7}$$

Valori fondamentali di sin **e** cos**, e formule di addizione.** Si ricava dalla definizione di sin e cos che

$$-1 \le \cos(x) \le 1, \qquad -1 \le \sin(x) \le 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5.8}$$

Inoltre si possono calcolare i seguenti valori fondamentali:

$$
\begin{array}{lll}
t = 0 & \sin(0) = 0 & \cos(0) = 1 \\[2mm]
t = \dfrac{\pi}{6} & \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\[2mm]
t = \dfrac{\pi}{4} & \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\[2mm]
t = \dfrac{\pi}{3} & \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\[2mm]
t = \dfrac{\pi}{2} & \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0
\end{array}
$$

Usando le formule di addizione per sin e cos

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

si ricavano a partire dai valori fondamentali altri valori di sin e cos su $[0, 2\pi]$. Per esempio,

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{4}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenendo conto di (2.5.6) e (2.5.7), ricaviamo infiniti altri valori fondamentali di sin e cos.

Le funzioni sin**,** cos**, e** tan**.** Richiamiamo alcune delle proprietà fondamentali delle funzioni trigonometriche.

- La funzione *seno*:
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
è dispari (si veda (2.5.7)), 2π-periodica (si veda (2.5.6)), e ha come insieme immagine $[-1, 1]$ (come si ricava da (2.5.8)).

- La funzione *coseno*:
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
è pari (si veda (2.5.7)), 2π-periodica (si veda (2.5.6)), e ha come insieme immagine $[-1, 1]$ (come si ricava da (2.5.8)). Inoltre, dalle formule di addizione per il seno si ottiene che
$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Quindi (cf. la discussione sulle traslazioni di grafici nella Sezione 2.6), *il grafico di* cos *si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di* sin *di* $\frac{\pi}{2}$*, nella direzione negativa dell'asse* x.

- La funzione *tangente* è definita dall'espressione
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\cos(x) \neq 0$. Poiché

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

concludiamo che

$$\mathrm{dom}(\tan) = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\forall\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

La funzione tangente è dispari su dom(tan) (in quanto è quoziente di sin, dispari, e di cos, pari), π-periodica, ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

Funzioni trigonometriche inverse. Le funzioni sin, cos, e tan, essendo periodiche sui loro domini, sono ben lontane dall'essere iniettive (e quindi invertibili) sui rispettivi domini. Tuttavia, esistono dei sottoinsiemi di tali domini, dette *regioni fondamentali*, con la proprietà che le restrizioni di sin, cos e tan a questi sottoinsiemi sono iniettive (e quindi invertibili).

- Si conviene di considerare la restrizione di sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si verifica che

  $$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \quad \text{è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1,1].$$

  Chiamiamo *arcoseno* la funzione inversa della restrizione di sin a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi

  $$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

  è definito da

  $$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = x$$

  (cioè l'arcoseno di x è l'arco y il cui seno è x), e ha come insieme immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del seno, ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arcsin è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di cos all'intervallo $[0, \pi]$. Si verifica che

  $$\cos|_{[0,\pi]} \quad \text{è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1,1].$$

  Chiamiamo *arcocoseno* la funzione inversa della restrizione di cos a $[0, \pi]$. Quindi

  $$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi],$$

  è definito da

  $$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x$$

  (cioè l'arcocoseno di x è l'arco y il cui coseno è x), e ha come insieme immagine $[0, \pi]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del coseno, ristretto a $[0, \pi]$, rispetto alla retta $y = x$.

- Si conviene di considerare la restrizione di tan all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si verifica che

  $$\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \quad \text{è iniettiva, e ha come insieme immagine } \mathbb{R}.$$

  Chiamiamo *arcotangente* la funzione inversa della restrizione di tan a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi

  $$\arctan = \left(\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

è definita da

$$\arctan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x$$

(cioè l'arcotangente di x è l'arco y la cui tangente è x), e ha come insieme immagine $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico della tangente, ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arctan è dispari.

2.6 Operazioni su funzioni

Composizione di funzioni. Consideriamo due funzioni

$$\begin{aligned} g : D_g \to \mathbb{R}\,, &\quad \text{data da } \; y = g(x) \;\; \forall\, x \in D_g\,, \\ f : D_f \to \mathbb{R}\,, &\quad \text{data da } \; z = f(y) \;\; \forall\, y \in D_f\,. \end{aligned}$$

Dato $x \in D_g$, vogliamo ora considerare il valore $f(g(x))$ (cioè applicare f a $g(x)$). Quest'operazione ha senso per tutti gli $x \in D_g$ tali che $g(x) \in D_f$. Per poterla effettuare, quindi, dobbiamo almeno richiedere che esistano degli $x \in D_g$ tali che $g(x) \in D_f$, cioè che $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$. Se questo vale, si ha che l'insieme $\mathcal{D} := \{x \in D_g \;:\; g(x) \in D_f\}$ non è vuoto. Per costruzione, per ogni $x \in \mathcal{D}$ ha senso considerare il valore $f(g(x))$. In questo modo, otteniamo una nuova funzione.

Definizione 2.6.1 (Funzione composta). *Siano $g : D_g \to \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che*

$$\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset\,, \tag{2.6.1}$$

e sia

$$\mathcal{D} := \{x \in D_g \;:\; g(x) \in D_f\}. \tag{2.6.2}$$

Chiamiamo composizione di f con g *(o* funzione composta di f con g[8]*) la funzione $f \circ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}\,.$$

Osservazione 2.6.2. Si noti che, per costruzione, $\mathcal{D} \subset D_g$. Inoltre, se $\mathrm{im}(g) \subset D_f$, allora chiaramente per ogni $x \in D_g$ si ha che $g(x) \in D_f$, e quindi $\mathcal{D} = D_g$. Vogliamo però ribadire che la composizione $f \circ g$ ha senso non appena vale la (2.6.1). Allora, il dominio $D_{f \circ g}$ è dato dalla (2.6.2).

Possiamo anche considerare la composizione $g \circ f$, nell'ipotesi che $\mathrm{im}(f) \cap D_g \neq \emptyset$. In questo caso, il dominio di $g \circ f$ sarà $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \;:\; f(x) \in D_g\}$. Osserviamo che, in generale,

$$f \circ g \neq g \circ f \text{ !!!!!}$$

come dimostra il prossimo esempio.

Esempio 2.6.3. 1. Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, &\qquad g(x) := x^2 - 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \\ f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,, &\qquad f(x) := \sqrt[4]{x} \;\; \forall\, x \in [0, +\infty)\,. \end{aligned}$$

[8]In questo contesto, g si chiama *funzione interna* e f *funzione esterna*.

Disegnando il grafico della parabola $y = x^2 - 1$, si vede subito che $\mathrm{im}(g) = [-1, +\infty)$. Allora $\mathrm{im}(g) \cap D_f = [0, +\infty)$ e quindi $f \circ g$ è ben definita sull'insieme $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, e si ha

$$f(g(x)) = \sqrt[4]{x^2 - 1} \qquad \forall\, x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\,.$$

D'altra parte, $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty) \subset D_g$, quindi, ricordando l'Osservazione 2.6.2, si ha che $D_{g\circ f} = D_f = [0, +\infty)$, e

$$g(f(x)) = (\sqrt[4]{x})^2 - 1 = \sqrt{x} - 1 \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

2. Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,, &\qquad g(x) := \sqrt{x} \;\; \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, &\qquad f(x) := -x^2 - 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\mathrm{im}(g) = [0, +\infty) \subset D_f$, quindi $D_{f\circ g} = D_g = [0, +\infty)$, e si ha

$$f(g(x)) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1 \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

D'altra parte, $\mathrm{im}(f) = (-\infty, -1]$ ha intersezione vuota con D_g, quindi non è possibile considerare la composizione $g \circ f$!!!!

Funzioni inverse e composizione. Infine, sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Possiamo quindi considerarne l'inversa f^{-1}. Usando l'operazione di composizione fra funzioni, precisiamo le relazioni fra f e f^{-1}. Si ha

$$\begin{aligned} \forall\, y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) &\qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,, \\ \forall\, x \in \mathrm{im}(f^{-1}) &\qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x\,. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Verifichiamo per esempio la seconda[9]: chiaramente, dato $x \in \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$, $f(x) \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$. Per definizione di f^{-1}, $f^{-1}(f(x)) = z$ se e solo se $f(z) = f(x)$. Poiché f è iniettiva, necessariamente $z = x$.

Esempio 2.6.4. Applicando (2.6.3) alla coppia $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln(x)$, si trovano le relazioni

$$\begin{aligned} (\exp \circ \ln)(y) = \exp(\ln(y)) = y \quad &\forall\, y \in (0, +\infty), \\ (\ln \circ \exp) = \ln(\exp(x)) = x \quad &\forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Applichiamo la prima relazione e, anche usando le proprietà di logaritmi e potenze, troviamo che

$$x^x = (\exp \circ \ln)(x^x) = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln(x))$$

da cui si vede che

$$\text{il dominio naturale della funzione } \; x \mapsto x^x \; \text{ è } (0, +\infty).$$

[9]**Esercizio!** verificare la prima.

Operazioni algebriche su funzioni.

Definizione 2.6.5. *Date $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$; chiamiamo:*

- somma *di f e g la funzione $(f+g) : D \to \mathbb{R}$ definita da $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ per ogni $x \in D$;*
- prodotto *di f e g la funzione $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ definita da $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in D$;*
- quoziente *di f e g la funzione $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ definita da $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni x appartenente all'insieme $D \setminus \{x \in D \,:\, g(x) = 0\}$.*

In particolare, data $f : D_f \to \mathbb{R}$, chiamiamo *funzione reciproco* di f il quoziente $\frac{1}{f}$, con dominio $D_f \setminus \{x \in D_f \,:\, f(x) = 0\}$.

Esempio 2.6.6. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \sqrt{x+1} \qquad \forall\, x \in D_f = [-1, +\infty)\,, \qquad\qquad g(x) := \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Allora $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$, e

$$\forall\, x \in D \qquad (f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}\,, \quad (f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,, \quad \frac{f}{g}(x) = x \cdot \sqrt{x+1}\,.$$

Si noti che, di fatto, il dominio naturale della funzione $\frac{f}{g}$ coincide con $D_f = [-1, +\infty)$.

Osservazione 2.6.7 (Relazione fra parità/disparità e operazioni sulle funzioni)**.** Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ due funzioni, e supponiamo che D sia simmetrico rispetto all'origine. Allora

- *se f e g sono entrambe pari, anche le funzioni $f+g$, $f \cdot g$, e f/g sono pari.* Verifichiamo per esempio che $f \cdot g$[10] sia pari: per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$.
- *se f e g sono entrambe dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono pari, mentre la funzione $f+g$ è dispari.* In effetti, per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$, mentre $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x)$.
- *se f è pari e g è dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono dispari.* In effetti, per ogni $x \in D$ vale $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(f \cdot g)(x)$. Non si può concludere nulla sulla funzione somma $f + g$. Ad esempio, la funzione $x \mapsto x^2 + x^3$ non è né pari né dispari.

Ordinamento delle funzioni reali.

Definizione 2.6.8. *Consideriamo due funzioni $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Diciamo che*

- *$f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in D$;*

[10] si ragiona allo stesso modo per f/g.

- $f < g$ *se* $f(x) < g(x)$ *per ogni* $x \in D$.

Osserviamo che la relazione d'ordine così introdotta non è totale[11]: per esempio, considerate le funzioni $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) := 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è falso sia che $f \leq g$ su $D = \mathbb{R}$, sia che $g \leq f$ su $D = \mathbb{R}$.

Traslazioni del grafico. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia $a > 0$. Introduciamo le seguenti traslate di f:

$$\begin{cases} g(x) := f(x-a) & \forall\, x \in D_g = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x - a \in D_f\}\,, \\ h(x) := f(x+a) & \forall\, x \in D_h = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x + a \in D_f\}\,, \\ k(x) := f(x) + a & \forall\, x \in D_k = D_f\,, \\ \ell(x) := f(x) + a & \forall\, x \in D_\ell = D_f\,. \end{cases}$$

Allora:

- il grafico di g si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di a nella direzione positiva dell'asse delle x;
- il grafico di h si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di a nella direzione negativa dell'asse delle x;
- il grafico di k si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di a nella direzione positiva dell'asse delle y;
- il grafico di ℓ si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di a nella direzione negativa dell'asse delle y.

[11]cioè non sempre due funzioni sono confrontabili

Capitolo 3

Limiti

3.1 Introduzione al concetto di limite

Per introdurre la nozione di limite, iniziamo da due semplici esempi.

Esempio 3.1.1. 1. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ci poniamo il problema di analizzare il comportamento di f "vicino" al punto $x_0 = 1$, ove f non è definita. Ora osserviamo che

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1 \qquad \forall\, x \in D_f\,,$$

quindi il grafico di f è dato dalla retta $y = x + 1$, privata del punto di coordinate $(1, 2)$ (che corrisponde a $x_0 = 1$, nel quale la f non è definita). Esaminando graf(f), si vede comunque che, **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 1$, il corrispondente valore $f(x)$ è "arbitrariamente" vicino a 2.** Formalizzeremo questa proprietà dicendo che $f(x)$ **tende al limite** 2 **per** x **tendente a** 1, e scriveremo $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

2. Consideriamo la funzione (pari, in quanto quoziente di due funzioni dispari)

$$g(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad \forall\, x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

e indaghiamo il suo comportamento per x "vicino" a $x_0 = 0$. Usando una calcolatrice, si trova la seguente tabella di valori (visto che la funzione è pari, per comodità consideriamo solo dei valori positivi per la variabile indipendente)

x	g(x)
0,1250	0,9974
0,0625	0,9993
0,0312	0,9998
0,0156	1,0000
...	...

ove l'ultimo valore di $g(x)$ non è 1 ma un'approssimazione di 1 operata dalla calcolatrice, che mostra solo quattro cifre decimali. Anche in questo caso si vede che **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 0$, il corrispondente valore $g(x)$ è "arbitrariamente" vicino a 1,** cioè che $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

Prima di introdurre la definizione rigorosa di limite, riprendiamo la funzione f dell'Esempio 3.1.1, e consideriamone le seguenti varianti

$$f_1(x) := x + 1 \qquad \forall\, x \in D_{f_1} = \mathbb{R}\,,$$

$$f_2(x) := \begin{cases} x+1 & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{f_2} = \mathbb{R}\,,$$

Esaminando il grafico di f_1 e di f_2, vediamo che **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 1$, sia $f_1(x)$ sia $f_2(x)$ sono "arbitrariamente" vicini a 2.** In altri termini, f_1 e f_2 hanno lo stesso comportamento di f vicino a $x_0 = 1$, anche se, diversamente da f, sono entrambe definite in $x_0 = 1$, e inoltre $f_1(1) \neq f_2(1)$.

Questo esempio suggerisce che, in una ragionevole nozione di limite di una funzione f per x tendente a un certo valore x_0, nozione che intenda descrivere il comportamento di f "vicino" a x_0, **non ha rilevanza il fatto che f sia definita oppure no nel punto x_0, e neppure il valore che f eventualmente assuma nel punto x_0.** In altri termini, per determinare il limite di f per x tendente a x_0 non conta il comportamento puntuale di f in $x = x_0$.

3.2 Definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$

Consideriamo una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Prima di dare la definizione rigorosa di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, evidenziamone gli elementi principali in una

Definizione informale di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Articoliamo la definizione in due punti, che poi commentiamo:

1. *Supponiamo che $f : D_f \to \mathbb{R}$ sia definita per tutti gli x vicini a x_0, tranne che, eventualmente, per $x = x_0$.*

2. *Diciamo che f* tende al limite L quando x tende a x_0 *se f assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0 (da entrambi i lati), escludendo $x = x_0$.*

Osserviamo che, nel punto 1., viene messo in luce il fatto che la nozione di limite che vogliamo definire non dipende dal fatto che la funzione sia o meno definita nel punto $x = x_0$. Si richiede solo che, comunque ci si avvicini a x_0, sia possibile considerare $f(x)$: preciseremo questo con la nozione di *punto di accumulazione.* Anche nel punto 2. viene ribadito che il comportamento puntuale di f in x_0 non conta ai fini della determinazione del limite. Usando i quantificatori universali e la nozione di intorno, preciseremo le locuzioni “arbitrariamente vicini” e “sufficientemente vicino”.

Definizione 3.2.1 (Punto di accumulazione)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* un punto di accumulazione per A *se per ogni $r > 0$ l'intorno*[1] *(aperto) di x_0 di raggio r contiene almeno un punto di A diverso da x_0, cioè*

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, x \in A \cap I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\,. \tag{3.2.1}$$

Si noti che la condizione (3.2.1) di intersezione non vuota deve valere per ogni $r > 0$: facendo tendere r a 0, si sta cioè richiedendo che esistano punti di A arbitrariamente vicini a x_0, ma comunque diversi da x_0. In altri termini, al tendere di r a 0 i punti di A “si accumulano” in x_0. **Si tenga presente che il fatto che punto x_0 è di accumulazione per un dato insieme A NON IMPLICA che $x_0 \in A$!!**

Esempio 3.2.2. Consideriamo i seguenti insiemi:

1. $$A = \{x \in \mathbb{R}\,:\, x = \frac{1}{2^n}\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$
   Si ha che $0 \notin A$, ma 0 è un punto di accumulazione per A.

2. $A = \mathbb{Z}$: in questo caso, nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{Z}$.

3. Sia A il dominio (naturale) della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Quindi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si noti che $0 \notin A$, e che 0 è un punto di accumulazione per A.

Definizione formale di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Formalizziamo quanto richiesto nel punto 1. della definizione informale di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ipotizzando che

$$x_0 \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,. \tag{3.2.2}$$

Definizione 3.2.3 (Definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (I))**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* tende al limite L per x tendente a x_0 *(e scriviamo* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$*, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0$), se per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ di L di raggio $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ di x_0 di raggio $\delta > 0$, tale che*

$$\forall\, x \in \big(I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}\big) \cap D_f \quad \textit{si abbia } f(x) \in I(L, \varepsilon)\,. \tag{3.2.3}$$

Osservazione 3.2.4.

- L'espressione f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L* è stata formalizzata usando la nozione di intorno del limite L: nella Definizione 3.2.3 si richiede infatti che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ (e possiamo quindi prendere ε arbitrariamente piccolo) $f(x)$ appartenga all'intorno $I(L, \varepsilon)$, *pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0*, cioè pur di prendere x in un opportuno intorno $I(x_0, \delta)$ del punto x_0.

- Osserviamo che, nella (3.2.3), non viene imposto nulla sul comportamento di f nel punto x_0.

[1] Si ricordi la Definizione 1.4.13.

- **L'ordine dei quantificatori universali "per ogni" ed "esiste"** che appaiono nella Definizione 3.2.3 è cruciale: stiamo infatti richiedendo che, comunque si fissi un intorno $I(L,\varepsilon)$, sia possibile determinare corrispondentemente un intorno $I(x_0,\delta)$ per il quale valga la (3.2.3). Di fatto, la costante δ dipenderà dalla costante ε (si veda l'Esempio 3.2.6). In altri termini, si potrebbe dire che c'è un rapporto di "causa-effetto" fra la scelta dell'intorno $I(L,\varepsilon)$ e la conseguente determinazione di $I(x_0,\delta)$. Questo rapporto verrebbe sconvolto se venisse invertito l'ordine dei quantificatori universali.

- Notiamo che la Definizione 3.2.3 sarebbe banalmente verificata se non avessimo richiesto a priori che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Infatti, se ciò non fosse vero, esisterebbe una costante $\bar{\delta} > 0$ tale che per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$ si avrebbe $I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f = \emptyset$, e quindi sarebbe vero che, per $0 < \delta < \bar{\delta}$,
$$\forall\, x \in I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f, \qquad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{3.2.4}$$
(in effetti, la negazione di (3.2.4), cioè
$$\exists\, x \in I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f : \qquad |f(x) - L| \geq \varepsilon$$
sarebbe falsa, in quanto, per $0 < \delta < \bar{\delta}$, l'insieme $I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f$ è vuoto).

Osservando che
$$x \in I(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta\,,$$
$$f(x) \in I(L,\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,,$$
esplicitiamo la Definizione 3.2.3 usando i simboli matematici.

Definizione 3.2.5 (Definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (II))**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* tende al limite *L* per *x* tendente a *x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0$), se*
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{3.2.5}$$

Esempio 3.2.6. 1. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante $f(x) := c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = c\,. \tag{3.2.6}$$
A questo scopo, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$: vogliamo determinare in corrispondenza una costante $\delta > 0$ tale che (si noti che in questo caso $D_f = \mathbb{R}$)
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - c| < \varepsilon\,. \tag{3.2.7}$$
Ora, $|f(x)-c| = |c-c| = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto la (3.2.7) vale <u>comunque si scelga $\delta > 0$</u>, cioè in questo caso (molto speciale) la determinazione della costante <u>δ è indipendente dalla</u> scelta di $\varepsilon > 0$. Abbiamo quindi verificato la (3.2.6).

2. Consideriamo ora la funzione $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} x = x_0\,. \tag{3.2.8}$$
Fissiamo $\varepsilon > 0$: dobbiamo trovare una costante $\delta > 0$ tale che
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon\,. \tag{3.2.9}$$
Possiamo quindi, evidentemente, scegliere $\delta = \varepsilon$. Di fatto, ogni costante $\delta \in (0,\varepsilon]$ verifica la (3.2.9).

3. Verifichiamo che
$$\lim_{x\to 2}(3x-1)=5\,. \tag{3.2.10}$$
Fissiamo $\varepsilon>0$: dobbiamo trovare una costante $\delta>0$ tale che
$$\forall\, x\in\mathbb{R} \text{ con } 0<|x-2|<\delta \text{ si ha che } |f(x)-5|=|3x-6|=3|x-2|<\varepsilon\,. \tag{3.2.11}$$
È quindi sufficiente scegliere $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, o, in generale, $\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{3}]$.

