Foglio di esercizi sul teorema della convergenza dominata e sulle convergenze L^p

Ricordare la notazione $\exp(y) = e^y$ e inoltre che, dato un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^N$, si denota con il simbolo χ_A la funzione caratteristica di A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

e che $H : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ denota la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esercizi.

1. Sia $q > 1$ un assegnato parametro reale e si consideri la successione
$$u_n(x) = n^{1/q} \log(n) \sqrt{x^n}\,, \qquad x \in [0,1]\,.$$
Studiare la convergenza di $\{u_n\}$ quasi ovunque in $[0,1]$ e in $L^p(0,1)$, al variare di $1 \leq p \leq \infty$ (dare condizioni sull'indice p e sul parametro q in modo da avere convergenza in $L^p(0,1)$).

2. Studiare la convergenza per $n \to \infty$ (quasi ovunque in $\mathbb{R}$, in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$ e in $L^\infty(\mathbb{R})$) della successione
$$u_n(x) = H(x) nx \exp(-nx)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

3. Studiare la convergenza per $n \to \infty$ (quasi ovunque in $\mathbb{R}$, in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$ e in $L^\infty(\mathbb{R})$) della successione
$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - x^2}\, \chi_{(-n,n)}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

4. Studiare la convergenza per $n \to \infty$ (quasi ovunque in $\mathbb{R}$, in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$ e in $L^\infty(\mathbb{R})$) della successione
$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \sin(nx) & x \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

5. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza per $n \to \infty$ (quasi ovunque in $\mathbb{R}$, in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$) della successione
$$u_n(x) = n^\alpha \chi_{(0,2\pi/n)}(x) \sin(nx)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

6. Calcolare i limiti
$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n e^{-x}}{1 + nx}\, \mathrm{d}x\,,$$
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-nx) \sin(nx)}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x\,.$$