Spazi L^p e teorema della convergenza dominata

Confronti fra spazi L^p. Nel seguito denoteremo con A un generico sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, misurabile secondo Lebesgue.

Teorema 1: Se $\mathrm{mis}(A) < +\infty$, allora

1. $L^\infty(A) \subset L^2(A)$, e si ha

$$\|f\|_{L^2(A)} \leq \|f\|_{L^\infty(A)} \mathrm{mis}(A)^{1/2}; \tag{1}$$

2. $L^2(A) \subset L^1(A)$, e si ha

$$\|f\|_{L^1(A)} \leq \|f\|_{L^2(A)} \mathrm{mis}(A)^{1/2}. \tag{2}$$

Questi risultati di inclusione fra spazi L^p sono FALSI su insiemi di misura infinita. Per esempio:

- è falso che $L^\infty(1,+\infty) \subset L^2(1,+\infty)$: infatti, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \in L^\infty(1,+\infty), \text{ ma } f \notin L^2(1,+\infty), \text{ in quanto } |f(x)|^2 = \frac{1}{x} \notin L^1(1,+\infty);$$

- è falso che $L^2(1,+\infty) \subset L^1(1,+\infty)$: infatti, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \in L^2(1,+\infty), \text{ ma } f \notin L^1(1,+\infty).$$

- È anche falso che $L^1(1,+\infty) \cap L^2(1,+\infty) \subset L^\infty(1,+\infty)$. Infatti, consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \chi_{(n-\frac{1}{2e^n}, n+\frac{1}{2e^n})}(x) \quad \forall\, x \in (1,+\infty).$$

  Si noti che per ogni $x \in (1,+\infty)$ esiste un unico $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x \in (n_0 - \frac{1}{2e^{n_0}}, n_0 + \frac{1}{2e^{n_0}})$, e quindi la serie si riduce a un unico termine. Ora osserviamo che

  - $f \in L^1(1,+\infty)$: infatti, f ha integrale improprio convergente su $(1,+\infty)$, in quanto

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-\frac{1}{2e^n}}^{n+\frac{1}{2e^n}} n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{e^n} < +\infty;$$

  - $f \in L^2(1,+\infty)$, in quanto

$$\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-\frac{1}{2e^n}}^{n+\frac{1}{2e^n}} n^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n} < +\infty;$$

  - d'altra parte, $f \notin L^\infty(1,+\infty)$, essendo

$$\forall\, n \geq 2 \quad \sup_{x\in(1,+\infty)} f(x) \geq \|f\|_{L^\infty(n-\frac{1}{2e^n}, n+\frac{1}{2e^n})} = n$$

    e quindi

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} f(x) = +\infty.$$

Teorema 2: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue. Allora $L^1(A) \cap L^\infty(A) \subset L^2(A)$ e

$$\forall\, f \in L^1(A) \cap L^\infty(A) \quad \|f\|_{L^2(A)} \leq \|f\|_{L^1(A)}^{1/2} \cdot \|f\|_{L^\infty(A)}^{1/2}. \tag{3}$$

Esercizio 1. *Per quali $p \in [1, +\infty]$ la funzione $f(x) = e^{-|x|}$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$?*

- $f \in L^\infty(\mathbb{R})$: infatti,
$$0 < f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Inoltre
$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1.$$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$: infatti,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, \mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-|x|}\, \mathrm{d}x = 2 \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2 \lim_{R\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^R = 2.$$
- per ogni $p \in (1, +\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, in quanto
$$|f(x)|^p = e^{-p|x|} \leq e^{-|x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Quindi per confronto si conclude che $|f|^p \in L^1(\mathbb{R})$, da cui $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. *Per quali $p \in [1, +\infty]$ la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$?*

- $f \in L^\infty(\mathbb{R})$: infatti,
$$0 < f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Inoltre
$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1.$$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$: infatti,
$$e^{-x^2} \leq e^{-|x|} \quad \forall\, x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$
quindi, per confronto, deduco che $f(x) = e^{-x^2} \in L^1(-\infty, -1)$ e $f \in L^\infty(1, +\infty)$. D'altra parte, $f(x) = e^{-x^2}$ è continua su $\mathbb{R}$, quindi in particolare $f \in L^1(-1, 1)$. Allora concludiamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dimostriamo che
$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sqrt{\pi}.$$
Infatti,
$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right)^2} \\
&= \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y\right)} \\
&= \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \\
&= \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \\
&= \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\vartheta} \\
&= \lim_{R\to+\infty} \sqrt{2\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^R} = \sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

ove la quarta uguaglianza segue dal teorema di Fubini, la quinta uguaglianza dalla definizione di integrale improprio su $\mathbb{R}^2$, e la sesta uguaglianza si ottiene passando alle coordinate polari.