Esempio 3.2.7. Calcoliamo
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\,.$$
Osserviamo che la funzione razionale fratta $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ è definita su $\mathbb{R}\setminus\{-3,-2\}$ e che
$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2\}\quad \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+3}\,.$$
Allora
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x+3}=-3\,. \tag{3.2.12}$$
Per verificare l'ultimo limite, procediamo direttamente usando la definizione. In effetti, fissiamo $\varepsilon>0$ e determiniamo $\delta>0$ tale che
$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\} \text{ con } 0<|x-(-2)|<\delta \text{ si ha che } |f(x)-(-3)|=\left|\frac{x-1}{x+3}+3\right|=\left|\frac{4x+8}{x+3}\right|=4\left|\frac{x+2}{x+3}\right|<\varepsilon\,.$$
Per trovare δ dobbiamo quindi risolvere la disequazione $|\frac{x+2}{x+3}|<\frac{\varepsilon}{4}$, che è equivalente al sistema
$$\begin{cases}\frac{x+2}{x+3}<\frac{\varepsilon}{4}\\ \frac{x+2}{x+3}>-\frac{\varepsilon}{4}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{(1-\frac{\varepsilon}{4})x+2-\frac{3}{4}\varepsilon}{x+3}<0\\ \frac{(1+\frac{\varepsilon}{4})x+2+\frac{3}{4}\varepsilon}{x+3}>0\end{cases}\,,$$
.....

Come già mostrano questi semplici esempi, la definizione non è lo strumento più indicato per il calcolo dei limiti. Per svilupparlo, introdurremo diverse tecniche svincolate dalla Definizione 3.2.5, che invece sarà alla base della dimostrazione rigorosa dei risultati sui limiti che presenteremo. Il primo di essi asserisce che, quando una funzione ammette un certo limite per $x\to x_0$, tale limite è univocamente determinato.

Il teorema di unicità del limite.

Teorema 3.2.8. *Sia $f:D_f\to\mathbb{R}$, e sia $x_0\in\mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Siano L, $M\in\mathbb{R}$. Se*
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L \quad e \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=M, \tag{3.2.13}$$
allora $L=M$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che valga la (3.2.13) e che $L\neq M$. Allora $|L-M|>0$. Poniamo $\varepsilon:=|L-M|/3$. Usando la definizione di limite, in corrispondenza a ε determiniamo due costanti $\delta_1>0$ e $\delta_2>0$ tali che
$$\forall\, x\in D_f \text{ tale che } 0<|x-x_0|<\delta_1 \text{ si ha che } |f(x)-L|<\varepsilon\,,$$
$$\forall\, x\in D_f \text{ tale che } 0<|x-x_0|<\delta_2 \text{ si ha che } |f(x)-M|<\varepsilon\,,$$

Sia $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora

$$\forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - M| < \varepsilon\,,\ |f(x) - L| < \varepsilon\,,$$

quindi, ricordando la disuguaglianza (1.4.2d),

$$\forall\, x \in D_f \text{ tale che } \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ si ha che}$$
$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \le |L - f(x)| + |f(x) - M| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L - M|\,,$$

da cui si deduce che

$$|L - M| - 2/3|L - M| = 1/3|L - M| < 0,$$

e questo è **un assurdo**, perché il modulo di un qualsiasi numero reale è sempre un numero maggiore o uguale a zero. □

Limiti unilateri. Nella definizione di limite che abbiamo dato, non si distingue il caso in cui x tende a x_0 da destra da quello in cui x tende a x_0 da sinistra: si richiede cioè che $f(x)$ tenda a L quando x si avvicina a x_0, ma senza specificare da quale verso.

Introduciamo ora una nozione più precisa di limite, che permetta di distinguere il comportamento della funzione per x tendente a x_0 da destra o da sinistra: parleremo quindi di *limiti unilateri* (limite destro/sinistro). Per esempio, è opportuno considerare limiti unilateri quando f è definita su un intervallo (a, b) e si vuole considerare il limite di f per x tendente a uno degli estremi dell'intervallo. Inoltre, a volte i limiti unilateri possono descrivere in modo più preciso il comportamento della funzione nell'intorno di un punto x_0, come mostrerà l'Esempio 3.2.11.

Definizione informale di limite destro/sinistro. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f ha limite destro (rispettivamente, sinistro) L in x_0 se $f(x)$ è arbitrariamente vicino a L per x sufficientemente vicino a x_0, x maggiore di x_0 (x minore di x_0) di x_0, escludendo x_0.*

Traduciamo questo nella seguente

Definizione 3.2.9 (Limite destro/sinistro). *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* ha limite destro L in x_0 *(e scriviamo* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, *o $f(x) \to L$ per $x \to x_0^+$), se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{tale che}\ 0 < x - x_0 < \delta \ \textit{si ha}\ |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Diciamo che f ha limite sinistro L in x_0 *(e scriviamo* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, *o $f(x) \to L$ per $x \to x_0^-$), se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{tale che}\ -\delta < x - x_0 < 0 \ \textit{si ha}\ |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Esempio 3.2.10. Consideriamo la funzione $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$, definita per $x \in [-1, 1]$. Verifichiamo che $\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e determiniamo $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in [-1, 1] \ \text{ con } \ 0 < x - (-1) = x + 1 < \delta \ \text{ si ha}$$
$$|\sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{1 - x^2} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ 1 - x^2 < \varepsilon^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 > 1 - \varepsilon^2 \ \Leftrightarrow\ |x| > \sqrt{1 - \varepsilon^2}\,.$$

Possiamo quindi scegliere $\delta > 0$ tale che $x < \delta - 1 \Rightarrow x < -\sqrt{1 - \varepsilon^2}$: cioè, $\delta \le 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Esercizio!: provare che $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$.

Esempio 3.2.11. Consideriamo la funzione *segno*

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \mathrm{sign}(x) := \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Si vede immediatamente[2] che $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sign}(x) = 1$, mentre $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{sign}(x) = -1$. D'altra parte, non esiste il limite $\lim_{x\to 0} \mathrm{sign}(x)$: intuitivamente, ciò è proprio dovuto al fatto che $f(x)$ tende a 1 per $x \to 0^+$, e $f(x)$ tende a -1 per $x \to 0^-$.

Quello che accade per la funzione sign è il prototipo di una situazione più generale: **il limite per $x \to x_0$ esiste se e solo se il limite destro e il limite sinistro esistono e sono uguali**. In tal caso, il valore comune dei limiti unilateri fornisce il valore del limite.

Teorema 3.2.12. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Allora*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\,.$$

3.3 Alcuni risultati sui limiti

L'algebra dei limiti. Introduciamo un importante risultato sul legame fra l'operazione di limite e le operazioni algebriche sulle funzioni.

Teorema 3.3.1. *Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, c, L, $M \in \mathbb{R}$, e $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M\,.$$

Allora, si ha che

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + M\,,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big) = L\cdot M\,,$$
$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x) = cL\,,$$
$$\textit{se } M \neq 0, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}\,,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{m/n} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{m/n} = L^{m/n} \quad \textit{se} \quad \begin{cases} L \geq 0 & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ pari}, \\ \forall\, L \in \mathbb{R} & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ dispari}, \\ L > 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ pari}, \\ \forall\, L \neq 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ dispari}. \end{cases}$$

Infine, vale il seguente risultato di confronto:

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in D \quad \Rightarrow \quad L \leq M\,. \tag{3.3.1}$$

[2]Esercizio: verificarlo usando la Definizione 3.2.9.

Non vale invece un risultato di confronto stretto, cioè la relazione $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in D$ non implica $L < M$: per esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad : \quad \text{si ha che } \ f(x) > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \ \text{ma} \ \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$

Osserviamo che i risultati enunciati nel Teorema 3.3.1 si adattano con ovvie modifiche al caso in cui a $\lim_{x\to x_0}$ si sostituisca sistematicamente $\lim_{x\to x_0^+}$, oppure, sistematicamente, $\lim_{x\to x_0^-}$.

Limiti delle funzioni elementari. Diamo, senza dimostrazione, i seguenti limiti:

Sia $f(x) := x^r$, con $r \in \mathbb{R}$: $\forall\, x_0 \in D_f \quad \lim_{x\to x_0} x^r = x_0^r\,,$

Sia $f(x) := a^x$, con $a > 0$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\,,$

Sia $f(x) := \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$: $\forall\, x_0 \in (0, +\infty) \quad \lim_{x\to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0)\,,$

Siano $f(x) := \sin(x)$ e $g(x) := \cos(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)\,,$

Sia $f(x) := \tan(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \lim_{x\to x_0} \tan(x) = \tan(x_0)\,,$

Siano $f(x) := \arcsin(x)$ e $g(x) := \arccos(x)$:

$\forall\, x_0 \in (-1, 1) \quad \lim_{x\to x_0} \arcsin(x) = \arcsin(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} \arccos(x) = \arccos(x_0)\,,$

Inoltre, $\lim_{x\to -1^+} \arcsin(x) = \arcsin(-1)$, $\quad \lim_{x\to -1^+} \arccos(x) = \arccos(-1)$,

e $\lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \arcsin(1)$, $\quad \lim_{x\to 1^-} \arccos(x) = \arccos(1)$.

Sia $f(x) := \arctan(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} \arctan(x) = \arctan(x_0)\,.$

Esempio 3.3.2. Ricordando i limiti (3.2.6)–(3.2.8) e applicando il Teorema 3.3.1, possiamo calcolare

$$\lim_{x\to 2} \left(3x^2 + 5x + \frac{x^2}{x+2}\right) = 3\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 5 \lim_{x\to 2} x + \frac{(\lim_{x\to 2} x)^2}{\lim_{x\to 2} x + 2} = 23\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x-1} - 2\sqrt{4-x}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} x - 1} - 2\sqrt{4 - \lim_{x\to 0^+} x} = -5\,.$$

In generale, abbiamo che

- Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale, della forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Allora

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0\,. \tag{3.3.2}$$

- Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione razionale fratta, della forma $f = P/Q$, con P, $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni polinomiali. Allora

$$\forall\, x_0 \in D_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ Q(x) \neq 0\} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\,. \tag{3.3.3}$$

Abbiamo pertanto

$$\lim_{x\to 2}(x^4 - 2x + \pi) = 12 + \pi\,,$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3}{x-5} = -\frac{9}{2}\,.$$

Il Teorema dei due carabinieri e le sue conseguenze.

Teorema 3.3.3. *Siano f, g, $h : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, $L \in \mathbb{R}$, e sia I un intorno di x_0. Supponiamo che*

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\}\,, \tag{3.3.4}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L\,. \tag{3.3.5}$$

Allora

$$\textit{esiste il } \lim_{x\to x_0} g(x), \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Questo teorema ha un'immediata interpretazione grafica: grazie alla (3.3.4), il grafico di g è compreso fra i grafici di f e di h (i "due carabinieri"): si vede subito, allora, che se per $x \to x_0$ f e h tendono a L, anche g è forzata a tendere a L. Si noti che, nell'ipotesi (3.3.4), si richiede che valga $f \le g \le h$ solo su un intorno del punto x_0 (cioè "vicino" a x_0), **tranne che nel punto** x_0, e non su tutto il dominio D; inoltre, nella tesi viene in particolare affermato che <u>esiste</u> $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

Anche in questo caso, sostituendo sistematicamente $\lim_{x\to x_0}$ con $\lim_{x\to x_0^+}$ (con $\lim_{x\to x_0^-}$, risp.), si ottiene la versione del Teorema 3.3.3 per il limite destro/sinistro. Vediamo alcune applicazioni di questo risultato.

Esempio 3.3.4.

1. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $-|x| \le g(x) \le x^4$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora, notando che $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$, concludiamo che esiste $\lim_{x\to 0} g(x)$ e che tale limite è uguale a 0[3].

2. Si ha che
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,. \tag{3.3.6}$$
Innanzitutto osserviamo che, a priori, non è neppure chiaro che tale limite esista: infatti, esiste il limite $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, ma
$$\nexists \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,. \tag{3.3.7}$$
Per vedere ciò, osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{Z}$
$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1\,, \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1\,.$$

[3] Quando una funzione tende a 0 (per $x \to 0$ o per $x \to \pm\infty$, si veda la Sezione 3.4.1), si dice che essa è *infinitesima*.

Prendendo valori sempre più grandi (in modulo) di $k \in \mathbb{Z}$, vediamo che la funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla sempre più velocemente fra i valori 1 e -1. Quindi non è possibile applicare la regola sul limite del prodotto fra due funzioni (si veda il punto 2. del Teorema 3.3.1) alla funzione prodotto $g(x) := x^2 \sin(1/x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D'altra parte, osserviamo che $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ per ogni $x \neq 0$: allora

$$-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2 \quad \forall\, x \neq 0\,,$$

quindi, applicando il Teorema dei due carabinieri concludiamo la (3.3.6).

Infine, enunciamo un corollario del Teorema dei due carabinieri che generalizza quanto visto nell'Esempio 3.3.4(2).

Corollario 3.3.5. *Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, e sia I un intorno di x_0. Supponiamo che:*

- *f sia limitata in $I \setminus \{x_0\}$, cioè esista $K > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq K \qquad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\} \cap D\,,$$

- $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Allora esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

In altri termini, questo risultato afferma che il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è una funzione infinitesima.

3.4 Definizione di $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

3.4.1 Limiti finiti all'infinito

Introduciamo ora una nozione di limite che descriva il comportamento di una funzione f, definita su una semiretta $(a, +\infty)$ o $(-\infty, a)$, o su $\mathbb{R}$, tale che f assume valori $f(x)$ *arbitrariamente vicini* a $L \in \mathbb{R}$ (cioè f tende al limite finito L), quando x assume valori sufficientemente grandi in valore assoluto, positivi (useremo la locuzione *al tendere di x a $+\infty$*), o negativi (cioè *al tendere di x a $-\infty$*). In questo contesto, useremo le notazioni

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L\,. \tag{3.4.1}$$

Nel seguito, useremo la notazione $x \to \pm\infty$ per indicare che x tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Per esempio, esaminando il grafico delle funzioni elementari si vede subito che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

e, in generale, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^m} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^m} = 0\,,$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\forall\, a > 1 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0\,,$$

$$\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\,.$$

Diamo ora le definizioni rigorose dei limiti (3.4.1).

Definizione 3.4.1. *Sia* $a \in \mathbb{R}$ *e* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* f tende al limite L per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *o* $f(x) \to L$ *per* $x \to +\infty$*) se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, R \in \mathbb{R} : \;\; \forall\, x \in D_f \; \textit{con } x > R \textit{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{3.4.2}$$

Analogamente, diciamo che f tende al limite L per x tendente a $-\infty$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, R \in \mathbb{R} : \;\; \forall\, x \in D_f \; \textit{con } x < R \textit{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{3.4.3}$$

Osservazione 3.4.2. Osserviamo che, nella definizione (3.4.2), avremmo potuto richiedere, equivalentemente, che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, R > 0 : \;\; \forall\, x \in D_f \text{ con } x > R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

visto che, in effetti, stiamo considerando il caso in cui $x \to +\infty$, e quindi x assumerà valori definitivamente positivi. Inoltre, pur di prendere $R > a$ si può omettere di specificare "$\forall\, x \in D_f$". Analogamente, in (3.4.3) avremmo potuto equivalentemente richiedere che esista $R < 0$, e che $R < a$.

Esempio 3.4.3. Usando la definizione, verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$[4]. Fissiamo allora $\varepsilon > 0$: dobbiamo determinare $R > 0$ tale che

$$\forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \;\; \text{con} \;\; x > R \;\; \text{si ha}$$
$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| = \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x-1| > \frac{2}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; x > 1 + \frac{2}{\varepsilon} \text{ o} x < 1 - \frac{2}{\varepsilon}\,.$$

Scegliamo allora $R \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

Limiti all'infinito di funzioni razionali fratte (I). Quanto visto nell'Esempio 3.4.3 è tipico del comportamento all'infinito delle funzioni razionali fratte. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione razionale fratta, della forma $f = P/Q$, con $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni polinomiali, con $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \end{cases}. \tag{3.4.4}$$

Il caso in cui $n > m$ sarà considerato nella Sezione 3.4.3, alla quale rimandiamo per la dimostrazione di (3.4.4).

Asintoti orizzontali. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $y = L$ per $x \to +\infty$: in questo caso, si dice che *la retta di equazione* $y = L$ *è un asintoto orizzontale per* graf(f) *a* $+\infty$. Analogamente, se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, *la retta di equazione* $y = L$ *è un asintoto orizzontale per* graf(f) *a* $-\infty$.

[4]**Esercizio!**: ragionando allo stesso modo, verificare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$.

Estensione dei risultati sui limiti. Il Teorema 3.3.1 si estende al caso di limiti finiti all'infinito sostituendo sistematicamente, nell'enunciato, al limite $\lim_{x\to x_0}$ il limite $\lim_{x\to+\infty}$ (oppure $\lim_{x\to-\infty}$). Si estendono anche in modo opportuno il Teorema dei due carabinieri e il Corollario 3.3.5, che rienunciamo, per esempio, nel caso $x \to +\infty$:

Corollario 3.4.4. *Siano f, $g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, e supponiamo che*

$$\exists\, K > 0 \,:\quad |f(x)| \le K \qquad \forall\, x \in (a, +\infty)\,,$$
$$\exists \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Allora esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.

Per esempio, da questo risultato segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^3} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\sin(x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\sin(x)\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0\,.$$

3.4.2 Limiti infiniti per $x \to x_0$

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, punto di accumulazione per D_f. Vogliamo formalizzare il caso in cui f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente grandi in valore assoluto (positivi o negativi) per x sufficientemente vicino a x_0, escludendo il punto x_0.* Scriveremo, rispettivamente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,. \tag{3.4.5}$$

Nel seguito, useremo anche la notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ per indicare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Daremo anche le definizioni di limiti destri/sinistri uguali a $\pm\infty$. Ad esempio, si ha che

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \ge 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty\,,$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \ge 1 \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^{2k+1}} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^{2k+1}} = -\infty\,,$$
$$\forall\, a > 1 \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty\,,$$
$$\forall\, a \in (0,1) \qquad \lim_{x\to0^+} \log_a(x) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty\,.$$

Definizione 3.4.5. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f tende a $+\infty$ per x tendente a x_0 (e scriviamo* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$*, o $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$), se*

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \,:\ \ \forall\, x \in D_f \ \text{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{si ha}\ f(x) > M\,. \tag{3.4.6}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$*, o $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$), se*

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \,:\ \ \forall\, x \in D_f \ \text{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{si ha}\ f(x) < -M\,. \tag{3.4.7}$$

Esempio 3.4.6. Verifichiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$. Fissiamo $M > 0$: dobbiamo determinare $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ con } 0 < |x| < \delta \text{ si ha } \frac{1}{x^4} > M \;\Leftrightarrow\; x^4 < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{1}{M^{1/4}}\,.$$

Allora, è sufficiente scegliere $\delta \leq \frac{1}{M^{1/4}}$.

Limiti unilateri infiniti. In modo analogo alla 3.4.5, si danno le definizioni dei limiti unilateri $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$: per esempio[5], diciamo che f ha limite sinistro $+\infty$ in x_0 se

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;:\;\; \forall\, x \in D_f \text{ con } -\delta < x - x_0 < 0 \text{ si ha } f(x) > M\,.$$

Il Teorema 3.2.12 si estende al caso di limiti infiniti per $x \to x_0$: per semplicità, lo enunciamo solo nel caso in cui il limite sia $+\infty$.

Teorema 3.4.7. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f.*

1. *Allora*
$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\,.$$

2. *Allora*
$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\,.$$

In particolare, se si ha che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

(oppure che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$), allora **non esiste** il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Esempio 3.4.8. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, di dominio $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, **non ammette limite** per $x \to 0$: in effetti, in questo caso $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Allo stesso modo,

$$\begin{aligned} \forall\, m \in \mathbb{N},\; m \text{ dispari} \quad & \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^m}, \\ & \nexists \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x), \quad \nexists \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan(x). \end{aligned}$$

Asintoti verticali. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $x = x_0$ per x sufficientemente vicino a x_0: in questo caso, si dice che *la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto (eventualmente destro/sinistro, a seconda che si consideri un limite unilatero) verticale per* graf(f).

[5]**Esercizio!**: dare le altre definizioni!

3.4.3 Limiti infiniti all'infinito

Infine, formalizziamo il caso in cui f *assume valori* $f(x)$ *arbitrariamente grandi in valore assoluto (positivi o negativi) quando* x *assume valori sufficientemente grandi in valore assoluto (positivi o negativi).* Daremo cioè le definizioni dei limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Per esempio, si ha che

$$\begin{aligned}
&\forall\, n\in\mathbb{N},\ n \text{ pari} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty\,,\\
&\forall\, m\in\mathbb{N},\ m \text{ dispari} \quad \lim_{x\to+\infty} x^m = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} x^m = -\infty\,,\\
&\forall\, a>1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,,\\
&\forall\, a\in(0,1) \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty\,,\\
&\forall\, a>1 \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty\,,\\
&\forall\, a\in(0,1) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Osserviamo d'altra parte che

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)\,, \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)\,, \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \tan(x)\,.$$

Definizione 3.4.9. *Sia* $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. *Diciamo che* f tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, o* $f(x)\to+\infty$ *per* $x\to+\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x>R \textit{ si ha } f(x)>M\,. \tag{3.4.8}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*, o* $f(x)\to-\infty$ *per* $x\to+\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x>R \textit{ si ha } f(x)<-M\,. \tag{3.4.9}$$

Diciamo che f tende a $+\infty$ per x tendente a $-\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$*, o* $f(x)\to+\infty$ *per* $x\to-\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x<R \textit{ si ha } f(x)>M\,. \tag{3.4.10}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $-\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$*, o* $f(x)\to-\infty$ *per* $x\to-\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x<R \textit{ si ha } f(x)<-M\,. \tag{3.4.11}$$

Sulla scelta di R nelle formule (3.4.8)–(3.4.9) valgono le stesse considerazioni sviluppate dopo la Definizione 3.4.1.

