# QUINTO FOGLIO DI ESERCIZI (soluzioni)

**Calcolo di integrali indefiniti e definiti vari.**

1. Si ha
$$\int \left((x+2)^5 + \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x+2)^6 + \arctan(x) + c$$
quindi l'area compresa fra il grafico di $f(x) = (x+2)^5 + \frac{1}{1+x^2}$, per $x \in [0,1]$ e l'asse delle $x$ è
$$A = \left[\frac{1}{6}(x+2)^6 + \arctan(x)\right]_0^1 = \frac{1}{6}(3^6 - 2^6) + \frac{\pi}{4}.$$

2. Calcolare
$$\int_{-1}^{1} \left[x^5 \cos(\arctan(x^3)) + \frac{1}{1+7x^2}\right]\,\mathrm{d}x;$$
La funzione $f(x) = x^5 \cos(\arctan(x^3))$ è dispari, in quanto
$$\begin{aligned} f(-x) = (-x)^5 \cos(\arctan((-x)^3)) = -x^5 \cos(\arctan(-x^3)) &= -x^5 \cos(-\arctan(x^3))) \\ &= -x^5 \cos(\arctan(x^3)) \end{aligned}$$
quindi
$$\int_{-1}^{1} x^5 \cos(\arctan(x^3))\,\mathrm{d}x = 0$$
mentre la funzione $g(x) = \frac{1}{1+7x^2}$ è pari, quindi
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+7x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{1+7x^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(x\sqrt{7}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\sqrt{7}).$$

3. Calcolare la primitiva $G : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ della funzione
$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
tale che $G(0) = 0$: si osservi che
$$\int \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c$$
quindi
$$\int \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c.$$
Trovo $G$ imponendo che $G(0) = 0$, da cui
$$0 = G(0) = \frac{1}{4}(1+1) + 2\tan(0) - 0 + c = \frac{1}{2} + c$$
quindi $c = -\frac{1}{2}$ e
$$G(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x - \frac{1}{2}.$$

Infine, calcolare l'area compresa fra il grafico di della funzione $G'$, sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, e l'asse delle $x$: si osservi che $G'(x) = f(x)$, quindi l'area in questione è

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/6} \left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[ \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x \right]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{\pi/3} + e^{-\pi/3}\right) + 2\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}(1+1) - 0 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{\pi/3} + e^{-\pi/3}\right) + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)} + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(5x) \right) \, \mathrm{d}x$$

Si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)} \, \mathrm{d}x = 0$$

in quanto la funzione $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\cos(x^4)}$ è dispari (**verificare!**). Analogamente, per disparità della funzione $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \, \mathrm{d}x = 0$$

mentre

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(5x) \, \mathrm{d}x = \left[ \frac{1}{5}\sin(5x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \frac{2}{5}.$$