QUARTO FOGLIO DI ESERCIZI

da consegnare entro il 16.12.2009

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti funzioni, indicare dom f, il dominio della derivata dom f', e calcolare la derivata:

1. $f(x) = 10 \arctan(5x) - x \dfrac{e^{5x} + e^{-5x}}{2}$;
2. $f(x) = 4 \sin(4x) + e^{-4x} \cos(4x)$;
3. $f(x) = 2xe^{-2x} + \frac{1}{2} \arctan(-2x)$;
4. $f(x) = 9 \dfrac{e^{9x} - e^{-9x}}{5} + 10x \cos(9x)$;
5. $f(x) = 3 \arctan(3x) + \ln(x^2 + 2x + 5) \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{x^4 - x^3 + x - 1}$;
6. $f(x) = 6 \sin(6x) - (x + 1)^6$;
7. $f(x) = 3^{\sin(2e^{-3x})}$;
8. $f(x) = \dfrac{\cos(e^{\sqrt{x}})}{1 + \tan(4x^2)}$;
9. $f(x) = x^{\sin(3x^3)}$;
10. $f(x) = (e + \sin(x))^{3x}$;
11. $f(x) = \dfrac{\sin(2\sqrt{x})}{3x^2 + e^{-4x}}$;
12. $f(x) = \dfrac{(\arctan(2 + x^4)}{e^{3x} + e^{-3x}}$;
13. $f(x) = \dfrac{\arcsin(3x) \log_2(5x^2 + 1)}{\arctan(\cos(x))}$;
14. $f(x) = \dfrac{(\arccos(x))^2}{9x^2 - 1} + \arcsin(e^x)$.

Esercizio 2.

- Per la funzione al punto 1., determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$;
- per la funzione al punto 2., determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto che ha ascissa $x = \frac{\pi}{2}$;
- per la funzione al punto 3., determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto che ha ascissa $x = \frac{1}{2}$;
- per la funzione al punto 6., determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto in cui graf(f) interseca la retta $x = \frac{\pi}{36}$;
- per la funzione al punto 11., determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 0)$;
- per la funzione al punto 14., determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.

Esercizio 3.

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ (x-1)^2 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$
   - Verificare che f è continua su tutto $\mathbb{R}$;
   - verificare che f è derivabile su $(-\infty, 1)$ e su $(1, +\infty)$;
   - classificare il punto $x = 1$ come punto di non derivabilità.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^{1/5} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ \arccos(x) & \text{se } x \in (-1, 1), \\ \pi & \text{se } x = -1, \\ x + \pi + 1 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$
   - Verificare che f è continua su tutto $\mathbb{R}$;
   - verificare che f è derivabile su $(-\infty, -1)$, su $(-1, 1)$, e su $(1, +\infty)$;
   - classificare i punti $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ come punti di non derivabilità.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x-1) + 1 & \text{se } x > 1, \\ x^{6/7} & \text{se } x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$
   - Verificare che f è continua su tutto $\mathbb{R}$;
   - verificare che f è derivabile su $(-\infty, -1)$, su $(-1, 1) \setminus \{0\}$, e su $(1, +\infty)$;
   - classificare i punti $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, e $x_3 = 1$ come punti di non derivabilità.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti, specificando le eventuali forme indeterminate, ed eventualmente applicando il teorema di De L'Hopital:

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin(2x)}{x \sin(x)}$;
2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x}$;
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}x} \arctan(x^2 - 9)}{x^4 \ln(2x^2 + 3)}$;
4. $\lim_{x \to +\infty} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.