Asintoti obliqui. Introdurremo la nozione di asintoto obliquo (che fornisce delle informazioni più precise sul comportamento di funzioni che, all'infinito, tendono a $+\infty$ o a $-\infty$) solo nel caso di limiti a $+\infty$; le definizioni e i risultati che daremo si estendono in modo immediato al caso di limiti a $-\infty$.

Definizione 3.4.10. *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, o che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*. Diciamo che la retta di equazione* $y = mx + q$*, con* m*,* $q \in \mathbb{R}$ *e* $m \neq 0$*, è un* asintoto obliquo *per* $\mathrm{graf}(f)$ *per* $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0\,.$$

Graficamente, questo significa che il grafico di f si avvicina arbitrariamente retta $y = mx + q$ per x sufficientemente grande. Chiaramente, si avrà $m > 0$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $m < 0$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Osserviamo che non sempre una funzione che tende a $\pm\infty$ per $x \to +\infty$ ammette un asintoto obliquo. Per esempio, per ogni $a > 1$ la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ non ammette alcun asintoto obliquo per $x \to +\infty$: intuitivamente, questo accade perché per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale tende a $+\infty$ più velocemente di qualsiasi funzione potenza.

Diamo ora delle condizioni <u>necessarie e sufficienti</u> per l'esistenza di un asintoto obliquo.

Teorema 3.4.11. *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, oppure che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*. Allora, la retta* $y = mx + q$ *(*$m \neq 0$*) è un asintoto obliquo per* $\mathrm{graf}(f)$ *per* $x \to +\infty$ *se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0\,,\\ &\exists \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = q\,. \end{aligned}$$

Operativamente, data una funzione $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, per la ricerca di un eventuale asintoto obliquo si procede in questo modo:

- si calcola $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$: se tale limite esiste, finito, ed è uguale a una costante m non nulla, allora m sarà il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo;
- si calcola $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$: se tale limite esiste ed è finito, allora il suo valore individua l'ordinata all'origine dell'asintoto obliquo.

Esempio 3.4.12. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{3}{4}x - \frac{\cos^2(x)}{e^x} + \arctan(x) - \frac{\sin(x)}{x} \qquad \forall\, x \neq 0\,.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \cos^2(x) \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\frac{\sin(x)}{x} = 0\,, \tag{3.4.12}$$

ove il calcolo del primo limite è giustificato dal Corollario 3.4.4, in quanto la funzione $f_1(x) = \cos^2(x)$ è limitata su $\mathbb{R}$, mentre $f_2(x) = (1/e)^x$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Combinando i limiti in (3.4.12) con il fatto che $\frac{3}{4}x \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e usando i risultati sull'estensione dell'algebra dei limiti del Teorema 3.5.1, concludiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Per verificare l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{xe^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{3}{4}\,,$$

in quanto gli ultimi tre limiti sono uguali a 0 ancora grazie al Corollario 3.4.4 . Infine, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{3}{4}x\right) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos^2(x)}{e^x} + \lim_{x\to+\infty}\arctan(x) - \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Allora, grazie al Teorema 3.4.11 concludiamo che la retta $y = \frac{3}{4}x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per graf(f) per $x \to +\infty$. **Esercizio!**: dimostrare che la retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per graf(f) per $x \to -\infty$.

3.5 L'estensione dell'algebra dei limiti e la nozione di forma indeterminata

Come già anticipato nell'Esempio 3.4.12, vogliamo ora estendere alcuni dei risultati contenuti nel Teorema 3.3.1 al caso in cui almeno una delle funzioni f e g (che sommiamo/moltiplichiamo/dividiamo) tenda a un limite infinito. Per comodità, enunceremo il Teorema 3.5.1 nel caso di limiti per $x \to x_0$, ma anticipiamo che i risultati che daremo valgono anche nel caso in cui al limite $\lim_{x\to x_0}$ venga sistematicamente sostituito $\lim_{x\to x_0^+}$, oppure $\lim_{x\to x_0^-}$, oppure $\lim_{x\to+\infty}$, oppure $\lim_{x\to-\infty}$.

Teorema 3.5.1. *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, e $L \in \mathbb{R}$. Si ha che:*

[Estensione del limite della somma:]

$$\begin{aligned}
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \pm\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = -\infty\,;
\end{aligned}$$

[Estensione del limite del prodotto:]

$$\begin{aligned}
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \textit{ allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \pm\infty\\
&\qquad\qquad (+\infty \textit{ o } -\infty \textit{ a seconda del segno di } f\cdot g)\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = +\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = -\infty\,;\\
&\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \quad \textit{allora } \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = +\infty\,;
\end{aligned}$$

[Estensione del limite del quoziente:]

$$\textit{se} \lim_{x\to x_0} f(x) = L \ \textit{e} \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \ \ \textit{allora} \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0\,;$$

$$\textit{se} \lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \ \textit{e} \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \ \textit{allora} \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$$

$$\textit{(}+\infty \ \textit{o} \ -\infty \ \textit{a seconda del segno di} \ \frac{f}{g}\textit{)}\,;$$

$$\textit{se} \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \ \textit{e} \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \ \ \textit{allora} \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$$

$$\textit{(a seconda del segno di} \ \frac{f}{g}\textit{)}\,.$$

$$\textit{se} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ \textit{e} \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \ \ \textit{allora} \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

Questo risultato si può riassumere con il seguente schema:

$$\begin{gathered} L \pm \infty = \pm\infty\,, \\ +\infty + \infty = +\infty\,, \\ -\infty - \infty = -\infty \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} L \neq 0 : \ \ L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty\,, \\ (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,, \\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,, \\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \frac{L}{\pm\infty} = 0\,, \\ L \neq 0 : \ \ \frac{L}{0} = \pm\infty\,, \\ \frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty\,, \\ \frac{0}{\pm\infty} = 0\,, \end{gathered}$$

La nozione di forma indeterminata. I casi di mancata estensione dell'algebra dei limiti possono essere così schematizzati:

$$\begin{gathered} +\infty - \infty \\ 0 \cdot (\pm\infty) \\ \frac{0}{0} \\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \end{gathered} \tag{3.5.1}$$

Per ognuno di questi casi useremo la locuzione *forma indeterminata*: questa espressione non significa che, nei casi presentati nella (3.5.1), il limite non esista, o non sia possibile calcolarlo, ma semplicemente che non vi sono regole generali per dedurre il limite della somma/prodotto/quoziente delle funzioni f e g a partire dai limiti di f e g. Di fatto, tratteremo i diversi tipi di forme indeterminate con tecniche *ad hoc*. Ne presentiamo alcune.

Limiti all'infinito di funzioni polinomiali. Consideriamo la generica funzione polinomiale $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il limite $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ può dare luogo a una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, che trattiamo **raccogliendo il monomio in x di grado massimo** (cioè x^n):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \big(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\big) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \big(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\big) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + 0 + \ldots + 0\,.
\end{aligned}$$

Allora concludiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\big) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \pm\infty\,,$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del fatto che x tenda a $+\infty$ o a $-\infty$, che n sia pari o dispari, e del segno di a_n). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il termine di grado massimo**.

Esempio 3.5.2. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \big(-4x^3 + 5x^6 - 2x^7 + 3\big) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^7) = -\infty, \\
&\lim_{x\to-\infty} \big(3x^2 - 4x^4 - 6x^5 + 9x\big) = \lim_{x\to-\infty} (-6x^5) = +\infty.
\end{aligned}$$

Limiti all'infinito di funzioni razionali fratte. Consideriamo la generica funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad \forall\, x \in D_f\,.$$

Il limite $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado massimo** (cioè x^n e x^m, rispettivamente):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n \cdot \big(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\big)}{x^m \cdot (b_m + b_{m-1}x^{-1} + \ldots + b_1 x^{-m+1} + b_0 x^{-m})} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + 0 + \ldots + 0}{b_m x^m + 0 + \ldots + 0}
\end{aligned}$$

Allora concludiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & m > n, \\ \frac{a_n}{b_m} & m = n, \\ \pm\infty & m < n \end{cases},$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ per $x \to \pm\infty$). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado massimo al numeratore e il termine di grado massimo al denominatore**.

Esempio 3.5.3. Si hanno i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-3x^3-4x^7-5x}{5x^5-2x+3x^6-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^7}{3x^6} = -\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{x^6} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^4+5x-3}{x^5-3x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4}{x^5} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^4-5x^5+2x-3x^2}{3x^3-6x^5+4x^4-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^5}{-6x^5} = \frac{5}{6},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x^3+1-\sin(x)}{4x^2+x^3-\arctan(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(3x^{-1}-2+x^{-3}-\frac{\sin(x)}{x^3})}{x^3(4x^{-1}+1-\frac{\arctan(x)}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{x^3} = -2\,,$$

ove la prima uguaguaglianza nel secondo limite segue dal fatto che $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(x)}{x^3} = 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\arctan(x)}{x^3}$.

Limiti per $x \to 0$ di funzioni razionali fratte. Consideriamo una funzione razionale fratta data dal quoziente di due polinomi omogenei (cioè con termine noto nullo):

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x} \quad \forall\, x \in D_f\,.$$

Il limite $\lim_{x\to 0} P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $0/0$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado minimo.**

Per esempio, supponiamo che $a_1 \neq 0$ e che $b_1 = 0$, ma $b_2 \neq 0$. Allora il termine di grado minimo al numeratore è x, mentre al denominatore è x^2: in questo modo abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2 x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\big(a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1\big)}{x^2\cdot(b_m x^{m-2}+b_{m-1}x^{m-3}+\ldots+b_2)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{a_1 x + 0 + \ldots + 0}{b_2 x^2 + 0 + \ldots + 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty\,,$$

ove avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente a_1/b_2. Allo stesso modo si ha

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2 x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty \quad \text{a seconda del segno di } \frac{a_1}{b_2},$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty \quad \text{NON esiste.}$$

In generale, possiamo dare la seguente regola: siano

$$\begin{aligned} &\bar{i} \text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } P(x),\\ &\bar{j} \text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } Q(x). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^\pm} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x}\\ &= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{a_{\bar{i}} x^{\bar{i}}}{b_{\bar{j}} x^{\bar{j}}} = \begin{cases} 0 & \text{nel caso } \bar{i} > \bar{j},\\ \frac{a_{\bar{i}}}{b_{\bar{j}}} & \text{nel caso } \bar{i} = \bar{j},\\ \pm\infty, \text{ oppure non esiste se si ha } \lim_{x\to 0} & \text{nel caso } \bar{i} < \bar{j} \end{cases} \end{aligned}$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente P/Q). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado minimo al numeratore e il termine di grado minimo al denominatore.**

Esempio 3.5.4. Si ha quindi che

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{4x^5 - 3x^4 + 3x^3}{-6x^7 + 7x^8 - 2x^2} = 0,\\ &\lim_{x\to 0} \frac{5x^5 - 3x^2 + 3x}{x^6 - 2x + 3x^2} = -\frac{3}{2},\\ &\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^3 - 6x^6 + 2x}{5x^5 - 3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{-3x^3} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = -\infty\,. \end{aligned}$$

Limiti notevoli. Tratteremo una vasta classe di forme indeterminate di tipo 0/0 <u>non associate</u> a funzioni razionali fratte facendo uso dei seguenti *limiti notevoli:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \tag{3.5.2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \tag{3.5.3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \tag{3.5.4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \tag{3.5.5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1\,, \tag{3.5.6}$$

che possono essere dimostrati usando il *Teorema di De l'Hôpital*, si veda il Capitolo 5 sulle derivate.

Capitolo 4

Continuità

4.1 La nozione di continuità

Definizione 4.1.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Diciamo che f* è continua in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \,. \tag{4.1.1}$$

Se f non è continua in x_0, diciamo che f è discontinua in x_0 *(o che f* ha un punto di discontinuità in x_0*).*

Osservazione 4.1.2.

- Notiamo che, per dar senso alla (4.1.1), è necessario sia che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f (in modo che abbia senso considerare il limite di f per $x \to x_0$), sia che $x_0 \in D_f$ (cosicché si possa calcolare f in x_0). **Ci si pone dunque il problema della continuità di una funzione in un punto solo se tale punto è di accumulazione per il dominio della funzione e vi appartiene**.

  Ricordiamo che non esistono legami fra il fatto che un punto x_0 sia di accumulazione per D_f e il fatto che $x_0 \in D_f$. Ad esempio,

  – se $D_f = \{4\} \cup [5, 7]$, il punto $4 \in D_f$ non è di accumulazione per D_f;
  – se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (come nel caso di $f(x) = \frac{1}{x}$), allora $0 \notin D_f$, ma 0 è un punto di accumulazione per D_f;
  – se $D_f = I$ è un intervallo (limitato/illimitato, chiuso o semiaperto o aperto), si vede subito che per ogni $x \in I$, x è di accumulazione per I.

- Con la (4.1.1) stiamo richiedendo che

  1. il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esista,
  2. il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sia finito,

3. il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ coincida con il valore della funzione in x_0.

Come vedremo nella Sezione 4.3, la continuità di f in un punto x_0 (di accumulazione e appartenente a D_f) cade non appena cade una delle tre condizioni summenzionate. In tal caso, si dice che x_0 è un *punto di discontinuità* per f.

- Ribadiamo che, nella (4.1.1), stiamo imponendo anche una condizione su f nel punto x_0, a differenza di quanto visto nella definizione di limite, ove il comportamento di f in x_0 è ininfluente.

Motivati dalle stesse considerazioni che ci hanno portato a introdurre i limiti unilateri, possiamo definire una nozione di continuità a destra/a sinistra di f in x_0, in termini dei limiti destro/sinistro.

Definizione 4.1.3. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Diciamo che f* è continua a destra in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\,. \tag{4.1.2}$$

Diciamo che f è continua a sinistra in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,. \tag{4.1.3}$$

Definizione 4.1.4. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia $A \neq \emptyset$ un insieme costituito da punti di accumulazione per D_f, tale che $A \subset D_f$. Diciamo che f* è continua in A *se f è continua (continua a destra/a sinistra, nei punti dove sia possibile calcolare solo limiti unilateri) in tutti i punti di A, e scriviamo $f \in \mathrm{C}^0(A)$.*

Esempio 4.1.5. Consideriamo le seguenti funzioni[1]:

$$f_1(x) := x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$
$$f_2(x) := \begin{cases} x & x \neq 2\,, \\ 3 & x = 2 \end{cases}\,,$$
$$f_3(x) := \begin{cases} x & x \leq 2\,, \\ 3 & x > 2\,, \end{cases}$$
$$f_4(x) := \begin{cases} x & x < 2\,, \\ 3 & x \geq 2\,. \end{cases}$$

Si ha che $f_1 \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$; invece, f_2 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$, f non è né continua a destra, né continua a sinistra in 2; inoltre, f_3 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 = f(2)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, f non è continua a destra, ma è continua a sinistra in 2; infine, f_4 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 = f(2)$, f non è continua a sinistra, ma è continua a destra in 2.

Enunciamo ora un risultato sul legame fra la nozione di continuità e la continuità a destra/sinistra, che è analogo al Teorema 3.2.13 sul rapporto fra limite e limiti unilateri.

[1] Esercizio!: disegnarne il grafico.

Teorema 4.1.6. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Supponiamo che esista $r > 0$ tale che l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D_f$*[2]*. Allora*

$$f \text{ è continua in } x_0 \text{ se e solo se } f \text{ è } \underline{\text{sia}} \text{ continua a destra, } \underline{\text{sia}} \text{ continua a sinistra in } x_0 .$$

La dimostrazione di questo risultato discende direttamente dalle Definizioni 4.1.1 e 4.1.3, e dal Teorema 3.2.13. In effetti,

$$\begin{gathered} f \text{ è continua in } x_0 \\ \Updownarrow \\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \\ \Updownarrow \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \ \text{ e } \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \\ \Updownarrow \\ f \text{ è continua a destra in } x_0 \ \text{ e } \ f \text{ è continua a sinistra in } x_0. \end{gathered}$$

Esempio 4.1.7.

1. La funzione $f(x) := |x|$, con $D_f = \mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R}$: in effetti, per $x > 0$ essa coincide con la funzione continua $g(x) = x$, e analogamente per $x < 0$ essa coincide con la funzione continua $h(x) = -x$. Infine, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$.

2. Consideriamo $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$, con $D_f = [-1, 1]$. Allora si verifica subito che f è continua in $(-1, 1)$. Agli estremi dell'intervallo si può solo considerare la continuità a destra/sinistra: ricordando l'Esempio 3.2.11, si conclude subito che f è sia continua a destra in -1, sia continua a sinistra in 1. Quindi $f \in C^0([-1, 1])$.

3. Consideriamo la *funzione di Heaviside*

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ 1 & x \geq 0\,. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Si vede subito che $H \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, mentre H è continua a destra, ma non a sinistra in $x_0 = 0$: allora, per il Teorema 4.1.6, H è discontinua in 0. Siccome

$$\nexists \lim_{x\to 0} H(x),$$

comunque si ridefinisca la funzione H in $x = 0$, non vi è modo di ottenere una funzione continua.

4. Consideriamo le funzioni

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ -1 & x < 0\,, \end{cases} \qquad \operatorname{sign}_0(x) := \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \\ -1 & x < 0\,. \end{cases}$$

[2] stiamo cioè richiedendo che x_0 sia *interno* a D_f, si veda il Capitolo 5. Intuitivamente, ciò significa che f è definita sia a destra sia a sinistra di x_0: questo ovviamente ci permette di parlare sia di continuità a destra, sia di continuità a sinistra.

Si ha che sign è continua in dom(sign)$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ =: poiché $0 \notin$ dom(sign), non ha senso porsi il problema della continuità di sign in 0.
D'altra parte, sign_0 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha in 0 un punto di discontinuità: in effetti, poiché $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sign}_0(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{sign}_0(x) = -1$, sign_0 non è né continua a destra, né continua a sinistra in 0. *Osserviamo che, comunque si ridefinisca la funzione* sign_0 *in* $x = 0$*, non vi è modo di ottenere una funzione continua: infatti, non esiste* $\lim_{x\to 0} \mathrm{sign}_0(x)$.

5. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \qquad\qquad f_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0\,, \\ 57 & x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha che f è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siccome $0 \notin \mathrm{dom}(f)$, non ha senso porsi il problema della continuità di f in 0.
D'altra parte, f_0 è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e ha in 0 un punto di discontinuità: in effetti, poiché $\lim_{x\to 0^+} f_0(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f_0(x) = -\infty$, f_0 non è né continua a destra, né continua a sinistra in 0. *Osserviamo che, comunque si ridefinisca la funzione* f_0 *in* $x = 0$*, non vi è modo di ottenere una funzione continua.* In effetti, $\nexists \lim_{x\to 0} f_0(x)$.

4.2 Proprietà della classe delle funzioni continue

Continuità delle funzioni elementari. Ricordando l'Esempio 3.2.7, concludiamo che **tutte le funzioni elementari** (cioè le funzioni potenza a esponente reale, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni trigonometriche e le trigonometriche inverse) **sono continue in ogni punto del loro dominio.**

Continuità e operazioni su funzioni. Il seguente risultato discende dall'analogo teorema su limiti e operazioni su funzioni (il Teorema 3.3.1).

Teorema 4.2.1. *Siano* f, $g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ *un punto di accumulazione per* D, $c \in \mathbb{R}$, *e* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. *Supponiamo che*

$$f \text{ e } g \text{ siano continue in } x_0.$$

Allora,

- *la funzione somma* $f + g$ *è continua in* x_0*;*
- *la funzione prodotto* $f \cdot g$ *è continua in* x_0*;*
- *la funzione* cf *è continua in* x_0*;*
- *se* $g(x_0) \neq 0$*, la funzione quoziente* $\frac{f}{g}$ *è continua in* x_0*.*
- *la funzione potenza* $(f)^{m/n}$ *è continua in* x_0 *se*

$$\begin{cases} f(x_0) \geq 0 & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ pari,} \\ \textit{per qualsiasi valore } f(x_0) \in \mathbb{R} & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ dispari,} \\ f(x_0) > 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ pari,} \\ f(x_0) \neq 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ dispari.} \end{cases}$$

In particolare, concludiamo che ogni funzione polinomiale è continua in $\mathbb{R}$, e che ogni funzione razionale fratta è continua sul suo dominio di definizione.

Continuità e composizione di funzioni.