- Per ogni $p \in (1, +\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, in quanto

$$|f(x)|^p = e^{-px^2} \leq e^{-x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

  Quindi per confronto si conclude che $|f|^p \in L^1(\mathbb{R})$, da cui $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. *Per quali* $p \in [1, +\infty]$ *la funzione*

$$f(x) = \frac{\sin(x)\arctan(e^x)}{x^2+1}$$

appartiene a $L^p(0, +\infty)$*?*
Osserviamo che

$$|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2+1} \qquad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

Siccome

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1} \in L^p(0, +\infty) \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty,$$

concludiamo che anche f appartiene a $L^p(0, +\infty)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

Esercizio 4. *Sia* p *un indice assegnato in* $[1, +\infty)$*, e siano* α*,* β*,* γ *tre parametri reali, con* β *e* γ *strettamente positivi. Sotto quali condizioni su* α*,* β*,* γ *la funzione*

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sinh(\beta x)}{\sinh(x)^\gamma}$$

appartiene a $L^p(1, +\infty)$*?*
Si osservi che

$$\sinh(\beta x) = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \sim e^{\beta x} \quad \text{per } x \to +\infty, \text{ e}$$
$$(\sinh(x)^\gamma) \sim (e^x)^\gamma \sim e^{\gamma x} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Allora

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{e^{(\gamma-\beta)x}} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi

$$|f(x)|^p \sim \frac{x^{\alpha p}}{e^{(\gamma-\beta)px}} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Allora:

- se $\beta > \gamma$, si ha che $f \notin L^p(1, +\infty)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$;
- se $\beta < \gamma$, abbiamo

$$\frac{x^{\alpha p}}{e^{(\gamma-\beta)px}} \in L^1(1, +\infty) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$

  quindi $f \in L^p(1, +\infty)$.
- se $\beta = \gamma$, allora $f^p \in L^1(1, +\infty)$ se e solo se $-\alpha p > 1$, e cioè $\alpha < -\frac{1}{p}$.

Convergenze in spazi L^p. Dai Teoremi 1 e 2 conseguono proprietà delle convergenze L^p.

- Se $\mathrm{mis}(A) < +\infty$, allora
  1. data una successione di funzioni $\{f_n\} \subset L^\infty(A)$ e una $f \in L^\infty(A)$, allora
  $$\left[\|f_n - f\|_{L^\infty(A)} \to 0 \ \text{ per } n \to \infty\right] \ \Rightarrow \ \left[\|f_n - f\|_{L^2(A)} \to 0 \ \text{ per } n \to \infty\right],$$
  cioè la convergenza in $L^\infty(A)$ implica quella in $L^2(A)$.
  2. data una successione di funzioni $\{f_n\} \subset L^2(A)$ e una $f \in L^2(A)$, allora
  $$\left[\|f_n - f\|_{L^2(A)} \to 0 \ \text{ per } n \to \infty\right] \ \Rightarrow \ \left[\|f_n - f\|_{L^1(A)} \to 0 \ \text{ per } n \to \infty\right],$$
  cioè la convergenza in $L^2(A)$ implica quella in $L^1(A)$.
- Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un qualunque insieme misurabile, data una successione di funzioni $\{f_n\} \subset L^1(A) \cap L^\infty(A)$ e una $f \in L^1(A) \cap L^\infty(A)$, allora
$$\left[\|f_n - f\|_{L^\infty(A)} \to 0 \ \text{ e } \ \|f_n - f\|_{L^1(A)} \to 0 \ \text{ per } n \to \infty\right] \ \Rightarrow \ \left[\|f_n - f\|_{L^2(A)} \to 0 \ \text{ per } n \to \infty\right].$$

Il più generale risultato sulle convergenze L^p è il

Teorema della convergenza dominata (o Teorema di Lebesgue). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile si consideri una successione $\{f_n\}$ di funzioni
$$f_n : A \to \mathbb{R}, \quad \text{misurabili},$$
tali che $\exists\ f : A \to \mathbb{R}$, misurabile, con
$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{per } n \to \infty \quad \text{per q.o. } x \in A.$$
Se per $1 \le p < \infty$

(4) $$\exists\, \varphi \in L^p(A) \ \text{ tale che } \ |f_n(x)| \le \varphi(x) \quad \text{per q.o. } x \in A \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora
$$f_n \to f \quad \text{in } L^p(A).$$