

Esercizi sulla formula per la derivazione della composizione di campi vettoriali

Richiami di teoria. Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$, e sia

$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{un campo vettoriale}$$

(con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto), quindi

$$\vec{F}(x) = F_1(x)\vec{i}_1 + \dots + F_m(x)\vec{i}_m = (F_1(x), \dots, F_m(x)) \quad \forall x \in A \subset \mathbb{R}^n,$$

e chiamiamo *funzioni componenti* i campi scalari $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $k = 1, \dots, m$.

Ricordiamo che $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni $k = 1, \dots, m$ le funzioni F_k sono differenziabili (nel senso dei campi scalari) in x_0 . Allora sono ben definiti i vettori gradienti

$$\nabla F_k(x_0) = \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \right) \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, m.$$

La matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ di m righe e n colonne

$$J_{\vec{F}}(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice jacobiana** di \vec{F} in x_0 e contiene **tutte** le “informazioni differenziali” su \vec{F} in x_0 .

Derivazione della funzione composta. Siano $p, n, m \geq 1$ e siano dati

$$\vec{G} : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \quad A \subset \mathbb{R}^p \text{ aperto}, \quad \vec{F} : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad B \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto},$$

tali che $\text{im}(\vec{G}) \subset B$. Quindi è definito il campo vettoriale

$$\vec{F} \circ \vec{G} : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Sia $x_0 \in A$ e supponiamo che

- \vec{G} sia differenziabile in $x_0 \Rightarrow J_{\vec{G}}(x_0)$
- \vec{F} sia differenziabile in $\vec{G}(x_0) \Rightarrow J_{\vec{F}}(\vec{G}(x_0))$.

Allora, $\vec{F} \circ \vec{G}$ è differenziabile in x_0 e

$$J_{\vec{F} \circ \vec{G}}(x_0) = J_{\vec{F}}(\vec{G}(x_0)) \cdot J_{\vec{G}}(x_0) \quad \text{ove } \cdot \text{ prodotto di matrici.}$$

Osservazioni:

- è la generalizzazione della formula per la derivazione della composizione di funzioni di variabile reale, a valori in \mathbb{R} :

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

- il prodotto matriciale è ben definito perché

$$J_{\vec{G}}(x_0) \text{ matrice } n \times p$$

$$J_{\vec{F}}(\vec{G}(x_0)) \text{ matrice } m \times n$$

quindi ricordando

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$$

otteniamo che

$$J_{\vec{F} \circ \vec{G}}(x_0) \text{ matrice } m \times p$$

come deve essere perché

$$\vec{F} \circ \vec{G} : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

- ora abbandoniamo la notazione \vec{G}, \vec{F} per trattare in modo unificato campi scalari e vettoriali..

Esercizio 1. Date

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) := \sin(x), \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ \arctan(y) \end{pmatrix}$$

calcolare

$$J_{F \circ G}(x) \quad \forall x \in \text{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $J_{F \circ G}(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché

- G è differenziabile su \mathbb{R} e

$$J_G(x) = G'(x) = \cos(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

- F (con funz. componenti $F_1(y) = y^3$ e $F_2(y) = \arctan(y)$) è differenziabile su \mathbb{R} e

$$J_F(y) = \begin{pmatrix} F_1'(y) \\ F_2'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y^2 \\ \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, mi aspetto che $J_{F \circ G}(x)$ sia matrice 2×1 , cioè un vettore colonna di \mathbb{R}^2 .

In effetti per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$J_{F \circ G}(x) = J_F(G(x)) \cdot J_G(x) = G'(x) J_F(G(x)) = \cos(x) \begin{pmatrix} \frac{3 \sin^2(x)}{1 + \sin^2(x)} \\ \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \sin^2(x) \cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \\ \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Date

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x_1, x_2) := \sin(x_1^2 x_2), \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) = y^2 + y^3$$

calcolare

$$J_{F \circ G}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \text{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $J_{F \circ G}(x_1, x_2)$ è ben definito per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ perché

- G è differenziabile su \mathbb{R}^2 e per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$J_G(x_1, x_2) = \nabla G(x_1, x_2) = (2x_1x_2 \cos(x_1^2x_2), x_1^2 \cos(x_1^2x_2)) \in \mathbb{R}^2,$$

- F è differenziabile su \mathbb{R} e

$$J_F(y) = F'(y) = 2y + 3y^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mi aspetto che $J_{F \circ G}(x)$ sia matrice 1×2 , cioè un vettore riga di \mathbb{R}^2 (il vettore gradiente!). In effetti per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \nabla(F \circ G)(x_1, x_2) &= J_{F \circ G}(x_1, x_2) = F'(G(x_1, x_2)) \nabla G(x_1, x_2) \\ &= (2 \sin(x_1^2x_2) + 3 \sin^2(x_1^2x_2)) \cdot (2x_1x_2 \cos(x_1^2x_2), x_1^2 \cos(x_1^2x_2)) \\ &= (2 \sin(x_1^2x_2) + 3 \sin^2(x_1^2x_2))(2x_1x_2 \cos(x_1^2x_2)) \vec{i}_1 \\ &\quad + (2 \sin(x_1^2x_2) + 3 \sin^2(x_1^2x_2))x_1^2 \cos(x_1^2x_2) \vec{i}_2 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Date

$$(1) \quad \begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & G(x_1, x_2) &:= x_2 \vec{i}_1 + x_1 \vec{i}_2 + x_2 \vec{i}_3 \\ F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & F(y_1, y_2, y_3) &= y_1 y_2 \vec{i}_1 + y_3^2 \vec{i}_2 \end{aligned}$$

calcolare

$$J_{F \circ G}(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \text{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $J_{F \circ G}(x_1, x_2)$ è ben definito per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ perché

- $G = (G_1, G_2, G_3)$ è differenziabile su \mathbb{R}^2 e per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$J_G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \nabla G_1(x_1, x_2) \\ \nabla G_2(x_1, x_2) \\ \nabla G_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- F è differenziabile su \mathbb{R}^3 e per ogni $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$J_F(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(y_1, y_2, y_3) \\ \nabla F_2(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mi aspetto che $J_{F \circ G}(x_1, x_2)$ sia una matrice 2×2 . In effetti per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} J_{F \circ G}(x_1, x_2) &= J_F(G(x_1, x_2)) \cdot J_G(x_1, x_2) \quad (\cdot \text{ prodotto matriciale}) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio assegnato. Date G e F come in (1), calcolare $J_{G \circ F}(y_1, y_2, y_3)$ per ogni $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ (si noti che sarà una matrice 3×3).