Teorema 4.2.2. *Siano* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *e* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *tali che* $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$, *e sia* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per* $D_{f\circ g}$[3]. *Abbiamo i tre seguenti risultati:*

1. *Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}\,, \quad L \in D_f\,, \quad L \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,, \tag{4.2.1}$$

$$f \text{ sia continua in } L. \tag{4.2.2}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)\,. \tag{4.2.3}$$

2. *Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}\,, \quad L \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,, \tag{4.2.4}$$

$$\exists \lim_{y\to L} f(y) = M \in [-\infty, +\infty]\,, \tag{4.2.5}$$

$$\exists\, r > 0\ :\ \forall\, x \in D_g \cap \Big((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}\Big)\quad g(x) \neq L\,. \tag{4.2.6}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)\,. \tag{4.2.7}$$

3. *Supponiamo che*[4]

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\,, \tag{4.2.8}$$

$$\exists \lim_{y\to +\infty} f(y) = M \in [-\infty, +\infty]\,. \tag{4.2.9}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = M\,. \tag{4.2.10}$$

Osservazione 4.2.3.
- Si osservi che la (4.2.6) è verificata se, per esempio, g è iniettiva in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0.
- Questo risultato si estende anche al caso in cui nella (4.2.1), o nella (4.2.4), o nella (4.2.8) si sostituisca a $\lim_{x\to x_0}$ un limite unilatero, oppure un limite per $x \to \pm\infty$.
- Questo risultato si estende anche alla composizione di un numero finito funzioni.
- Le formule (4.2.3), (4.2.7), (4.2.10) ci permettono, nel caso in cui le rispettive ipotesi siano verificate, di calcolare il limite per $x \to x_0$ della funzione composta $f \circ g$ in due passi: prima di tutto, calcoliamo il $\lim_{x\to x_0}$ della funzione interna g, e poi calcoliamo $f(\lim_{x\to x_0} g(x))$. Siamo cioè autorizzati (sotto le summenzionate ipotesi) a calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ effettuando la sostituzione $y = g(x)$ e riducendo il problema al calcolo del limite $\lim f(y)$, per y tendente a L nei casi 1. e 2., e a $+\infty$ o $-\infty$ nel caso 3. Si veda l'Esempio 4.2.5.

[3] poiché $D_{f\circ g} \subset D_g$, questo implica che $x_0 \in \mathbb{R}$ è anche un punto di accumulazione per D_g.
[4] Vale un enunciato analogo nel caso in cui $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

- Osserviamo che tutte le ipotesi di entrambi i punti del teorema sono necessarie: in particolare, il prossimo esempio mostra che, se vale la (4.2.1) ma non la (4.2.2), la tesi (4.2.3) può essere falsa.

Esempio 4.2.4. Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0\,, \\ 0 & x < 0\,, \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0\,, \\ 1 & y = 0\,. \end{cases}$$

Allora $\mathrm{im}(g) = [0, +\infty) \subset \mathrm{dom}(f)$ e la composizione è ben definita, con $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$. Prendiamo $x_0 = 0$: chiaramente $0 \in \mathrm{dom}(f \circ g)$ ed è un punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$. Si ha che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Ma ora f non è continua in $y = 0$ e infatti, calcolando

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x > 0\,, \\ 1 & x \leq 0\,, \end{cases}$$

vediamo che $\nexists \lim_{x\to 0} f(g(x))$.

Vediamo ora qualche applicazione del Teorema 4.2.2 al calcolo dei limiti.

Esempio 4.2.5. Si ha:

1.
$$\lim_{x\to 0} \big(\arctan(x^4) + 2\ln(1 + \sin(x^2)) \big) = 0\,.$$

   Infatti, $x^4 \to 0$ per $x \to 0$ ed, essendo la funzione arctan continua in 0, concludiamo che $\lim_{x\to 0} \arctan(x^4) = 0$. Allo stesso modo $x^2 \to 0$ per $x \to 0$, quindi grazie alla continuità di sin abbiamo che $\sin(x^2) \to 0$ e quindi per la continuità di ln concludiamo che $\lim_{x\to 0} \ln(1 + \sin(x^2)) = \ln(1) = 0$.

2.
$$\lim_{x\to 0^+} \left[\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) + \frac{1}{2}\tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) + e^{-3/x^2} \right] = \frac{1}{2}\,.$$

   In effetti, sfruttando la continuità delle funzioni elementari osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{\pi}{2} \\
&\qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \\
&\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = 1 \\
&\qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right) = \frac{1}{2}\,, \\
&\lim_{x\to 0^+} \left(-3/x^2\right) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} e^{-3/x^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

3.
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sin(x)) = -\infty\,.$$

È conseguenza del punto 2. del Teorema 4.2.2: in effetti[5], $\sin(x) \to 0$ per $x \to 0^+$, e $\sin(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$, quindi la (4.2.6) è verificata. Allora,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(\sin(x)) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

4.
$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^3 \arctan(\ln(3x))} = +\infty\,.$$

Infatti $\ln(3x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, quindi $\arctan(\ln(3x)) \to \pi/2$ per $x \to +\infty$, e $x^3 \arctan(\ln(3x)) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Applicando la (4.2.10), concludiamo.

Il seguente risultato è un corollario diretto (della prima parte) del Teorema 4.2.2.

Corollario 4.2.6 (Continuità della funzione composta)**.** *Siano* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *e* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *tali che* $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$, *e sia* $x_0 \in D_{f \circ g}$ *un punto di accumulazione per* $D_{f \circ g}$. *Supponiamo che*

$$g \textit{ sia continua in } x_0, \tag{4.2.11}$$
$$f \textit{ sia continua in } g(x_0). \tag{4.2.12}$$

Allora $f \circ g$ *è continua in* x_0, *cioè* $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$.

In particolare, da questo risultato (che si estende alla composizione di un numero finito di funzioni) deduciamo che **tutte le funzioni date dalla composizione di funzioni elementari sono continue sul loro dominio di definizione**. Sono per esempio continue sul loro dominio

$$f_1(x) := \frac{e^{x^4}}{x^2 + 3x + 2} + 3\sin(\ln(1 + x^2)) \qquad \forall\, x \in D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}\,,$$
$$f_2(x) := |x| \cdot \frac{x+3}{x-1} \qquad \forall\, x \in D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,$$
$$f_3(x) := x \cdot 2^x + \ln(\arctan(x)) + 4\tan(x) \qquad \forall\, x \in D_{f_3} = (0, +\infty) \cap \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4.3 Classificazione dei punti di discontinuità

Osservazione 4.3.1. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$ un punto di accumulazione per D_f. Supponiamo che $x_0 \in D_f$ sia un punto di discontinuità per f. Possono allora presentarsi le seguenti situazioni:

- $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $L \neq f(x_0)$;
- $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \notin \mathbb{R}$;
- $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Diamo ora una classificazione più precisa dei punti di discontinuità.

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ (x_0 punto di accumulazione per D_f), un punto di discontinuità per f. Allora possono presentarsi questi casi:

[5] si noti che, per $x \to 0^+$, $\sin(x)$ assume valori positivi!

♣ *f ha una discontinuità eliminabile in x_0* se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L \neq f(x_0)\,. \tag{4.3.1}$$

Per esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1\,, \\ 57 & x = 1\,, \end{cases}$$

hanno, rispettivamente, un punto di discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$ e in $x_0 = 1$. Questo tipo di discontinuità viene detto "eliminabile" perché, ridefinendo la funzione f in questo modo:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0\,, \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & x = x_0\,, \end{cases}$$

si ottiene una funzione $\tilde{f}$ continua in x_0. Si può cioè *eliminare* la discontinuità nel punto x_0.

♣ *f ha una discontinuità di prima specie (o di tipo salto) in x_0* se

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}\,, \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}\,, \quad \text{e} \quad L^+ \neq L^-\,. \tag{4.3.2}$$

(quindi $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$). Per esempio, la funzione H di Heavidside definita dalla (4.1.4) ha in $x_0 = 0$ un punto di salto. Un altro esempio è dato da

$$f_3(x) := \begin{cases} -x & x \leq 0\,, \\ x - 2 & x > 0\,. \end{cases}$$

In questo caso $x_0 = 0$ è un punto di salto per f_3, in quanto $\lim_{x \to 0^-} f_3(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = -2$.

♣ *f ha un punto di infinito in x_0* se

$$\begin{gathered} \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+\,, \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-\,, \\ \text{e almeno uno fra } L^+ \text{ e } L^- \text{ è infinito.} \end{gathered} \tag{4.3.3}$$

Per esempio,

$$f_4(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_5(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_6(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0\,, \\ 0 & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Per tutte queste funzioni $x_0 = 0$ è un punto di infinito. Si noti che $\exists \lim_{x \to 0} f_4(x) = \lim_{x \to 0^+} f_4(x) = \lim_{x \to 0^-} f_4(x) = +\infty$, mentre $\nexists \lim_{x \to 0} f_5(x)$ (si riveda l'Esempio 3.4.7) e $\nexists \lim_{x \to 0} f_6(x)$: in quest'ultimo caso, $\lim_{x \to 0^+} f_6(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x \to 0^-} f_6(x) = 0$.

♣ *f ha un punto di discontinuità di seconda specie in x_0* se

$$\text{non esiste almeno uno fra } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x). \tag{4.3.4}$$

Per esempio,

$$f_7(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0\,, \\ 0 & x \leq 0\,, \end{cases} \qquad f_8(x) := \begin{cases} 0 & x \geq 0\,, \\ \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0\,. \end{cases}$$

Si noti in entrambi i casi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie: infatti $\nexists \lim_{x\to 0^+} f_7(x)$ (cf. con L'Esempio 3.3.4) e neppure $\nexists \lim_{x\to 0^-} f_8(x)$; d'altra parte, la funzione f_7 è limitata su $\mathbb{R}$ ($-1 \leq f_7(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), mentre f_8 non è limitata su $(-\infty, 0)$: per $x < 0$ il suo grafico è infatti compreso fra i grafici delle funzioni $g(x) = -\frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

4.4 Funzioni continue su intervalli

Nel seguito, considereremo funzioni definite su intervalli e ivi continue. La continuità e l'ipotesi che il dominio sia un intervallo sono alla base dei seguenti risultati, che precisano alcune importanti proprietà delle funzioni in questione e del loro grafico.

Il teorema di Weierstrass.

Definizione 4.4.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$. Un punto $x_m \in D_f$ viene detto* punto di minimo assoluto *per f se*

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{4.4.1}$$

e il corrispondente valore $f(x_m)$ viene detto valore di minimo assoluto *per f.*

Un punto $x_M \in D_f$ viene detto punto di massimo assoluto *per f se*

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{4.4.2}$$

e il corrispondente valore $f(x_M)$ viene detto valore di massimo assoluto *per f.*

Osserviamo che, di fatto,

$$f(x_m) = \min\{f(x) \,:\, x \in D_f\} = \min \operatorname{im}(f)\,, \qquad f(x_M) = \max\{f(x) \,:\, x \in D_f\} = \max \operatorname{im}(f)\,,$$

quindi sia il valore di massimo assoluto sia il valore di minimo assoluto, se esistono, sono univocamente determinati, mentre a priori una funzione potrebbe avere più punti di minimo (massimo) assoluto. Per esempio, la funzione $W : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ data da[6]

$$W(x) := \begin{cases} |x| & x \in [-1, 1]\,, \\ |x - 2| & x \in (1, 3]\,, \end{cases}$$

ha in $[-1, 3]$ due punti di minimo assoluto (sono i punti $x_m^1 = 0$ e $x_m^2 = 2$, corrispondenti al valore di minimo assoluto $m = 0$) e tre punti di massimo assoluto (sono $x_M^1 = -1$, $x_M^2 = 1$, e $x_M^3 = 3$, corrispondenti al valore di massimo assoluto $M = 1$).

Ci chiediamo se, data una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, essa ammette almeno un punto di minimo, e almeno un punto di massimo assoluto. Questo è in generale FALSO, come mostra il seguente

[6] **Esercizio!**: disegnarne il grafico!

Esempio 4.4.2. Consideriamo le funzioni:

1. $f(x) := e^x$, ristretta all'intervallo $I = [0, +\infty)$. In questo caso si ha che $f(x) \geq f(0) = 1$ per ogni $x \geq 0$, quindi $x_m = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[0, +\infty)$. Poiché $\mathrm{im}(f) = [1, +\infty)$, $\sup \mathrm{im}(f) = +\infty$ e quindi $\mathrm{im}(f)$ non ammette massimo. Pertanto f non ha alcun punto di massimo assoluto su I.

2. $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi $\inf(\mathrm{im}(f)) = 0 \notin \mathrm{im}(f)$. Pertanto $\mathrm{im}(f)$ non ammette minimo, quindi f non ha né massimo, né minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \tan(x)$, ristretta all'intervallo $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poiché $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, tan non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto.

Osserviamo tutte le funzioni in questione sono continue, e che nel primo e nel secondo esempio l'intervallo di definizione è illimitato, mentre nel terzo l'intervallo è aperto. Diamo ora l'esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato, che però non ammette né minimo né massimo assoluto.

Esempio 4.4.3. Consideriamo la funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 2 & x = 0\,, \\ x & x \in (0,3)\,, \\ 1 & x = 3\,. \end{cases}$$

Disegnandone il grafico, osserviamo che f non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto. Notiamo che f non è continua in $[0, 3]$: in effetti, f è continua su $(0, 3)$, ma non è continua a sinistra in $x = 0$, e non è continua a destra in $x = 3$.

Tenendo conto degli esempi precedenti, congetturiamo che l'esistenza o meno di un punto di minimo/massimo assoluto dipenda sia da proprietà dell'intervallo di definizione (che dovrà essere chiuso e limitato, e denoteremo il generico intervallo chiuso e limitato con $[a, b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$), sia da proprietà della funzione (che dovrà essere continua). Questo è quanto asserito dal

Teorema 4.4.4 (Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f ha almeno un punto di minimo assoluto e almeno un punto di massimo assoluto in $[a, b]$, cioè*

$$\exists\, x_m \in [a,b]\,, \;\; \exists\, x_M \in [a,b]\, : \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \;\; \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{4.4.3}$$

Vediamo subito un'immediata conseguenza di questo risultato.

Corollario 4.4.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata su $[a, b]$, cioè*

$$\exists\, K > 0\, : \quad -K \leq f(x) \leq K \quad \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{4.4.4}$$

Dimostrazione. Dalla (4.4.3) segue che, essendo $m := f(x_m)$ e $M := f(x_M)$, $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora la (4.4.4) segue ponendo $K := \max\{|m|, |M|\}$. □

Per esempio, il Teorema 4.4.4 e il Corollario 4.4.5 garantiscono che la funzione[7]

$$f(x) := x^4 + \arctan\big(\sin(3x^2)\big) + \frac{x\cos(x)}{x^2+2} \quad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R}\,,$$

[7] lo studio del suo grafico qualitativo potrebbe essere complesso.

è limitata ed ammette almeno un punto di minimo e almeno un punto di massimo assoluto su ogni intervallo del tipo $[a,b]$, con $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. In effetti, essa è continua (sul suo dominio, che è $\mathbb{R}$, quindi in particolare su $[a,b]$) in quanto data da somme/prodotti/quozienti/composizioni di funzioni continue. Allo stesso modo, la funzione

$$f(x) = \exp\left(x^3+1\right)\arctan(x) + \arcsin(\tan(x)),$$

definita su

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z},\, |\tan(x)| \leq 1\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] = \ldots \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \cup \ldots$$

è continua su D_f, in quanto data dalla somma/prodotto/composizione di funzioni continue. Quindi f ammette almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo assoluto su ogni intervallo (chiuso e limitato) della forma $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 4.4.6.

- Osserviamo che il Teorema di Weierstrass garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di minimo/massimo assoluto. Per esempio, la funzione

  $$f(x) := |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

  ha sull'intervallo $[-1,1]$ un (unico) punto di minimo assoluto: $x_m = 0$, e due punti di massimo assoluto: $x_M^1 = 1$ e $x_M^2 = -1$. D'altra parte, la funzione $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definita da

  $$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0], \\ x & \text{se } x \in (0,1], \\ 1 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

  ha infiniti punti di minimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[-1,0]$) e infiniti punti di massimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[1,2]$).

- Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie: in altri termini, tralasciandone anche solo una, la tesi non vale.
  - La funzione $f_1(x) = \frac{1}{x}$, che consideriamo sull'intervallo $I_1 = (0,1]$, è continua su I_1, ha in $x_m = 1$ un punto di minimo assoluto, ma non ammette alcun punto di massimo assoluto. Si noti però che I_1, pur essendo limitato, non è chiuso.
  - La funzione $f_2(x) = x^2$ è continua su $I_2 = \mathbb{R}$, ha in $x_m = 0$ l'unico punto di minimo assoluto, ma non ammette punti di massimo assoluto. In effetti, I_2 non è limitato.
  - La funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

    $$f(x) := \begin{cases} x+1 & x \in [0,1)\,, \\ 1 & x = 1\,, \\ x-1 & x \in (1,2]\,, \end{cases}$$

    non ha né un punto di minimo né un punto di massimo assoluto su $[0,2]$. Si noti però che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mentre ha in 1 un punto di discontinuità di tipo salto. Quindi è sufficiente far cadere la continuità anche in un solo punto dell'intervallo di definizione, per rendere falsa la (4.4.3).

Il teorema di Bolzano (o degli zeri).

Teorema 4.4.7 (Bolzano)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che*[8]

$$f(a) \cdot f(b) < 0 . \tag{4.4.5}$$

Allora

$$\exists\, x_0 \in (a, b) : \quad f(x_0) = 0 . \tag{4.4.6}$$

Il punto x_0 di annullamento di f viene anche detto zero di f.

Osservazione 4.4.8.

- Dalla (4.4.5) segue in particolare che $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$: quindi lo zero x_0 di f "deve trovarsi" in (a, b).
- Il teorema di Bolzano garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di annullamento di f: in effetti
  - la funzione $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := x - 2$ per ogni $x \in [1, 3]$ ha in $x_0 = 2$ il suo unico zero.
  - La funzione $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := x^3 - x = x(x^2 - 1)$ per ogni $x \in [-2, 2]$ ha tre zeri: $x_0^1 = -1$, $x_0^2 = 0$, e $x_0^3 = 1$.
  - La funzione $h : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definita da[9]

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [0, 1] , \\ 0 & x \in (1, 2] , \\ x - 2 & x \in (2, 3] , \end{cases}$$

ha infiniti zeri (tutti i punti dell'intervallo $[1, 2]$).

Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie, come mostrano i seguenti controesempi:

Esempio 4.4.9.

1. La funzione $f_1 : [-2, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < 0 , \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 , \end{cases}$$

verifica la (4.4.5), ma non ammette alcun punto di annullamento. Si noti che f è continua su $[-2, 1] \setminus \{0\}$. Quindi l'esistenza di un solo punto di discontinuità è sufficiente a far cadere la (4.4.6).

2. Consideriamo la funzione $f_2(x) = e^{-x}$, con $x \in [-1, 1]$. Si ha che $f_2 \in C^0([-1, 1])$, ma f_2 non si annulla in nessun punto di $[-1, 1]$. Notiamo che $f_2(-1) = e > 0$ e $f_2(1) = 1/e > 0$, quindi la (4.4.5) è violata.

Mostriamo ora un'applicazione del teorema di Bolzano alla localizzazione degli zeri di una funzione f continua. Come vedremo, l'idea è che il Teorema 4.4.7 non viene applicato sull'intero dominio di definizione di f, ma alla restrizione di f a un sottointervallo (chiuso e limitato), agli estremi del quale è verificata la condizione (4.4.5).

Esempio 4.4.10 (Localizzazione degli zeri di un polinomio)**.** Dimostriamo che esiste una radice x_0 dell'equazione $x^4 - x - 2 = 0$ verificante $x_0 \in [1, 2]$. A questo scopo, consideriamo la funzione polinomiale $P(x) := x^4 - x - 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: P è continua su $\mathbb{R}$ e $P(1) = -2$, mentre $P(2) = 12$. Quindi, grazie al Teorema 4.4.7 concludiamo che, di fatto, l'equazione ammette almeno una radice $x_0 \in (1, 2)$.

[8] questo significa che, agli estremi dell'intervallo di definizione, f deve assumere valori discordi!

[9] **Esercizio!**: disegnarne il grafico!

Il teorema dei valori intermedi. È il corollario più significativo del Teorema di Bolzano.

Teorema 4.4.11 (Valori intermedi (I))**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora,* f *assume almeno una volta ogni valore* y *compreso fra il suo valore* m *di minimo assoluto su* $[a, b]$ *e il suo valore* M *di massimo assoluto su* $[a, b]$ *.*

Facciamo qualche commento su questo enunciato: ricordiamo che, grazie al Teorema di Weierstrass, poiché $f \in C^0([a, b])$ esistono $x_m \in [a, b]$ e $x_M \in [a, b]$ tali che $m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M$ per ogni $x \in [a, b]$. In altri termini,

$$\mathrm{im}(f) \subset [m, M] . \tag{4.4.7}$$

Ora, il Teorema 4.4.11 afferma che, se $f \in C^0([a, b])$, per ogni $y \in [m, M]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$. In altri termini, per ogni $y \in [m, M]$ si ha che $y \in \mathrm{im}(f)$, cioè vale

$$[m, M] \subset \mathrm{im}(f) . \tag{4.4.8}$$

Combinando la (4.4.7) e la (4.4.8), si conclude che $\mathrm{im}(f) = [m, M]$, cioè che **l'insieme immagine di f è un intervallo** (più precisamente, l'intervallo $[m, M]$).

In effetti, il Teorema dei valori intermedi si potrebbe anche enunciare in questa forma:

Teorema 4.4.12 (Valori intermedi (II))**.** *Sia* I *un intervallo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora,* $\mathrm{im}(f)$ *è un intervallo.*

L'interpretazione grafica di questo risultato è immediata: il grafico di una funzione continua su un intervallo non presenta interruzioni e può essere tracciato senza staccare la matita dal foglio.

