

QUINTO FOGLIO DI ESERCIZI

Monotonia, convessità e concavità. Osservando i grafici delle funzioni elementari introdotte (potenze a esponente naturale, intero, razionale; funzioni esponenziali e logaritmiche di base $a > 0$, $a \neq 1$; funzioni trigonometriche sin, cos, tan e le relative funzioni inverse), dire su quali regioni del loro dominio naturale tali funzioni sono:

- non decrescenti/strettamente crescenti;
- non crescenti/strettamente decrescenti;
- convesse;
- concave.

Verificare poi le conclusioni tratte con uno studio delle derivate prime e seconde di tali funzioni.

Studio di funzioni. Secondo lo schema indicato a lezione, studiare le proprietà delle seguenti funzioni (eventualmente tralasciando lo studio della convessità/concavità se lo studio del segno della derivata seconda fosse troppo difficile) ed infine tracciarne un grafico qualitativo:

1. $f(x) = e^x \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$
2. $f(x) = x \exp \left(\frac{x-2}{x+1} \right)$
3. $f(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$
4. $f(x) = x \exp \left(\frac{1}{1-x} \right)$

Calcolo di integrali indefiniti e definiti vari.

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left((x+2)^5 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx;$$

calcolare inoltre l'area compresa fra il grafico di $f(x) = (x+2)^5 + \frac{1}{1+x^2}$, per $x \in [0, 1]$ (si noti che f assume valori positivi su $[0, 1]$) e l'asse delle x .

2. Calcolare

$$\int_{-1}^1 \left[x^5 \cos(\arctan(x^3)) + \frac{1}{1+7x^2} \right] dx;$$

3. Calcolare la primitiva $G : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

tale che $G(0) = 0$. Inoltre, scrivere l'equazione della retta tangente a $\text{graf}(G)$ nel punto $(0, 0)$. Calcolare anche $G''(x)$ per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Infine, calcolare l'area compresa fra il grafico di della funzione G' , sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, e l'asse delle x .

4. Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)} + \sin \left(\frac{x}{2} \right) - \cos(5x) \right) dx$$