

## Foglio di esercizi sulla trasformata di Fourier<sup>1</sup>

Ricordare la notazione  $\exp(y) = e^y$  e inoltre che, dato un insieme misurabile  $A \subset \mathbb{R}^N$ , si denota con il simbolo  $\chi_A$  la funzione caratteristica di  $A$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

e che  $H : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  denota la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

### Esercizi.

1. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$u_1(x) = H(-x)e^x, \quad u_2(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Dato un numero reale  $a > 0$ , si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$u_1(x) = \chi_{(-a,a)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verificare il risultato ottenuto partendo dalla trasformata di Fourier della funzione  $u_0(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ , ottenendo  $u_1$  da  $u_0$  tramite un opportuno cambiamento di variabile, e infine applicando le formule che legano la trasformata di Fourier e l'operazione di omotetia.

3. A partire dalle trasformate di Fourier delle funzioni  $u_0(x) = H(x)e^{-x}$  e  $u_1(x) = H(-x)e^x$ , applicando opportunamente le formule note calcolare le trasformate di Fourier di

$$\begin{aligned} u_2(x) &= xH(x)e^{-x}, & u_3(x) &= (x-2)H(x)e^{-3x}, \\ u_4(x) &= xH(x-2)e^{-3(x-2)}, & u_5(x) &= (-2-x)H(-x)e^{3x}, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

è la funzione

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

e usando le formule che legano la trasformata di Fourier e le operazioni di traslazione/omotetia, calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni

$$u_1(x) = \frac{1}{x^2+4}, \quad u_2(x) = \frac{1}{1+(x-3)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>1</sup>Svolgere l'esercizio 10. SOLO dopo l'esercitazione di martedì 16.03.2010.

5. Usando le formule che legano trasformata di Fourier e derivazione, calcolare la trasformata di Fourier di

$$u(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dedurre il valore dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

Suggerimento: osservare che

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Usando (per  $v$  e  $w$ ), le formule che legano trasformata di Fourier e derivazione, e usando per  $z$  le formule che legano trasformata di Fourier e traslazione, calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$v(x) = x \exp(-\pi x^2), \quad w(x) = 2x^2 \exp(-\pi^2 x^2), \quad z(x) = e^{-\pi(x-i)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$u_1(t) = (2t-4)e^{-4t^2+8t}, \quad u_2(t) = \sin(t)te^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suggerimento: per il calcolo di  $\mathcal{F}(u_1)$ , “completare il quadrato” all'esponente di  $\exp(\cdot)$ ; per il calcolo di  $\mathcal{F}(u_2)$ , esprimere  $\sin$  mediante funzioni esponenziali.

9. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi x)e^{-\pi x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\pi x} dx.$$

Suggerimento: per il primo integrale, calcolare  $\mathcal{F}(\cos(2\pi x)e^{-\pi x^2})$  e poi il valore  $\mathcal{F}(\cos(2\pi x)e^{-\pi x^2})(0)$ ..; procedere analogamente per il secondo integrale.

10. Usando il teorema di Plancherel, calcolare

$$\left\| \frac{x}{1+x^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Verificare il risultato ottenuto sulla base dell'esercizio 5.