Dimostrazione del Teorema 4.4.11. Siano $x_m \in [a, b]$ e $x_M \in [a, b]$ un punto di minimo e, rispettivamente, di massimo assoluto per f su $[a, b]$. Per fissare le idee, supponiamo che $x_m < x_M$. Dimostriamo che vale la (4.4.8), cioè che

$$\forall\, y \in (m, M) \;\; \exists\, x \in [a, b] : \quad y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y - f(x) = 0. \tag{4.4.9}$$

(chiaramente, essendo $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, si ha che $m,\, M \in \mathrm{im}(f)$.) Per fare ciò, fissato $y \in (m, M)$ introduciamo la funzione $g_y(x) := y - f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Osserviamo che g_y è continua, in quanto è data dalla differenza di una costante e di una funzione continua. Applichiamo il Teorema degli zeri alla restrizione di g_y all'intervallo $[x_m, x_M]$. Usando la (4.4.3), si vede subito che $g_y(x_m) = y - f(x_m) > 0$ e $g_y(x_M) = y - f(x_M) < 0$. Allora, grazie al Teorema 4.4.7 concludiamo che esiste $x \in (x_m, x_M)$ tale che $y = f(x)$. Ripetendo il ragionamento per ogni $y \in (m, M)$, concludiamo la (4.4.9). □

Capitolo 5

Derivate

5.1 Introduzione

Il concetto di derivata è intrinsecamente legato a quello di limite. Entra naturalmente in gioco nella **modellizzazione matematica** di tutti quei problemi in cui interviene lo studio della variazione di una grandezza rispetto ad un'altra.

5.2 Definizione di derivata

Prima di dare la definizione di derivata, precisiamo che, d'ora in poi, considereremo solo funzioni definite su un generico intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Definizione 5.2.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto. Un punto $x_0 \in I$ si dice* interno ad I *se esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Se x_0 non è un punto interno ad I, si dice* esterno.

Per esempio, se $I = (a, b]$, tutti i punti in (a, b) sono interni, mentre il punto $x_0 = b$ è esterno. Se $I = [a, b]$, allora i punti a e b sono esterni, e tutti i punti in (a, b) sono interni. Se $I = (a, +\infty)$, tutti i punti di I sono interni a I, mentre se $I = (-\infty, a]$, sono interni a I i punti in $(-\infty, a)$, mentre il punto a è esterno a I.

Definizione 5.2.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che x_0 sia un <u>punto interno ad I</u>. Dato $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tale che $x_0 + h \in I$[1], chiamiamo* rapporto incrementale di f relativo al punto x_0 e all'incremento h *il quoziente*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5.2.1}$$

Se esiste (finito o no) il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{5.2.2}$$

[1] e questo è verificato per $|h|$ sufficientemente piccolo, si veda l'Osservazione 5.2.3.

tale limite si chiama derivata di f nel punto x_0 *e si denota con il simbolo* $f'(x_0)$.

Inoltre, se il limite (5.2.2) *(esiste ed) è finito, la funzione* f *si dice* derivabile nel punto x_0.

Osservazione 5.2.3. • È chiaro dalla definizione (5.2.1) che, per poter considerare il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale di f relativo a x_0, è necessario supporre che x_0 sia un punto interno, cioè che esista $r > 0$ con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Allora il quoziente (5.2.1) è ben definito per ogni $h \in \mathbb{R}$ verificante $0 < |h| < r$: in effetti, quest'ultima disuguaglianza assicura proprio che x_0+h appartiene all'intervallo (x_0-r, x_0+r), il quale è un sottoinsieme del dominio I.

- La derivata di f in x_0 (punto interno) viene anche definita come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{5.2.3}$$

Ovviamente, se il limite (5.2.3) esiste, esso coincide con (5.2.2), pur di effettuare il cambiamento di variabile $h = x - x_0$, quindi la definizione (5.2.3) è del tutto equivalente alla (5.2.2). Notazioni alternative a $f'(x_0)$ sono: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0}|_{x=x_0}$, e $Df(x_0)$.

Definizione 5.2.4. *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \subset I$ *un sottointervallo di* I. *Supponiamo che per ogni* $x \in J$ f *sia derivabile in* x. *Allora si dice che* f è derivabile su J. *Chiamiamo* funzione derivata *la funzione*

$$f' : J \to \mathbb{R} \text{ definita da } \quad x \in J \mapsto f'(x).$$

Significato geometrico della nozione di derivata. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno a I. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora,

$$\begin{gathered}f'(x_0) \textbf{ è il coefficiente angolare della} \\ \textbf{retta tangente al grafico di } f \textbf{ nel punto } (x_0, f(x_0)).\end{gathered} \tag{5.2.4}$$

La (5.2.4) è in accordo con l'interpretazione della retta tangente come "retta limite" delle rette secanti graf(f), passanti per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, al tendere di h a zero. In effetti, per ogni $h \neq 0$ il coefficiente angolare della retta secante graf(f) e passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è dato da

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

cioè è il rapporto incrementale di f relativo a x_0 e all'incremento h. Al tendere di h a zero, il limite di m_h sarà il coefficiente angolare della retta tangente a graf(f) nel punto $(x_0, f(x_0))$. Ma il limite di m_h, quando esiste, è proprio la derivata di f in x_0, il che giustifica la (5.2.4).

Ne risulta che l'equazione della retta tangente a f in x_0[2] è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{5.2.5}$$

Esempio 5.2.5. 1. Per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ nel punto $(-2, -8)$, calcoliamo

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h-2)^3 - (-2)^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 - 3h^2 + 12h}{h} = 12.$$

Allora, otteniamo $y = 12(x + 2) - 8$.

[2]che si ottiene imponendo che tale retta abbia coefficiente angolare $f'(x_0)$ e passi per il punto $(x_0, f(x_0))$.

2. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = e^x$ nel punto $(0, f(0)) = (0, 1)$ è
$$y = x + 1\,.$$
In effetti,
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$
per un ben noto limite notevole.

Infine, ricordiamo che, data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno a I, se esiste $f'(x_0) = \pm\infty$, allora la retta tangente a graf(f) nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta verticale di equazione $x = x_0$, e si dice che $(x_0, f(x_0))$ *è un punto a tangente verticale per* graf(f).

Derivate destre e sinistre. Le stesse motivazioni addotte per limiti unilateri ci portano a introdurre due nozioni di "derivate unilatere", definite come limiti unilateri del rapporto incrementale di f relativo a un dato punto $x_0 \in I$.

Definizione 5.2.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.*

- *Supponiamo che $x_0 \in I$ sia interno a I, o che x_0 sia l'estremo sinistro di I. Se il limite del rapporto incrementale di f, relativo a x_0 e all'incremento h, al tendere di h a 0^+:*
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
esiste, finito o no, allora tale limite viene detto derivata destra di f in x_0 *e denotato con il simbolo $f'_+(x_0)$.*
- *Supponiamo che $x_0 \in I$ sia interno a I, o che x_0 sia l'estremo destro di I. Se il limite del rapporto incrementale di f, relativo a x_0 e all'incremento h, al tendere di h a 0^-:*
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
esiste, finito o no, allora tale limite viene detto derivata sinistra di f in x_0 *e denotato con il simbolo $f'_-(x_0)$.*

In effetti, la nozione di derivata destra (rispettivamente, di derivata sinistra) è l'unica nozione di derivata che si possa dare in x_0, se x_0 è l'estremo sinistro (rispettivamente, destro) dell'intervallo di definizione. Inoltre, come vedremo per esempio nel calcolo della derivata della funzione modulo, anche in un punto interno all'intervallo di definizione può essere significativo distinguere la derivata destra dalla derivata sinistra: ciò può infatti fornire delle informazioni più precise sul comportamento della funzione in tale punto.

Vale il seguente risultato, che è una conseguenza immediata delle Definizioni 5.2.2 e 5.2.6, e inoltre del Teorema 3.2.13 sui rapporti fra limite e limite destro/sinistro.

Teorema 5.2.7. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ un punto interno a I. Allora,*
$$\exists\, f'(x_0) \;\; \textit{finita o infinita} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \; \textit{finita o infinita}\,.$$
In tal caso, si ha $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Grazie alle nozioni di derivata destra/sinistra, possiamo estendere ora la definizione di derivabilità di una funzione al caso in cui essa sia definita su un intervallo chiuso e limitato.

Definizione 5.2.8. *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice* derivabile su $[a, b]$ *se:*

- *per ogni* $x \in (a, b)$ *esiste finita la derivata* $f'(x)$*,*
- *esistono finite le derivate unilatere* $f'_+(a)$ *e* $f'_-(b)$*.*

5.2.1 Calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari

Diamo ora qualche esempio di calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari tramite la Definizione 5.2.2.

Derivata delle funzione costante. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante

$$f(x) \equiv c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ha che

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = 0. \tag{5.2.6}$$

Quindi, la funzione derivata f' è definita su $\mathbb{R}$ ed è la funzione identicamente nulla. Per verificare (5.2.6), osserviamo che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0\,.$$

Tenendo conto dell'interpretazione geometrica della nozione di derivata, la formula (5.2.6) ha un chiaro significato: in effetti, nel caso della funzione costante, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente a graf(f) (che è la retta $y = c$) nel punto $(x, f(x))$ è chiaramente la retta $y = c$ stessa.

Derivata della funzione lineare. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, e consideriamo la funzione *lineare* $f(x) := ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = a. \tag{5.2.7}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a\,. \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'interpretazione geometrica della nozione di derivata, la formula (5.2.7) ha un chiaro significato: in effetti, nel caso della funzione lineare, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente a graf(f) (che è la retta $y = ax + b$) nel punto $(x, f(x))$ è chiaramente la retta $y = ax + b$ stessa.

Derivata della funzione modulo. Sia $f(x) := |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\nexists\, f'(0)\,, \qquad \text{mentre } f \text{ è derivabile su } \mathbb{R}\setminus\{0\}, \text{ e si ha}$$

$$f'(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x>0\,, \\ -1 & x<0 \end{cases} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \tag{5.2.8}$$

In effetti, tenendo conto della definizione della funzione modulo $|\cdot|$

$$\forall\, x_0 > 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1\,,$$

ove abbiamo usato che, per h sufficientemente piccolo, se $x_0 > 0$ anche il numero $x_0 + h$ è strettamente positivo. Ragionando allo stesso modo si verifica che per ogni $x_0 < 0$ si ha $f'(x_0) = -1$: in effetti,

$$\forall\, x_0 < 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(x_0+h)-x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1\,,$$

ove abbiamo usato che, per h sufficientemente piccolo, se $x_0 < 0$ anche il numero $x_0 + h$ è strettamente negativo.

Osserviamo ora che

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1\,.$$

Analogamente, si ha

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h} = -1\,.$$

Grazie al Teorema 5.2.7, concludiamo che, essendo derivata destra e derivata sinistra diverse,

$$\nexists\, f'(0)\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = x^2$. Sia $f(x) := x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = 2x. \tag{5.2.9}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2x_0h}{h} = 2x_0\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Sia $f(x) := \sqrt{x}$ per ogni $x \in [0,+\infty)$. Allora

$$f'_+(0) = +\infty\,, \quad \text{e} \quad \forall\, x \in (0,+\infty)\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{5.2.10}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall\, x_0 > 0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,, \end{aligned}$$

mentre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Sia $f(x) := \frac{1}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \tag{5.2.11}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 - (x_0+h)}{h(x_0+h)x_0} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}\,.$$

Derivata delle funzioni potenza. In generale, si può dimostrare che, data la generica funzione potenza (a esponente reale) $f(x) = x^r$, con $r \in \mathbb{R}$ e dominio D_f, allora

$$\begin{aligned} &f(x) = x^r \text{ è derivabile, con derivata} \\ &f'(x) = rx^{r-1} \quad \forall\, x \in D_f \text{ tale che } x^{r-1} \text{ è ben definita.} \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Per esempio, si ha che la funzione $f(x) := x^{4/3}$, con $D_f = \mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (si noti che $\mathbb{R}$ è il dominio naturale di f'). Analogamente, la funzione $f(x) := x^{1/2}$, di dominio $[0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$ con derivata $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ (si noti che $(0, +\infty)$ è il dominio naturale di f').

Derivate delle funzioni trigonometriche. Sia $f(x) := \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \cos(x). \tag{5.2.13}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h)-1) + \cos(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\,, \end{aligned}$$

ove la prima uguaglianza segue dalle formule di addizione per il seno, la seconda e la terza da calcoli elementari, e infine la quarta dai limiti notevoli che danno, rispettivamente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h^2}\, h = 0\,.$$

Sia $f(x) := \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = -\sin(x). \tag{5.2.14}$$

In effetti,

$$\begin{aligned} \forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h)-1) - \sin(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x_0)\,. \end{aligned}$$

Derivata della funzione $f(x) = e^x$. Sia $f(x) := e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = e^x. \tag{5.2.15}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}\,,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} == 1$.

Derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$. Sia $f(x) := \ln(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Allora

$$\forall\, x \in (0, +\infty)\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \frac{1}{x}. \tag{5.2.16}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}\forall\, x_0 \in (0, +\infty) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\,,\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ e dalla sostituzione $x = h/x_0$.

5.2.2 Derivabilità e continuità

Proposizione 5.2.9. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, o, equivalentemente, che $\lim_{x\to x_0}(f(x)- f(x_0)) = 0$. A questo scopo, osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0\,,$$

e l'ultima uguaglianza segue dalla formula per il limite del prodotto di due funzioni: si noti che, in questo caso, non si incappa in una forma indeterminata $\infty \cdot 0$, in quanto la funzione $h(x) := (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ tende al limite finito $f'(x_0)$ per $x \to x_0$. □

Osservazione 5.2.10.

- Il viceversa di questo teorema non vale. In altri termini, è falso che, se una funzione è continua in un punto x_0, essa sia anche ivi derivabile (e neppure è vero che la continuità in un punto implica l'esistenza della derivata in tale punto): basti pensare alla funzione $f(x) = |x|$, che è continua in $x_0 = 0$ ma non ammette ivi derivata.
- Questo risultato si estende anche al caso in cui
  1. f sia derivabile solo a destra in x_0, cioè si abbia per ipotesi solo che esiste finita la derivata destra $f'_+(x_0)$: allora, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 5.2.9, si conclude che f è continua a destra in x_0;
  2. f sia derivabile solo a sinistra in x_0, cioè si abbia per ipotesi solo che esiste finita la derivata sinistra $f'_-(x_0)$: allora, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 5.2.9, si conclude che f è continua a sinistra in x_0.

5.3 Alcuni risultati sulle derivate

5.3.1 Derivate e operazioni su funzioni

I calcoli precedentemente sviluppati mostrano che la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale non è lo strumento più agevole per il calcolo delle derivate. Come nel caso della teoria dei limiti, anche per il calcolo delle derivate si dispone di alcuni fondamentali risultati sul legame fra l'operazione di derivazione e la somma/prodotto/quoziente/composizione/inversione di funzioni.

L'algebra delle derivate.

Teorema 5.3.1. *Siano f, $g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ un punto interno ad I, e $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo che*

f e g siano derivabili in x_0.

Allora,

- *la funzione somma $f + g$ è derivabile in x_0, e vale*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{5.3.1}$$

- *la funzione cf è derivabile in x_0, e vale*

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0); \tag{5.3.2}$$

- *la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile in x_0, e vale*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0); \tag{5.3.3}$$

- *se $g(x_0) \neq 0$, la funzione quoziente $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e vale*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{5.3.4}$$

Osservazione 5.3.2.
- Notiamo che ciascuna parte della tesi si articola a sua volta in due punti: il primo è un risultato di derivabilità della funzione somma/prodotto/quoziente, mentre il secondo è una formula per il calcolo della derivata.
- Le formule (5.3.1)–(5.3.4), che non dimostriamo, possono essere ricavate usando direttamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (per (5.3.1)–(5.3.2)), eventualmente operando anche alcune opportune manipolazioni algebriche (per (5.3.3)–(5.3.4)).

Esempio 5.3.3. 1. La funzione $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$, con dominio $D_f = (0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$, e, applicando le formule (5.2.10), (5.2.11), (5.3.1) e (5.3.2), si ha

$$f'(x) = 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2} \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

2. La generica funzione polinomiale $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ è derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata
$$P'(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

3. La funzione $f(x) = (x^2 + 3\sqrt{x})(x^{-3} - 4x^3)$, con dominio $D_f = (0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$, e, applicando le formule (5.2.12), (5.3.1), (5.3.2), e (5.3.3) si ha
$$f'(x) = \left(2x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)(x^{-3} - 4x^3) + (x^2 + 3\sqrt{x})\left(\frac{3}{x^4} - 12x^2\right) \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

4. La funzione $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2x^4+1}$, con dominio $D_f = \mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(2x^4+1) - 8\sqrt[3]{x}\,x^3}{(2x^4+1)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Esempio 5.3.4 (Derivata della funzione tangente)**.** La funzione $f(x) := \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, con dominio $D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, è derivabile in ogni $x \in D_{\tan}$, con (usando la formula (5.3.4) e le derivate di sin e cos),
$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \qquad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Esempio 5.3.5 (Derivata della funzione $\log_a$, con $a > 0$, $a \neq 1$)**.** Sia $a > 0$, $a \neq 1$, e si consideri la funzione $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Si ha che
$$\log_a \text{ è derivabile su } (0, +\infty), \text{ e } \quad \log_a'(x) = \log_a(e)\frac{1}{x} \quad \forall\, x \in (0, +\infty). \tag{5.3.6}$$
La (5.3.6) si dimostra osservando che, per la proprietà di cambiamento di base dei logaritmi,
$$\forall\, a > 0,\ a \neq 1 \quad \log_a(x) = \log_a(e) \cdot \log_e(x) = \log_a(e) \cdot \ln(x) \quad \forall\, x > 0.$$
Allora la (5.3.6) segue dalla formula per la derivata di ln e dalla (5.3.2).

Derivabilità della composizione di funzioni.

Teorema 5.3.6. *Siano $g : I_g \to \mathbb{R}$ e $f : I_f \to \mathbb{R}$ (con I_g, I_f intervalli non vuoti) tali che $\mathrm{im}(g) \cap I_f \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in I_g$ un punto interno a I_g, e supponiamo che g sia derivabile in x_0. Supponiamo che $g(x_0)$ sia un punto interno a I_f, e che f sia derivabile in $g(x_0)$. Allora, $f \circ g$ è derivabile in x_0, e vale la formula*
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,. \tag{5.3.7}$$
Chiaramente, questo risultato si estende, con ovvie modifiche, al caso in cui si debba derivare la composizione di un numero N di funzioni, $N \geq 1$. Per esempio, si ha che, date tre funzioni <u>derivabili</u> sui loro domini $g : I_g \to \mathbb{R}$, $f : I_f \to \mathbb{R}$, $h : I_h \to \mathbb{R}$, (I_g, I_f e I_h intervalli aperti, cosicché tutti i loro punti sono interni) tali che la composizione $h \circ f \circ g$ sia ben definita, la funzione $h \circ f \circ g$ è derivabile, con
$$(h \circ f \circ g)'(x) = h'(f(g(x))) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \forall\, x \in I_g\,.$$

Esempio 5.3.7. 1. Calcoliamo la derivata della funzione $h(x) = \cos(x^3 - 3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Si vede immediatamente che h è data dalla composizione $f \circ g$, con $g(x) = x^3 - 3x$ e $f(x) = \cos(x)$. Essendo g e f funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, concludiamo che la funzione h è anch'essa derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata data dalla formula (5.3.7). Pertanto

$$h'(x) = (-\sin(x^3 - 3x))(3x^2 - 3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Calcoliamo la derivata della funzione $k(x) = \sin^2\left(\ln\left(x^4 + 1\right)\right)$, $x \in \mathbb{R}$, che è data dalla composizione di quattro funzioni. Infatti, $k = j \circ h \circ f \circ g$, con $g(x) = x^4 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ per ogni $x > 0$, $h(x) = \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $j(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si vede subito che la composizione $j \circ h \circ f \circ g$ è ben definita, e da' luogo a una funzione derivabile, in quanto tutte le funzioni componende sono derivabili sui rispettivi domini. Pertanto

$$k'(x) = 2\sin\left(\ln\left(x^4 + 1\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\ln\left(x^4 + 1\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{x^4 + 1} \cdot 4x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 5.3.8 (Derivata della funzione a^x, con $a > 0$)**.** Sia $a > 0$, e si consideri la funzione a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè l'esponenziale di base a). Per calcolarne la derivata, usiamo la relazione di inversione fra logaritmo in base e e l'esponenziale exp, cioè

$$y = \exp(\ln(y)) \quad \forall\, y \in (0, +\infty).$$

Allora

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x\ln(a)) = e^{x\ln(a)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Applicando la (5.3.7), otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5.3.8}$$

Derivata della funzione inversa. Consideriamo una funzione

$$f : I \to \mathbb{R}\,, \quad f \text{ invertibile e continua su } I. \tag{5.3.9}$$

Per il Teorema dei valori intermedi, concludiamo che $\mathrm{im}(f)$ è un intervallo J. La funzione inversa f^{-1} è quindi definita su J, e assume valori nell'intervallo I, verificando

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in (a, b)\,. \tag{5.3.10}$$

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti affinché f^{-1} sia a sua volta derivabile.

Teorema 5.3.9. *Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ verifichi la* (5.3.9)*. Sia $x_0 \in I$ (interno) tale che f è derivabile in x_0, con derivata $f'(x_0) \neq 0$. Allora, f^{-1} è anche derivabile in $f(x_0)$, e vale*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{5.3.11}$$

In particolare, concludiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è invertibile e derivabile su I e se $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, allora $f^{-1} : \mathrm{im}(f) = J \to I$ è a sua volta derivabile su J, con derivata

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall\, y \in \mathrm{im}(f) = J\,. \tag{5.3.12}$$

Per esempio, usando la (5.3.12) ritroviamo la formula (5.2.16) per la derivata della funzione ln, che è l'inversa dell'esponenziale di base e: in effetti, tenendo conto della (5.2.15), si ha

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y} \qquad \forall\, y \in (0, +\infty)\,.$$

Esempio 5.3.10 (Derivate delle funzioni trigonometriche inverse)**.**

1. Ricordiamo che la funzione $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è l'inversa della restrizione della funzione (derivabile) sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ora osserviamo che per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si ha $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Allora segue dal Teorema 5.3.9 che la funzione arcsin è derivabile sull'insieme $\{y \in [-1,1] : y = \arcsin(x),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ (cioè sull'insieme immagine della restrizione di sin a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), e questo insieme coincide con $(-1,1)$. In conclusione, si ha che

$$\text{arcsin è derivabile su } (-1,1), \text{ e}$$
$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1,1)\,,\end{aligned}$$

   ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\sin' = \cos$, la terza dall'identità fondamentale della trigonometria e dal fatto che, essendo $x \in (-1,1)$, $\arcsin(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ e la restrizione di cos a $(-\pi/2, \pi/2)$ assume valori positivi, di modo che dall'identità della trigonometria possiamo ricavare la formula $\cos^2(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$ per ogni $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Infine, l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\sin(\arcsin(x)) = x$ per ogni $x \in (-1,1)$.

2. Allo stesso modo, si verifica che la funzione $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ (inversa della restrizione della funzione (derivabile) cos all'intervallo $[0,\pi]$), è derivabile sull'intervallo $(-1,1)$ e verifica

$$\begin{aligned}\arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \\ &= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1,1) \quad ,\end{aligned}$$

   ove abbiamo usato che, essendo $x \in (-1,1)$, $\arccos(x) \in (0,\pi)$, cosicché, visto che sin assume valori positivi se ristretta a $(0,\pi)$, dall'identità della trigonometria $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}$ per ogni $x \in (-1,1)$.

3. Consideriamo $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, inversa della restrizione di tan a $(-\pi/2, \pi/2)$. Siccome $\tan'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D(\tan)$ (in effetti, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1$ per ogni $x \in D(\tan)$), si vede che arctan è derivabile su $\mathbb{R}$, con

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

   ove abbiamo usato la formula (5.3.5) per la derivata di tan.

5.3.2 Classificazione dei punti di non derivabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ un punto interno a I. Supponiamo che f sia continua in x_0, e che

$$f \text{ non sia derivabile in } x_0.$$

Allora, possono presentarsi le seguenti situazioni:

♣ $(x_0, f(x_0))$ *è un punto a tangente verticale per* graf(f) se

$$\exists\, f'(x_0) = +\infty\,, \quad \text{o} \quad \exists\, f'(x_0) = -\infty. \tag{5.3.13}$$

Per esempio, la funzione

$$f(x) = x^{1/3} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

è tale che $f'(0) = +\infty$ (in effetti, $f'(0) = \lim_{h\to 0} h^{1/3}/h = \lim_{h\to 0} h^{-2/3} = +\infty$). Il punto $(0,0)$ è a tangente verticale per graf(f). Analogamente, si verifica immediatamente che la funzione $g(x) = -x^{1/3}$, con $x \in \mathbb{R}$, ha $g'(0) = -\infty$. Anche in questo caso, il punto $(0,0)$ è a tangente verticale per graf(g).

♣ *il punto* x_0 *è angoloso per* f se

$$\begin{aligned} &\exists\, f'_+(x_0)\,, \quad \exists\, f'_-(x_0)\,, \quad \text{almeno una fra } f'_+(x_0) \text{ e } f'_-(x_0) \text{ è finita, e} \\ &\qquad\qquad f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

(in particolare, $\nexists\, f'(x_0)$). Per esempio, il punto $x_0 = 0$ è angoloso per la funzione $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Anche la funzione

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ x^{1/3} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ha in 0 un punto angoloso, in quanto $g'_+(0) = 0$ e $g'_-(0) = +\infty$.

♣ *il punto* x_0 *è una cuspide per* f se

$$\exists\, f'_+(x_0)\,, \quad \exists\, f'_-(x_0)\,, \quad \text{entrambe sono infinite, e} \quad f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \tag{5.3.15}$$

(in particolare, $\nexists\, f'(x_0)$). Per esempio, la funzione $f(x) = x^{2/3}$, con dominio $\mathbb{R}$, ha una cuspide in $x_0 = 0$, in quanto

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = +\infty, \quad \text{e} \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty.$$

Chiaramente, la funzione $g(x) = -x^{2/3}$ ha anch'essa in 0 un punto di cuspide, con caratteristiche opposte: $g'_+(0) = -\infty$ e $g'_-(0) = +\infty$.

Esempio 5.3.11. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{1/3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ \arcsin(x) - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x \in (-1,1), \\ -\pi & \text{se } x = -1, \\ (x+1)^{4/5} - \pi & \text{se } x < -1. \end{cases} \tag{5.3.16}$$

- Osserviamo che f è continua su $\mathbb{R}$: in effetti,
  - f è continua su $(1, +\infty)$, in quanto composizione di funzioni continue;
  - si ha
  $$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/3} = 0 \\ f(1) = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$
  e quindi f è continua in 1;
  - f è continua su $(-1, 1)$, in quanto arcsin è ivi continua e f si ottiene traslando arcsin;
  - si ha
  $$\begin{cases} \lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} \left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \\ f(-1) = -\pi \\ \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} \left((x+1)^{4/5} - \pi\right) = -\pi \end{cases}$$
  e quindi f è continua in -1;
  - f è continua su $(-\infty, -1)$, in quanto data dalla differenza e composizione di funzioni continue.
- Osserviamo che f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: in effetti,
  - f è derivabile su $(1, +\infty)$, in quanto composizione di funzioni derivabili;
  - f è derivabile su $(-1, 1)$, in quanto arcsin è ivi derivabile e f si ottiene traslando arcsin;
  - f è derivabile su $(-\infty, -1)$, in quanto data dalla differenza e composizione di funzioni derivabili.
- Classifichiamo, dal punto di vista della derivabilità, i punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$:
  - f non è derivabile in $x_1 = 1$: in effetti,
  $$\begin{aligned} f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h-1)^{1/3} - 0}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{1/3} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty, \end{aligned}$$
  e
  $$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\arcsin(1+h) - \frac{\pi}{2}}{h} = +\infty$$
  come vedremo nell'Esempio 5.3.15 fra qualche pagina. Quindi f ha in $x_1 = 1$ un punto a tangente verticale. Si noti che $\exists\, f'(1) = +\infty$.
  - f non è derivabile in $x_2 = -1$: in effetti,
  $$\begin{aligned} f'_+(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+h) - \frac{\pi}{2} + \pi}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+h) + \frac{\pi}{2}}{h} = +\infty \end{aligned}$$

come vedremo nell'Esempio 5.3.15 fra qualche pagina, e

$$
\begin{aligned}
f'_-(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(-1+h+1)^{4/5}-\pi-(-\pi)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{4/5}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{1/5}} = -\infty.
\end{aligned}
$$

come vedremo nell'Esempio 5.3.15 fra qualche pagina. Quindi f ha in $x_2 = -1$ una cuspide. Si noti che $\nexists\, f'(-1)$.

5.3.3 Il teorema di De l'Hôpital

Il risultato che presenteremo è, di fatto, un complemento alla teoria dei limiti, e più precisamente al problema della risoluzione delle forme indeterminate di tipo quoziente $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$.

Teorema 5.3.12 (De l'Hôpital (I))**.** *Siano $a,\ b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0\,, \tag{5.3.17}$$

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } (a,b), \text{ con } g'(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \tag{5.3.18}$$

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [-\infty,+\infty]\,. \tag{5.3.19}$$

Allora, <u>esiste</u> il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,. \tag{5.3.20}$$

Osservazione 5.3.13.

- L'enunciato del teorema continua a valere se al limite $\lim_{x\to a^+}$ viene sistematicamente sostituito il limite $\lim_{x\to b^-}$, oppure il limite ("bilatero") $\lim_{x\to x_0}$, oppure (nel caso in cui le funzioni f e g siano definite su semirette) i limiti $\lim_{x\to+\infty}$ o $\lim_{x\to-\infty}$.
- Osserviamo che la tesi si compone di due parti: innanzitutto, viene enunciata l'esistenza del limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e poi il suo calcolo viene ricondotto al calcolo del limite del **quoziente fra le derivate** $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, sotto la condizione che quest'ultimo limite esista!

Esempio 5.3.14 (**Ritroviamo i limiti notevoli**)**.** Usando il teorema di De l'Hôpital, è possibile dimostrare i limiti notevoli dati dalle formule (3.5.2)–(3.5.6). Per esempio, si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1\,, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,
\end{aligned}
$$

ove il simbolo $\overset{H}{=}$ indica che in quel passaggio viene applicata la formula (5.3.20). Si ha anche

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

il che dimostra che può essere necessario applicare il teorema di De l'Hôpital più volte.

Esempio 5.3.15. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin(1+x)-\frac{\pi}{2}}{x}.$$

Si noti che si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, alla quale applichiamo il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin(1+x)-\dfrac{\pi}{2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}} = +\infty.$$

Allo stesso modo risolviamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ associata a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}}{x}$$

e dimostriamo che (**esercizio!**)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}}{x} = +\infty.$$

Osservazione 5.3.16. Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie. In particolare, se valgono le (5.3.17)–(5.3.18) ma non la (5.3.19), la (5.3.20) è, in generale, falsa, come mostra il seguente controesempio: consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,. \tag{5.3.21}$$

Vediamo che si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ora consideriamo il limite del rapporto fra le derivate del numeratore e del denominatore: si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 0^+}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,,$$

e tale limite non esiste, in quanto $\nexists \lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Se applicassi (erroneamente) l'uguaglianza (5.3.20) data dal teorema di De l'Hôpital, concluderei che il limite in (5.3.21) non esiste. **Invece, il limite in** (5.3.21) **esiste,** poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che la funzione $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata, mentre la funzione $x \mapsto x$ è infinitesima per $x \to 0^+$.

Diamo ora la versione del Teorema di De l'Hôpital relativa alla risoluzione delle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Anche in questo caso, enunceremo il teorema solo per limiti destri, ma precisiamo che esso vale anche per limiti sinistri, per limiti "bilateri", e per limiti per $x \to \pm\infty$.

Teorema 5.3.17 (De l'Hôpital (II))**.** *Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty\,, \tag{5.3.22}$$

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } (a,b), \text{ con } g'(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \tag{5.3.23}$$

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [-\infty, +\infty]\,. \tag{5.3.24}$$

Allora, esiste il limite $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e si ha

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,. \tag{5.3.25}$$

Osserviamo che la (5.3.22) significa che la funzione f e la g devono tendere, per $x \to a^+$, o a $+\infty$ o a $-\infty$ (dando per l'appunto origine a una forma indeterminata $\pm\infty/\pm\infty$). In particolare, osserviamo che f e g possono tendere a due infiniti di segno diverso.

Esempio 5.3.18.

1. Si ha
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$
In effetti,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty\,.$$
In generale, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, e per ogni base $a > 1$ si ha che
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \tag{5.3.26}$$
(si noti che, se k è un numero naturale, la (5.3.26) si dimostra applicando k volte la formula (5.3.25)).

2. Si ha per ogni $k > 0$ e per ogni $b > 1$ si ha
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{\log_b(x)} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b(x)}{x^k} = 0\,. \tag{5.3.27}$$
Per esempio, verifichiamolo nel caso $k = 1/2$ e $b = e$:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1/2}}{\ln(x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{x^{-1/2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} x^{1/2} = +\infty\,.$$

3. Come ovvio corollario della (5.3.26) e della (5.3.27) abbiamo che per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 1$ si ha
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{\log_b(x)} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b(x)}{a^x} = 0\,. \tag{5.3.28}$$

4. Si ha per ogni $k > 0$ e per ogni $b > 1$
$$\lim_{x \to 0^+} x^k \log_b(x) = 0\,.$$

Si noti che il $\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x)$ da luogo a una forma indeterminata di tipo $0\cdot\infty$, e non a una forma indeterminata di tipo quoziente. Per applicare il teorema di De l'Hôpital in una delle due forme viste, è quindi necessario ricondursi a una forma indeterminata di tipo quoziente. Questo può essere fatto in due modi:

- effettuando il cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$ (cosicché $\log_b(x) = -\log_b(z)$), ci si riconduce a una forma indeterminata di tipo ∞/∞ e si ottiene
$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = \lim_{z\to+\infty} \frac{-\log_b(z)}{z^k} = 0$$
(e l'ultima uguaglianza segue da (5.3.27));
- scrivendo il prodotto come un quoziente, cioè
$$x^k \log_b(x) = \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}},$$
da cui
$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}}$$
(ci siamo così ricondotti a una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$), e applicando a quest'ultimo limite il teorema di De l'Hôpital. In effetti,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(e)\frac{1}{x}}{-k\frac{1}{x^{k+1}}} = -\frac{\log_b(e)}{k} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{k+1}}{x} = -\frac{\log_b(e)}{k} \lim_{x\to 0^+} x^k = 0.$$

Capitolo 6

Studio di funzioni

6.1 Estremi relativi

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che un punto $x_0 \in I$ si dice di *punto di massimo assoluto* per f su I se

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Analogamente, $x_0 \in I$ si dice di *punto di minimo assoluto* per f su I se

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Genericamente, chiameremo *punti di estremo assoluto* i punti di massimo/minimo assoluto. I punti di estremo assoluto vengono anche detti *punti di estremo (massimo/minimo) globale*, in quanto nella loro definizione è insito un controllo del comportamento della funzione su tutto il dominio di definizione I. Questo distingue i punti di estremo globale da quelli di *estremo locale*, che ora introduciamo.

Definizione 6.1.1 (Estremi relativi (o locali))**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice*

- di minimo relativo (o locale) *per f su I se*

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - r, x_0 + r)\,; \tag{6.1.1}$$

- di massimo relativo (o locale) *per f su I se*

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - r, x_0 + r)\,. \tag{6.1.2}$$

Se x_0 è un punto di estremo (minimo o massimo) relativo (o locale) per f, il corrispondente valore $f(x_0)$ si chiama valore di minimo/massimo relativo (o locale)*.*

Chiaramente, se $x_0 \in I$ è un punti di massimo (minimo, risp.) assoluto, x_0 è anche un punto di massimo (minimo, risp.) relativo, mentre non vale il viceversa.

Esempio 6.1.2 (La funzione doppio pozzo)**.** La disamina del grafico della funzione doppio pozzo $W : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4}$$

mostra che (si osservi che W è pari!)

$$\begin{aligned} W \quad & \text{ha due punti di minimo relativo in } x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1 \\ & \text{e ha un punto di massimo relativo in } x_0 = 0. \end{aligned}$$

Chiaramente, x_1 (e, per parità, anche x_2) è un punto di minimo assoluto per W, in quanto

$$W(x_1) = 0 \leq W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4} \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

Invece, $x_0 = 0$ è solo un punto di massimo relativo, e non assoluto, per W, in quanto

$$W(0) = \frac{1}{4} < W(2) = \frac{9}{4}.$$

Nel seguito, svilupperemo il cosiddetto *metodo differenziale* per la ricerca degli (eventuali) punti di estremo relativo di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (con I intervallo!): più precisamente, troveremo delle condizioni necessarie/sufficienti che leghino il fatto che un dato punto è un estremo relativo per f alla derivata f'.

6.1.1 Il teorema di Fermat, o di annullamento della derivata

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo chiuso e limitato. Distinguiamo quattro categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x)$ (finita o infinita), $f'(x) \neq 0$;
4. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Il prossimo teorema afferma che, se $x_0 \in I$ è un punto interno a I in cui esiste $f'(x)$ (cioè un punto nella categoria 3.o 4.), e x_0 è un punto di estremo relativo per f, necessariamente $f'(x_0) = 0$.

Definizione 6.1.3. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno in cui esiste la derivata. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 viene detto *punto critico (o stazionario)* per f.

Teorema 6.1.4 (Fermat)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno. Supponiamo che $\exists\, f'(x_0)$.*

Se x_0 è punto di minimo o di massimo relativo per f su I,
allora $f'(x_0) = 0$.

Si noti che è stato solo supposto che nel punto x_0 esista la derivata $f'(x_0)$: non è stata richiesta la derivabilità (cioè che la derivata esista finita) in x_0.

Osserviamo che l'annullamento della derivata è solo una condizione necessaria, non sufficiente, affinché un dato punto (interno all'intervallo di definizione) x_0 sia di estremo relativo, come mostra il seguente

Esempio 6.1.5. La funzione $f(x) := x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ha derivata $f'(x) = 3x^2$ per ogni $x \in R$. Quindi l'unico punto critico di f è $x_0 = 0$. Osserviamo che, però, x_0 non è un punto di estremo relativo. Di fatto, f non ha alcun punto di estremo relativo.

Dimostrazione del Teorema di Fermat. Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia un punto di minimo relativo[1]. Allora, per la (6.1.1) si ha che esiste[2] $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Consideriamo ora il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0, cioè il quoziente $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, con $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Si ha che

$$\text{per ogni } x \in (x_0, x_0 + r) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,. \tag{6.1.3}$$

In effetti, il numeratore è non negativo grazie alla (6.1.1), e d'altra parte il denominatore è strettamente positivo poiché stiamo prendendo x nell'intervallo $(x_0, x_0 + r)$. Allo stesso modo, si verifica che

$$\text{per ogni } x \in (x_0, x_0 + r) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,. \tag{6.1.4}$$

Passando al limite per $x \to x_0^+$ in (6.1.3), e per $x \to x_0^-$ in (6.1.4), si deduce che

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Poiché, d'altra parte, per ipotesi esiste $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (si ricordi il teorema che lega derivata e derivate unilatere), deduciamo che, necessariamente, $f'(x_0) = 0$. □

Notiamo che l'ipotesi che x_0 fosse un punto interno all'intervallo I ha giocato un ruolo chiave nella dimostrazione: questo ci ha permesso infatti di considerare "incrementi bilateri" relativi al punto x_0, e quindi di calcolare sia la derivata destra, sia la derivata sinistra di f in x_0. Nel caso in cui un punto di estremo relativo sia in uno degli estremi dell'intervallo di definizione, possiamo solo dare risultati sul segno della corrispondente "derivata unilatera". A questo proposito, diamo la seguente proposizione, la cui facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Proposizione 6.1.6. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. *Supponiamo che* a *sia un punto di estremo relativo per* f *e che esista* $f'_+(a)$. *Si ha che:*
   - *se* a *è un punto di massimo relativo per* f*, allora* $f'_+(a) \leq 0$;
   - *se* a *è un punto di minimo relativo per* f*, allora* $f'_+(a) \geq 0$.
2. *Supponiamo che* b *sia un punto di estremo relativo per* f *e che esista* $f'_-(b)$. *Si ha che:*
   - *se* b *è un punto di massimo relativo per* f*, allora* $f'_-(b) \geq 0$;
   - *se* b *è un punto di minimo relativo per* f*, allora* $f'_-(b) \leq 0$.

[1] La dimostrazione si sviluppa in modo analogo (verificarlo per **esercizio!**) nel caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo.

[2] questo grazie al fatto che x_0 è interno ad I!

Applicazioni del Teorema di Fermat allo studio dei punti di estremo relativo. Si consideri un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per il Teorema di Weierstrass, f ammette almeno un punto di minimo assoluto su $[a, b]$, e almeno un punto di massimo assoluto su $[a, b]$. Segue dal Teorema di Fermat che i punti di estremo assoluto devono ricadere in queste tre categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Osservazione 6.1.7. Chiaramente questo discorso si estende a funzioni definite su intervalli non necessariamente limitati: il teorema di Fermat garantisce gli eventuali (la loro esistenza non è più assicurata dal teorema di Weierstrass, in quanto l'intervallo di definizione non è limitato) punti di estremo relativo vanno ricercati solo nelle categorie 2. e 3., qualora il gruppo di punti 1. sia vuoto.

Allora una possibile strategia per la ricerca dei punti di estremo assoluto di f su $[a, b]$ potrebbe consistere nel considerare tutti i punti nelle tre suddette categorie, calcolare il valore di f in ciascuno di essi, e confrontare i valori ottenuti.

Esempio 6.1.8. Consideriamo la funzione $f(x) := x^2 - 2$, con dominio $D_f = [-3, 2]$. Si ha che $f(-3) = 7$, mentre $f(2) = 2$. Inoltre osserviamo che f è derivabile su $(-3, 2)$ (quindi la categoria 2. è vuota), con derivata $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in (-3, 2)$. Quindi f ha un unico punto di annullamento della derivata, dato da $x_0 = 0$. Siccome $f(0) = -2$, concludiamo che 0 è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[-3, 2]$. D'altra parte, per confronto fra $f(-3)$ e $f(2)$ vediamo che $x_1 = -3$ è l'unico punto di massimo assoluto per f su $[-3, 2]$.

Osservazione 6.1.9. Il metodo appena illustrato ha due svantaggi: innanzitutto, consente di sviluppare la ricerca solo dei punti di estremo assoluto, e non dei punti di estremo relativo. Secondariamente, può essere disagevole, in quanto implica diversi conti (non solo la ricerca dei punti di annullamento della derivata, ma anche il calcolo di f nei punti delle categorie $1. - 3.$).

In effetti, il Teorema di Fermat, su cui è basato questo metodo, è un risultato relativamente debole, in quanto fornisce condizioni solo necessarie affinché un dato punto sia di estremo relativo.

Nel seguito, svilupperemo degli strumenti più potenti del Teorema di Fermat per la ricerca dei punti di estremo relativo di una data funzione f. In particolare, forniremo delle **condizioni sufficienti** che garantiscano che un dato punto stazionario è un punto di massimo o di minimo relativo, si veda il Teorema 6.3.11 alla fine della Sezione 6.2.

Per dimostrare il Teorema 6.3.11, ci baseremo alcuni risultati, relativamente al legame fra f e la sua derivata f', di natura diversa da quelli visti finora. Sostanzialmente, quest'ultimi risultati (cioè la Proposizione 5.2.9 e il Teorema 6.1.4) hanno un carattere *locale*, in altri termini riguardano solo proprietà locali della funzione (cioè proprietà che valgono solo "vicino" a un punto).

Invece, vedremo nella prossima sezione dei risultati sul legame fra la derivata f' e proprietà *globali* di f (cioè, proprietà che non valgano solo "vicino" a un dato punto, ma globalmente su un intervallo). Segnatamente, ci stiamo riferendo al Teorema 6.3.1, al Teorema 6.3.7, e al Teorema 6.3.11. La dimostrazione di tali risultati sarà basata sul Teorema di Lagrange (anche detto *Teorema del valor medio*).

6.2 Il teorema di Lagrange

6.2.1 Il teorema di Lagrange

Teorema 6.2.1 (Lagrange). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante*

$$f \text{ è continua in } [a, b] \ (f \in \mathrm{C}^0([a, b])), \tag{6.2.1}$$

$$f \text{ è derivabile in } (a, b). \tag{6.2.2}$$

Allora,

$$\exists\, c \in (a, b) \ : \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,. \tag{6.2.3}$$

Chiaramente il punto c di cui nella (6.2.3) "deve" trovarsi in (a, b), perché solo in (a, b) è stata richiesta la derivabilità di f.

Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange. Ricordiamo che la derivata di f in un dato punto è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel corrispondente punto del grafico. Osserviamo che, d'altra parte, il quoziente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della corda congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Allora, la tesi del Teorema di Lagrange è che, sotto le condizioni (6.2.1)–(6.2.2), esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ abbia coefficiente angolare uguale alla retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Quindi, esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ sia parallela alla retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Osservazioni sul Teorema di Lagrange. Il Teorema 6.2.1 garantisce solo **l'esistenza, e non l'unicità** dei punti c aventi la proprietà specificata dalla (6.2.3), come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 6.2.2.

1. Consideriamo la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2 \quad \forall\, x \in [-1, 1]\,.$$

In questo caso, $f(1) = f(-1) = 1$, ed esiste un unico punto x_0 tale che $f'(x_0) = (f(1) - f(-1))/(1 - (-1)) = 0$: essendo $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in [-1, 1]$, vediamo che $x_0 = 0$.

2. Consideriamo la funzione

$$W : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad W(x) := \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2 \quad \forall\, x \in [-2, 2]\,.$$

Ora, $W(-2) = W(2)$, quindi $(W(2) - W(-2))/(2 - (-2)) = 0$. Essendo $W'(x) = x^3 - x$, esistono tre punti $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, e $x_3 = 1$ tali che $W'(x_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$.

3. Consideriamo la funzione

$$F : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in [-2, -1]\,, \\ -1 & x \in (-1, 1)\,, \\ -x^2 & x \in [1, 2] \end{cases} .$$

Ora, $F(-2) = F(2)$, quindi $(F(2) - F(-2))/(2 - (-2)) = 0$. Osserviamo anche che F è continua su $[-2, 2]$ e derivabile su (-2,2)[3]. Inoltre, per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha che $F'(x) = 0$, quindi esistono infiniti punti che verifichino la (6.2.3).

Le ipotesi del Teorema 6.2.1 sono ottimali: in effetti, i seguenti esempi mostrano che è sufficiente togliere anche una sola di tali ipotesi perché la (6.2.3) non sia più verificata.

Esempio 6.2.3. 1. La funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in [-1, 0)\,, \\ 3 & x = 0\,, \\ -x^2 & x \in (0, 1]\,, \end{cases}$$

è continua su $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Si ha $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, quindi in particolare $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. D'altra parte, $f(-1) = f(1)$, e quindi $(f(1) - f(-1))/(1 - (-1)) = 0$.

2. La funzione

$$h : [0, 2] \to \mathbb{R} \quad h(x) := \begin{cases} x + 1 & x \in [0, 2)\,, \\ \frac{1}{2} & x = 2 \end{cases},$$

è continua su $[0, 2)$ e derivabile su $(0, 2)$, con derivata $h'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 2)$. Si ha che $(h(2) - h(0))/2 = -1/4$, quindi non esiste alcun $c \in (0, 2)$ verificante la (6.2.3).

3. La funzione $g(x) = |x|$, con dominio $D_g = [-1, 1]$, è continua su $[-1, 1]$ e derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Osserviamo che $g(-1) = g(1)$, quindi $(g(1) - g(-1))/(1 - (-1)) = 0$. D'altra parte, g è derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$, con $g'(x) = \mathrm{sign}(x)$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, e quindi non esiste alcun punto $c \in (-1, 1)$ verificante la (6.2.3).

6.2.2 Il Teorema di Rolle

Per sviluppare la dimostrazione del Teorema di Lagrange, ci serviremo del seguente risultato.

Teorema 6.2.4 (Rolle)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante*

$$f \text{ è continua in } [a, b] \ (f \in \mathrm{C}^0([a, b])), \tag{6.2.4}$$

$$f \text{ è derivabile in } (a, b), \tag{6.2.5}$$

$$f(a) = f(b)\,. \tag{6.2.6}$$

Allora,

$$\exists\, c \in (a, b) : \quad f'(c) = 0\,. \tag{6.2.7}$$

Osserviamo che il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange e, conseguentemente, si presta alla medesima interpretazione grafica, nonché alle medesime considerazioni sul fatto che tutte le sue ipotesi sono necessarie (peraltro, si noti che l'Esempio 6.2.2 fornisce anche controesempi alla tesi del Teorema di Rolle qualora si indeboliscano le richieste di continuità/derivabilità).

[3] chiaramente F è derivabile sui singoli intervalli $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, e $(1, 2)$. Resta da controllare la derivabilità in $x = \pm 1$. Per esempio in $x = 1$ (essendo F pari, otterremo automaticamente anche la derivabilità in $x = -1$). A questo scopo, si verifichi (**Esercizio!**) che $F'_-(1) = 0 = F'_+(1)$.

Anche questo il teorema di Rolle garantisce solo l'esistenza, e non l'unicità, di punti di annullamento della derivata (si veda l'Esempio 6.2.2).

Dimostrazione. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, chiaramente f ha derivata identicamente nulla su $[a,b]$, e quindi la (6.2.7) è banalmente verificata.

Supponiamo allora che f non sia costante su $[a,b]$. Ora, essendo f continua su $[a,b]$, segue dal Teorema di Weierstrass che f ha almeno un punto di minimo assoluto $x_m \in [a,b]$ e almeno un punto di massimo assoluto $x_M \in [a,b]$. Dimostriamo che

$$x_m \in (a,b) \quad \text{o} \quad x_M \in (a,b)\,. \tag{6.2.8}$$

Per assurdo ciò sia falso, quindi $x_m,\, x_M \in \{a,b\}$. Segue dalla (6.2.6) che

$$f(x_m) = f(x_M). \tag{6.2.9}$$

Tenendo conto della definizione di punto di minimo e punto di massimo assoluto, deduciamo dalla (6.2.9) che f è costante su $[a,b]$, contro la nostra ipotesi iniziale. Allora la (6.2.8) deve essere vera. Supponiamo per esempio che $x_m \in (a,b)$. Allora, per il Teorema di Fermat $f'(x_m) = 0$. Scegliamo quindi $c = x_m$. □

Dimostrazione del Teorema di Lagrange. Introduciamo la funzione ausiliaria

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) \quad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Si noti che g è di fatto data dalla differenza fra f e la funzione (lineare) il cui grafico è la retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Osserviamo che:

- $g \in \mathrm{C}^0([a,b])$ (in quanto è data da somme/prodotti di funzioni continue su $[a,b]$);
- g è derivabile su (a,b) (in quanto è data da somme/prodotti di funzioni derivabili su (a,b));
- $g(a) = g(b) = 0$.

Allora g soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle. Essendo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \forall\, x \in (a,b)\,,$$

dalla (6.2.7) segue che esiste $c \in (a,b)$ tale che $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cioè la (6.2.3). □

6.3 Applicazioni del Teorema di Lagrange

Come abbiamo già accennato, le principali applicazioni del teorema di Lagrange sono risultati che permettono di dedurre proprietà globali di una data funzione a partire da proprietà della sua derivata. Si noti che, nelle dimostrazioni di questi risultati, il Teorema di Lagrange non viene applicato su tutto l'intervallo di definizione, ma su opportuni sottointervalli. l

Il primo di tali risultati è il cosiddetto

6.3.1 Teorema della derivata nulla

Teorema 6.3.1. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sul (a,b). Supponiamo che*

$$f'(x) = 0 \qquad \forall\, x \in (a,b)\,. \tag{6.3.1}$$

Allora, f è costante su (a,b), cioè esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = K$ per ogni $x \in (a,b)$.

Osservazione 6.3.2. Osserviamo che l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è cruciale: in effetti, la funzione sign è derivabile sul suo dominio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata nulla. Ma sign non è costante.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, fissato $\bar{x} \in (a,b)$, si ha che

$$f(x) = f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in (a,b) \tag{6.3.2}$$

(chiaramente supporremo $\bar{x} \neq x$). Fissiamo allora, per esempio, $x \in (\bar{x}, b)$ e applichiamo il teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[\bar{x}, x]$. È chiaro che tale restrizione soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 6.2.1: in quanto restrizione di una funzione derivabile su (a,b), essa è derivabile (e quindi in particolare continua) su $[\bar{x}.x]$. Troviamo quindi $c \in (\bar{x}, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(c) = 0\,,$$

grazie alla (6.3.1). Quindi $f(x) - f(\bar{x}) = 0$. Essendo x arbitrario in $(\bar{x}, b)$, concludiamo che $f(x) = f(\bar{x})$ per ogni $x \in (\bar{x}, b)$. Ragionando allo stesso modo per ogni $x \in (a, \bar{x})$, concludiamo dunque la (6.3.2). □

6.3.2 Monotonia e segno della derivata

Definizione 6.3.3. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che:*

1. f *è* monotona non decrescente *su I se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,; \tag{6.3.3}$$

2. f *è* monotona strettamente crescente *su I se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,; \tag{6.3.4}$$

3. f *è* monotona non crescente *su I se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,; \tag{6.3.5}$$

4. f *è* monotona strettamente decrescente *su I se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,. \tag{6.3.6}$$

Osservazione 6.3.4.
- Si noti che ciascuna delle proprietà di monotonia introdotte ha *carattere globale*, in quanto le (6.3.3)–(6.3.6) devono valere per *ogni coppia di punti* $x_1,\, x_2 \in I$.

- È facile vedere che se $f : I \to \mathbb{R}$ è *strettamente monotona* (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente), allora f è iniettiva, quindi invertibile, su I.
- Chiaramente le proprietà di stretta monotonia implicano le proprietà di larga monotonia: una funzione strettamente crescente (risp., decrescente) è anche non decrescente (risp., non crescente). Non vale ovviamente il viceversa, si veda l'Esempio 6.3.6.

Esempio 6.3.5 (Monotonia di **alcune** funzioni elementari)**.**
- Consideriamo le funzioni potenza a esponente naturale $f(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{N}$, di dominio $D_f = \mathbb{R}$. Allora:
  - se $k = 0$, si ha $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ogni funzione costante è sia monotona non decrescente, sia monotona non crescente[4];
  - se $k > 0$ e pari, f non ha alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma la restrizione di f a $(-\infty, 0)$ è strettamente decrescente, mentre la restrizione di f a $(0, +\infty)$ è strettamente crescente;
  - se $k > 0$ e dispari, f è strettamente crescente.
- Le funzioni sin e cos non hanno alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma possiedono infinite restrizioni monotone. Per esempio, la funzione sin è strettamente crescente su tutti gli intervalli $(-\pi/2 + 2m\pi, \pi/2 + 2m\pi)$, al variare di $m \in Z$, ed è strettamente decrescente su tutti gli intervalli $(\pi/2 + 2m\pi, 3\pi/2 + 2m\pi)$, al variare di $m \in Z$.
- La funzione tan non ha alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma possiede infinite restrizioni monotone. In effetti, la funzione tan è strettamente crescente su tutti gli intervalli $(-\pi/2 + m\pi, \pi/2 + m\pi)$, al variare di $m \in Z$.
- Per ogni $a > 1$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; per ogni $a \in (0, 1)$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.
- Per ogni $a > 1$ la funzione logaritmica $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a(x)$ è strettamente crescente su $(0, +\infty)$; per ogni $a \in (0, 1)$ la funzione logaritmica $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a(x)$ è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$.

Esempio 6.3.6. La funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ x & x \in [0, 1]\,, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

è non decrescente su $\mathbb{R}$. Si osservi che f non è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ La funzione $g(x) := -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è non crescente (ma non strettamente decrescente) su $\mathbb{R}$.

Il seguente risultato mette in relazione le proprietà di monotonia di una funzione derivabile con il segno della sua derivata.

Teorema 6.3.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:*

1. *f è monotona non decrescente su (a, b) <u>se e solo se</u> $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;*
2. *f è monotona non crescente su (a, b) <u>se e solo se</u> $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;*
3. *<u>se</u> $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, <u>allora</u> f è strettamente crescente su (a, b);*

[4]Le funzioni costanti sono le uniche funzioni ad avere entrambe le proprietà.

4. se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora f è strettamente decrescente su (a,b).

Osservazione 6.3.8. Osserviamo che nei punti 3. e 4. non vale una doppia implicazione (si veda anche l'Osservazione 6.3.10): per esempio, la funzione $f(x) = x^3$, con $D_f = \mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma è falso che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: infatti, $f'(0) = 0$. Rimane però vero che $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 6.3.9. Si noti che il Teorema 6.3.7 è solo vero sugli intervalli: per esempio, la funzione

$$\tan \quad \text{verifica} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0 \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Però tan non è strettamente crescente su dom(tan), anzi sul suo dominio non gode di alcuna proprietà di monotonia. È però vero che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la restrizione di tan a ogni intervallo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ è strettamente crescente.

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1. (la dimostrazione del punto 2. si sviluppa in modo analogo). Supponiamo che f sia non decrescente su (a,b): allora

$$\forall\, x_0 \in (a,b) \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,, \tag{6.3.7}$$

in quanto il rapporto incrementale ha segno positivo e il limite per $x \to x_0^+$ preserva il segno. Siccome f è derivabile in x_0, si ha che $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$. Essendo x_0 arbitrario, concludiamo che la funzione derivata assume valori non negativi. Viceversa, dimostriamo che vale la (6.3.3). Fissiamo dunque x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$ (è facile vedere che tutte le ipotesi sono verificate). Concludiamo dunque che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,.$$

Essendo $f'(c) \geq 0$ (poiché per ipotesi f' assume valori non negativi), ed essendo $x_2 > x_1$, concludiamo che, necessariamente, $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Sviluppando proprio quest'ultimo argomento, si dimostra anche il punto 3. In effetti, fissiamo ancora x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1, x_2]$. Otteniamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,.$$

Essendo $f'(c) > 0$ per ipotesi, ed essendo $x_2 > x_1$, concludiamo che $f(x_2) > f(x_1)$. Si ragiona analogamente per il punto 4. □

Osservazione 6.3.10. In ultima analisi, la ragione per la quale non vale la doppia implicazione nel punto 3., e cioè stretta crescenza NON implica stretta positività della derivata, è la seguente: per ogni $x_0 \in (a,b)$, pur essendo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b),$$

non si può concludere da questo la stretta positività di $f'_+(x_0)$, in quanto il passaggio al limite non preserva le disuguaglianze strette. Identiche considerazioni valgono in relazione al punto 4.

6.3.3 Applicazione allo studio dei punti di estremo relativo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che il Teorema di Fermat comporta che i punti "candidati" a essere di estremo relativo ricadono, tutti e soli, in queste tre categorie:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;

2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;

3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti affinché un assegnato punto $x_0 \in (a, b)$, punto critico per f oppure in cui non esiste la derivata f', sia di estremo relativo per f (di fatto, assoluto): sostanzialmente, per stabilire la natura di x_0 è sufficiente studiare il segno di f' (cioè la monotonia di f) nell'intorno di x_0.

Teorema 6.3.11. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione <u>continua</u>. Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario (o critico) per f (cioè $f'(x_0) = 0$), oppure tale che $\nexists\, f'(x_0)$. Si ha che*

1. *se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica*
$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0) \quad e \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,, \tag{6.3.8}$$
allora x_0 è un punto di massimo relativo per f su (a, b);

2. *se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica*
$$f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0) \quad e \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,, \tag{6.3.9}$$
allora x_0 è un punto di minimo relativo per f su (a, b).

Dimostrazione. Dimostriamo per esempio che, se vale la (6.3.8), il punto x_0 è di massimo relativo per f. Fissiamo quindi $x \in (a, x_0)$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x, x_0]$[5]. Allora concludiamo che esiste $c \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(c) \geq 0\,,$$

grazie alla (6.3.8). Essendo $x < x_0$, concludiamo che il numeratore deve essere $f(x_0) - f(x) \geq 0$, da cui $f(x) \leq f(x_0)$. Essendo x arbitrario, abbiamo che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (a, x_0)\,.$$

Ragionando in modo analogo, dimostriamo anche che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,,$$

da cui la tesi. □

[5]Si noti che la restrizione di f a $[x, x_0]$ è continua -questo è garantito proprio dall'ipotesi che f sia continua su tutto l'intervallo (a, b)- e derivabile su (x, x_0), quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Lagrange.

Esempio 6.3.12. Verifichiamo che la funzione $W : [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4} \quad \text{ha due punti di minimo assoluto in } x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1$$
$$\text{e ha un punto di massimo relativo in } x_0 = 0.$$

In effetti, $W'(x) = x^3 - x$ per ogni $x \in [-2,2]$, e si vede subito che

$$W'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1,0) \text{ o se } x \in (1,2), \\ = 0 & \text{se } x = -1, \text{ o } x = 0, \text{ o } x = 1, \\ < 0 & \text{se } x \in (-2,-1) \text{ o se } x \in (0,1). \end{cases}$$

Applicando i Teoremi 6.3.7 e 6.3.11, concludiamo che W è strettamente decrescente su $(-\infty,-1)$ e strettamente crescente su $(-1,0)$, pertanto il punto stazionario $x_1 = -1$ è di minimo relativo (discorsi identici si fanno per $x_2 = 1$). Analogamente, essendo W strettamente crescente su $(-1,0)$ e strettamente decrescente su $(0,1)$, deduciamo che $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo. Poichè $W(x_1) = W(x_2) = 0$ e $W(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-2,2]$, x_1 e x_2 sono di fatto punti di minimo assoluto.

Esempio 6.3.13. Osserviamo che non si può rinunciare all'ipotesi che f sia continua sull'intervallo (a,b), come dimostra il seguente esempio: la funzione

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in (-1,0)\,, \\ -\frac{1}{2} & x = 0\,, \\ -x^2 - 1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

è continua e derivabile su $(-1,1) \setminus \{0\}$, e verifica $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, cosicché

$$f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (-1,0), \qquad f'(x) < 0 \ \ \forall\, x \in (0,1).$$

Si vede subito, però, che il punto $x_0 = 0$ non è di estremo relativo per f.

6.4 Convessità, concavità, e derivate seconde

6.4.1 Convessità e concavità

Definizione 6.4.1. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una <u>funzione continua</u>.*

1. *Diciamo che f è* convessa *su (a,b) se per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ non sta al di sotto del grafico di f, per $x \in [x_1, x_2]$.*

2. *Diciamo che f è* concava *su (a,b) se per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ non sta al di sopra del grafico di f, per $x \in [x_1, x_2]$.*

Esempio 6.4.2 (Convessità e concavità di **alcune** funzioni elementari)**.** 1. La funzione $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $\mathbb{R}$ (della stessa proprietà godono tutte le funzioni potenza a esponente pari);

2. La funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $[0, +\infty)$ e concava su $(-\infty, 0]$ (questo è anche l'andamento di tutte le funzioni potenza con esponente dispari maggiore o uguale a 3);
3. la funzione $f(x) = x^{1/2}$, $x \in [0, +\infty)$, è concava su $[0, +\infty)$;
4. la funzione $f(x) = x$ è sia convessa sia concava su $\mathbb{R}$ (le funzioni lineari sono le uniche funzioni sia convesse sia concave);
5. per ogni $a > 0$ la funzione esponenziale $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $\mathbb{R}$;
6. per ogni $a > 0$ con $a \neq 1$ la funzione logaritmica $x \mapsto \log_a(x)$, $x \in (0, +\infty)$, è concava su $(0, +\infty)$.

Il risultato alla base del "metodo differenziale" per lo studio della convessità/concavità è il seguente teorema, di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 6.4.3. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione <u>derivabile</u>. Si ha che*

1. *f è convessa su (a, b) se e solo se la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ è non decrescente;*
2. *f è concava su (a, b) se e solo se la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ è non crescente.*

Quindi lo studio della convessità/concavità di una funzione derivabile f viene ricondotto allo studio della monotonia della sua funzione derivata f'. Ora, se la funzione f' è a sua volta derivabile, in virtù del Teorema 6.3.7 la monotonia di f' dipende dal segno della derivata di f'. Combinando queste informazioni, si conclude che lo studio del segno della derivata di f' determina gli intervalli di convessità/concavità di f. Per enunciare questo criterio, introduciamo in modo sistematico la derivata della funzione derivata: parleremo di derivata prima per f', e di derivata seconda per la derivata di f'.

Derivate seconde.

Definizione 6.4.4. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione <u>derivabile</u> su (a, b), cosicché è ben definita la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

1. *Sia $x_0 \in (a, b)$. Chiamiamo* derivata seconda *di f in x_0 la derivata, se esiste, di f' in x_0, e la indichiamo con il simbolo $f''(x_0)$.*
2. *Diciamo che f è* derivabile due volte *in x_0 se f' è derivabile in x_0, cioè se la derivata seconda $f''(x_0)$ esiste finita.*
3. *Diciamo che f è* derivabile due volte in (a, b) *se f' è derivabile in (a, b). In questo modo, resta definita la funzione derivata seconda $f'' : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

Esempio 6.4.5.

1. La funzione
$$f(x) = x^2 + 4x - 2 + \cos(x) + 3\ln(x), \qquad x \in (0, +\infty),$$
è derivabile due volte su $(0, +\infty)$. Infatti, f è derivabile una volta su $\mathbb{R}$, con $f'(x) = 2x + 4 - \sin(x) + \frac{3}{x}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. A sua volta, f' è derivabile su $(0, +\infty)$, con $f''(x) = 2 - \cos(x) - \frac{3}{x^2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.
2. La funzione $f(x) = e^x$ è derivabile due volte su $\mathbb{R}$, con $f''(x) = f'(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. La funzione
$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
è derivabile su $\mathbb{R}$. Infatti, essa è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e verifichiamo la derivabiltà di f in $x_0 = 0$ con la definizione
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h} = 0\,.$$
Allora f' è data da
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -2x & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad f'(x) = 2|x|\,.$$
Siccome f' è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concludiamo che f è derivabile due volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con
$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Criterio per convessità/concavità. Possiamo ora formalizzare i legami fra segno della derivata seconda e convessità/concavità.

Teorema 6.4.6. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*derivabile due volte*</u>*. Si ha che*

1. *f è convessa su (a, b) se e solo se la funzione derivata seconda f'' è non negativa su (a, b), cioè $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;*

2. *f è concava su (a, b) se e solo se la funzione derivata seconda f'' è non positiva su (a, b), cioè $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$;.*

Osservazione 6.4.7. Si osservi che, come il Teorema 6.3.7, anche il Teorema 6.4.6 vale solo su intervalli: per esempio, la funzione $f(x) = x^{2/3}$, derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, verifica $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si noti però che f non è globalmente concava su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (che non è un intervallo!): le restrizioni di f agli intervalli $(0, +\infty)$ e a $(-\infty, 0)$ sono però concave.

Punti di flesso. Infine, diamo la seguente

Definizione 6.4.8. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di continuità per f. Supponiamo che $\exists\, f'(x_0) \in [-\infty, +\infty]$ (cioè esista la derivata di f in x_0, finita oppure no). Diciamo che il punto corrispondente sul grafico $(x_0, f(x_0))$ è* un punto di flesso *se f ha concavità opposta a destra e a sinistra di x_0, cioè se il punto $(x_0, f(x_0))$ separa una regione di convessità da una regione di concavità.*

Esempio 6.4.9. 1. La funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, ha in $(0, 0)$ un <u>punto di flesso a tangente orizzontale</u> (in quanto $f'(0) = 0$: la retta tangente in $(0, 0)$ è l'asse delle x).

2. La funzione $f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, ha in $(0, 0)$ un punto di flesso a tangente verticale (in quanto $f'(0) = +\infty$).

3. La funzione $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ha in $(0, 0)$ un punto di flesso a tangente obliqua (in quanto $f'(0) = 1$: la retta tangente in $(0, 0)$ è la retta $y = x$).

4. Si noti che il punto $(0, 0)$ NON è di flesso per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x^{1/3} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   In effetti, $(0, 0)$ separa una regione di convessità da una regione di concavità, ma $\nexists\, f'(0)$.

Concludiamo con la seguente condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un dato punto sia di flesso.

Proposizione 6.4.10. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che il punto $(x_0, f(x_0))$ è di flesso. Se $f''(x_0)$ esiste, allora $f''(x_0) = 0$.*

L'annullamento della derivata seconda è solo una condizione necessaria e non sufficiente per avere un punto di flesso. Per esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha derivata seconda nulla in $x_0 = 0$, ma il punto $(0, 0)$ non è di flesso, in quanto f è convessa su $\mathbb{R}$.

6.5 Schema per lo studio di funzione

Data $f(x)$

1. determinare il dominio D_f
2. stabilire se f è pari?/ f è dispari?
   (Ha senso solo se D_f è simmetrico rispetto a 0!!)
3. segno di f:
   - regioni dove $f > 0$
   - regioni dove $f < 0$
   - punti dove $f = 0 \Rightarrow$ intersezioni di graf(f) con asse x

   N.B. l'unica intersezione di graf(f) con asse y è nel punto $(0, f(0))$ (se $0 \in D_f$)
4. limiti di f "agli estremi" di D_f, per esempio:
   - se $D_f = (a, +\infty)$ calcolo
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) \ \& \ \lim_{x\to +\infty} f(x)$$
   - se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ con $a < b$ calcolo
   $$\lim_{x\to -\infty} f(x), \ \lim_{x\to a^-} f(x), \ \lim_{x\to a^+} f(x),$$
   $$\lim_{x\to b^-} f(x), \ \lim_{x\to b^+} f(x), \ \lim_{x\to +\infty} f(x)$$
5. asintoti verticali, orizzontali, obliqui per graf(f)
6. continuità di f & classificazione eventuali punti di discontinuità
7. derivabilità di f & classificazione eventuali punti di non derivabilità
8. segno di f':
   - regioni dove $f' > 0 \Rightarrow$ f strett. crescente
   - regioni dove $f' < 0 \Rightarrow$ f strett. decrescente
   - punti dove $f' = 0 \Rightarrow$ punti stazionari
9. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) dei punti stazionari, studiando segno di f'
10. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) dei punti interni a D_f dove f non è derivabile, studiando segno di f'
11. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) degli eventuali estremi di D_f
12. segno di f'':
    - regioni dove $f'' \geq 0 \Rightarrow$ f convessa
    - regioni dove $f'' \leq 0 \Rightarrow$ f concava
13. punti di sella
14. tracciare il grafico qualitativo di f

Capitolo 7

Integrali indefiniti e definiti

7.1 La nozione di primitiva

Ci occuperemo del seguente

Problema 7.1.1. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, trovare una funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,. \tag{7.1.1}$$

Definizione 7.1.2. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Chiamiamo* primitiva *di* f *su* (a, b) *ogni funzione* $F : (a, b) \to \mathbb{R}$*, derivabile, verificante la* (7.1.1).

Esempio 7.1.3.

1. Sia $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $F_0(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, è una primitiva per f. Ma anche la funzione $F_1(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, è una primitiva per f.
2. Sia $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Una primitiva di f è la funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Sia $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Una primitiva di f è la funzione $F(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Sia $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Una primitiva di f è la funzione $F(x) = -\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.1.4. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Possiamo osservare che

- se f ammette una primitiva F su (a, b), allora f ammette di fatto infinite primitive su (a, b), in quanto per ogni costante reale c si ha che la funzione $x \in (a, b) \mapsto F(x) + c$ è anch'essa una primitiva di f. Infatti,

$$(F + c)'\,(x) = F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)\,;$$

- se F e G sono due primitive di f su (a, b), allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c \qquad \forall\, x \in (a, b)\,.$$

  Questo segue dal Teorema della derivata nulla (cf. con il Teorema 5.5.5.): in effetti, la funzione $G - F$ ha derivata nulla (in quanto $(G - F)'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$ per ogni $x \in (a, b)$) ed è definita su **un intervallo** (a, b).

Diamo ora la seguente

Definizione 7.1.5 (Integrale indefinito). *Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, chiamiamo* integrale indefinito *di f (su (a, b)) l'insieme di tutte le primitive di f (su (a, b)), ammesso che ne esistano. Denotiamo l'integrale indefinito di f con il simbolo*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.1.2}$$

Osserviamo che l'integrale indefinito non è un numero, ma un <u>insieme di funzioni</u>.
In virtù del punto 1. dell'Osservazione 7.1.4, si ha che, se una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ammette una primitiva F su (a, b), allora di fatto ne ammette infinite, che differiscono per una costante reale. D'altra parte, il punto 2. afferma che in questo modo si ottengono <u>tutte e sole</u> le primitive di f. Riassumiamo questo nel

Teorema 7.1.6 (Teorema di struttura dell'integrale indefinito.). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + c\, :\; c \in \mathbb{R}\}\;. \tag{7.1.3}$$

Sintetizzeremo la formula (7.1.3) scrivendo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,,$$

ove si intende che la constante c varia arbitrariamente in $\mathbb{R}$. Per esempio, tenendo conto che una primitiva della funzione $f(x) = x^2$ è la funzione $F(x) = \frac{x^3}{3}$, scriveremo

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c\,.$$

Esistenza di primitive. Abbiamo il seguente

Teorema 7.1.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se*

$$f \text{ è continua su } (a, b), \tag{7.1.4}$$

allora f ammette almeno una primitiva (di fatto, ne ammette infinite) su (a, b).

Osservazione 7.1.8. Non possiamo rinunciare all'ipotesi di continuità: per esempio, la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

non ammette alcuna primitiva su $\mathbb{R}$. In effetti, se per assurdo esistesse una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e con derivata $F'(x) = H(x)$, F dovrebbe essere: costante su $(-\infty, 0)$ (perché su $(-\infty, 0)$ la derivata dovrebbe essere nulla) e con un andamento lineare su $(0, +\infty)$ (perché su $(0, +\infty)$ la derivata dovrebbe essere costantemente uguale a 1). Imponendo che $F(0) = 0$ (questo non è limitativo: il ragionamento che sviluppiamo è valido per qualsiasi valore di F in 0) e che F sia continua in 0 (questa è una richiesta naturale, visto che F deve essere anche derivabile in 0), otteniamo che

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ma la funzione F così costruita NON è derivabile in 0. Quindi F non può essere una primitiva per H su $\mathbb{R}$.

7.1.1 Gli integrali definiti e la loro interpretazione geometrica

Definizione 7.1.9. *Siano*

♣ $[a,b]$ *un intervallo chiuso e limitato*

♣ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua (quindi f ammette infinite primitive su $[a,b]$).*

Chiamiamo integrale definito *di f su $[a,b]$ (e lo denotiamo con il simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) il numero*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{7.1.5}$$

dove F è una <u>*qualsiasi*</u> *primitiva di f.*

Osservazione 7.1.10. 1. Si noti che l'integrale DEFINITO è un numero!

2. Si osservi che la Definizione 7.1.9 è ben posta, cioè NON dipende dalla scelta della primitiva di f. Cioè, cambiando la primitiva di f, si ottiene sempre lo stesso numero! Infatti,

   - sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una qualsiasi altra primitiva di f;
   - per il teorema di struttura, F e G differiscono per una costante, cioè

   $$\exists\, k \in \mathbb{R} \;:\; G(x) = F(x) + k \quad \forall\, x \in [a,b].$$

   - Allora

   $$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. D'ora in poi useremo la notazione più sintetica

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Significato geometrico dell'integrale definito. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e <u>positiva</u>, cioè

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b],$$

allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ è l'area della regione piana compresa fra } \mathrm{graf}(f) \text{ e l'asse } x$$

Integrali definiti e parità/disparità. Sia $[-M, M]$ un intervallo simmetrico rispetto all'origine e sia $f : [-M, M] \to R$ una funzione continua (quindi possiamo considerarne l'integrale definito). Allora

$$
\begin{aligned}
&f \text{ dispari su } [-M,M] \;\Rightarrow\; \int_{-M}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \\
&f \text{ pari su } [-M,M] \;\Rightarrow\; \int_{-M}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

7.1.2 Integrali indefiniti elementari

Diamo ora gli integrali indefiniti[1] di **alcune** funzioni elementari.

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{7.1.6a}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c\,, \tag{7.1.6b}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c\,, \tag{7.1.6c}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c\,, \tag{7.1.6d}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \tan^2(\alpha x)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + c\,, \tag{7.1.6e}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c\,, \tag{7.1.6f}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \int \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x) + c\,. \tag{7.1.6g}$$

Un fondamentale strumento per il calcolo degli integrali indefiniti è il seguente

Teorema 7.1.11 (Linearità degli integrali indefiniti)**.** *Date due funzioni $f\,, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, siano $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in (a, b) e $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di g in (a, b). Allora, per ogni coppia di costanti α, $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha F + \beta G$ è una primitiva della funzione $\alpha f + \beta g$. Si ha pertanto*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha F(x) + \beta G(x) + c\,. \tag{7.1.7}$$

Combinando il Teorema 7.1.11 con le formule (7.1.6), siamo in grado di calcolare gli integrali indefiniti delle combinazioni lineari delle funzioni elementari summenzionate.
Osservazione generale importante: per verificare il risultato del calcolo di un integrale indefinito, è sufficiente

derivare la primitiva ottenuta e verificare
che in questo modo si ritrova la funzione di partenza

[1]di verifica immediata!!

Esempio 7.1.12. 1. Si ha che

$$\int \left(2x^{4/3} - \frac{4}{1+3x^2} + \sin(5x)\right) \mathrm{d}x = 2\int x^{4/3}\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x + \int \sin(5x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{6}{7}x^{7/3} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) - \frac{1}{5}\cos(5x) + c\,.$$

2. Si ha che

$$\int \left(\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{3x} + 4e^{-x}\right) \mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= 6\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln(|x|) - 4e^{-x} + c\,.$$

Osserviamo che il calcolo di un integrale indefinito da' come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata funzione f, è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0, la primitiva assuma un assegnato valore y_0.

Esempio 7.1.13. 1. Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della funzione $f(x) = x^5 + \frac{1}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$, verificante $F(0) = 3$.
Calcoliamo l'integrale indefinito di f, osservando che

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(si noti che abbiamo raccolto un 4 al denominatore per riscrivere la funzione $\frac{1}{x^2+4}$ in una formula più simile a $\frac{1}{1+x^2}$). Allora

$$\int \left(x^5 + \frac{1}{x^2+4}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c\,.$$

Ora ricerchiamo fra tutte le primitive di f l'unica verificante $F(0) = 3$: dobbiamo determinare la costante c imponendo

$$3 = F(0) = 0 + \frac{1}{2}\arctan(0) + c,$$

da cui $c = 3$. Quindi

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ della funzione $f(x) = \frac{x+2}{x^{5/2}}$, $x \in (0, +\infty)$, tale che il grafico graf(G) passi per il punto $(4, 2)$. Calcolare inoltre l'area della regione compresa fra graf(f) e l'asse delle x, sull'intervallo $[1, 2]$.
Calcoliamo l'integrale indefinito di f:

$$\int \left(\frac{x+2}{x^{5/2}}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{x^{5/2}} + \frac{2}{x^{5/2}}\right) \mathrm{d}x = \int x^{-3/2}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{-5/2}\,\mathrm{d}x = -2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2} + c\,.$$

Quindi l'area della regione compresa fra graf(f) e l'asse delle x, sull'intervallo $[1,2]$, è

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \frac{x+2}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2}\right]_1^2 = -2\cdot 2^{-1/2} - \frac{4}{3}2^{-3/2} - \left(-2 - \frac{4}{3}\right)$$
$$= 2\left(1-\sqrt{2}\right) + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

La condizione che graf(G) passi per il punto $(4,2)$ ovviamente equivale a imporre che $G(4) = 2$, quindi determiniamo c:

$$2 = G(4) = -24^{-1/2} - \frac{4}{3}4^{-3/2} + c = -1 - \frac{4}{3}\frac{1}{8} = -\frac{7}{6}\,.$$

Quindi

$$G(x) = -2x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{-3/2} + \frac{19}{6} \qquad \forall\, x \in (0,+\infty)\,.$$

3. Determinare la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cui derivata è f, il cui grafico passa per $(0,0)$;
   - scrivere l'equazione della retta tangente a graf(F) in $(0,0)$;
   - calcolare la derivata seconda di F.

♢ Calcoliamo l'integrale indefinito di f:

$$\int \left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{4}e^{2x}\right)\mathrm{d}x = \int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{8}e^{2x} + c\,.$$

La condizione che

$$\text{graf}(F) \text{ passi per il punto } (0,0) \text{ equivale a } F(0) = 0$$

quindi

$$0 = F(0) = -3\cos(0) + \frac{1}{8}e^0 + c \;\Rightarrow\; c = 3 - \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$$

da cui

$$F(x) = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{23}{8} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

♢ Chiaramente la derivata di F è f (**verificarlo!**), quindi per la retta tangente in $(0,0)$ serve calcolare

$$F'(0) = f(0) = \sin(0) + \frac{1}{4}e^0 = \frac{1}{4}$$

e quindi la retta tangente a graf(f) in $(0,0)$ è

$$y = \frac{1}{4}x$$

♢ La derivata seconda di F è la derivata di f', cioè

$$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}e^{2x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Generalizzazione della tabella degli integrali indefiniti elementari. Sia $g : I \to \mathbb{R}$. Diamo la seguente estensione della tabella degli integrali indefiniti elementari, che può essere giustificata usando la formula di integrazione per sostituzione:

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int g(x)^r g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{7.1.8a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|g(x)|) + c\,, \tag{7.1.8b}$$

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c\,, \tag{7.1.8c}$$

$$\int \cos(g(x))\,\mathrm{d}x = \sin(g(x)) + c\,, \tag{7.1.8d}$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\left(1 + \tan^2(g(x))\right)\,\mathrm{d}x = \tan(g(x)) + c\,, \tag{7.1.8e}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c\,, \tag{7.1.8f}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1 + g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(g(x)) + c\,. \tag{7.1.8g}$$

7.2 Integrazione per parti

Teorema 7.2.1 (Formula di integrazione per parti)**.** *Siano f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora*

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.2.1}$$

Dimostrazione. La formula di Leibniz per il calcolo della derivata della funzione prodotto da'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri e osservando che

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) + c\,,$$

ottengo

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) + c\,,$$

da cui la (7.2.1). □

Osservazione 7.2.2.
- La (7.2.1) riconduce il calcolo dell'integrale indefinito $\int f'g$ al calcolo dell'integrale indefinito $\int fg'$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g). L'idea è che si dovrebbe passare dall'"integrale difficile" $\int f'g$ all'integrale "più semplice" $\int fg'$.
- Operativamente, si può applicare la formula (7.2.1) al calcolo dell'integrale del prodotto di due funzioni h e k
$$\int h(x)k(x)\,\mathrm{d}x$$

scegliendo in modo opportuno quale, fra h e k, dovrà giocare il ruolo di f', e quale delle due avrà il ruolo di g. Se, per esempio, scegliamo di trattare h come f', denotando con H una (qualsiasi) primitiva di h troviamo che

$$\int h(x)k(x)\,\mathrm{d}x = H(x)k(x) - \int H(x)k'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Per riportarci all'integrale di destra, abbiamo quindi derivato la k e integrato la h.

- Per applicare in modo efficace la formula di integrazione per parti all'integrale di un prodotto di due funzioni, è quindi di fondamentale importanza scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare. Nei seguenti esempi, illustriamo questa tecnica in alcuni casi.

7.2.1 Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x), \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

*cioè **integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio**.*
Ad esempio

$$\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int 1\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\sin(2x) = \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + c$$

(il simbolo $\overset{i.p}{=}$ significa che l'uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di integrazione per parti). Il seguente esempio mostra che può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente:

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare l'ultimo integrale, applico la formula (7.2.1):

$$\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e infine

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - x\cos(x) = \sin(x) - x\cos(x) + c\,.$$

Allora concludo

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio****.*
Ad esempio

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int 1e^x\,\mathrm{d}x + xe^x = (x-1)e^x + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\ln(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica****.*
Ad esempio

$$\int x\ln(2x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) + c\,.$$

Troviamo quindi che

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\ln(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + x\ln(x) = -x + x\ln(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\arctan(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente****.*
Ad esempio

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x)\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale ragiono in questo modo

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c\,.$$

7.3 Integrazione per sostituzione

Teorema 7.3.1 (Formula di integrazione per sostituzione)**.** *Siano f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora*

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,. \tag{7.3.1}$$

Dimostrazione. La formula per il calcolo della derivata della funzione composta da'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri e osservando che

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g)(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,,$$

ottengo (7.3.1). □

Come conseguenza immediata della (7.2.1), otteniamo le seguenti formule

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int g(x)^r g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{7.3.2a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|g(x)|) + c\,, \tag{7.3.2b}$$

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c\,, \tag{7.3.2c}$$

$$\int \cos(g(x))\,\mathrm{d}x = \sin(g(x)) + c\,, \tag{7.3.2d}$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\left(1+\tan^2(g(x))\right)\,\mathrm{d}x = \tan(g(x)) + c\,, \tag{7.3.2e}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c\,, \tag{7.3.2f}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(g(x)) + c\,. \tag{7.3.2g}$$

Integrazione per sostituzione. Operativamente, applichiamo la formula di integrazione per sostituzione in questo modo: dovendo integrare

$$\int k(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

effettuiamo la sostituzione

$$u = g(x)\,. \tag{7.3.3}$$

Procediamo formalmente: derivando la (7.3.3), otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Allora, denotando con K una primitiva di k, si ha che

$$\int k(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int k(u)\,\mathrm{d}u = K(u) + c = K(g(x)) + c\,,$$

ove l'ultima uguaglianza si ottiene risostituendo $g(x)$ a u.

Esempio 7.3.2. Calcoliamo

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x$$

combinando la tecnica di integrazione per parti con la tecnica di integrazione per sostituzione. Integrando per parti, otteniamo

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + x\arctan(x)\,.$$

Per calcolare il secondo integrale indefinito $\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ procediamo per sostituzione, ponendo $u = x^2$. Allora $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, quindi

$$\int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(|1+u|) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$

Concludiamo che

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$