Il metodo della separazione delle variabili per l'equazione delle onde unidimensionale, con termini di ordine inferiore

L'equazione delle onde con una perturbazione di ordine zero e condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = 0 & \forall\, x \in (0,\ell)\,, \forall\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \forall\, x \in (0,\ell)\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \forall\, x \in (0,\ell)\,, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \forall\, t > 0\,. \end{cases}$$

Condizioni di compatibilità sui dati del problema Condizione necessaria perché il problema (1) ammetta una soluzione $u \in \mathrm{C}^2([0,\ell] \times [0,+\infty))$ è che

$$f(0) = f(\ell) = 0, \qquad g(0) = g(\ell) = 0.$$

In effetti, se $u \in \mathrm{C}^2([0,\ell] \times [0,+\infty))$ risolve (1), allora

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} u(x,0) = u(0,0) = \lim_{t \to 0^+} u(0,t) = 0,$$

e analogamente si vede che $f(\ell) = 0$. Inoltre, derivando rispetto al tempo le condizioni di Dirichlet omogenee otteniamo che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(\ell,t) \qquad \forall\, t > 0,$$

da cui

$$g(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0,$$

e analogamente si dimostra che $g(\ell) = 0$.

Separazione delle variabili Ricerco una soluzione non identicamente nulla

$$u = u(x,t) = X(x)T(t), \quad \text{con } X : [0,\ell] \to \mathbb{R}, \quad T : [0,+\infty) \to \mathbb{R}.$$

Imponendo che u risolva l'equazione ottengo

$$T''(t)X(x) - c^2 X''(x)T(t) + X(x)T(t) = 0 \qquad \forall\, x \in (0,\ell)\,, \forall\, t > 0.$$

Dividendo per $c^2 X(x)T(t)$ si conclude che

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{c^2} \qquad \forall\, x \in (0,\ell)\,, \forall\, t > 0.$$

Allora esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = K & \forall\, t > 0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{c^2} = K & \forall\, x \in (0,\ell), \end{cases}$$

da cui

$$(2) \qquad \begin{cases} T''(t) - c^2 K T(t) = 0 & \forall\, t > 0, \\ X''(x) - M X(x) = 0 & \forall\, x \in (0,\ell), \qquad \text{con } M = K + \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

Segno di M Imponendo le condizioni di Dirichlet omogenee si ottiene il problema

$$(3) \qquad \begin{cases} X''(x) - MX(x) = 0 & \forall\, x \in (0,\ell), \\ X(0) = X(\ell) = 0, \end{cases}$$

e si vede che esso ammette soluzioni non identicamente nulle SE E SOLO SE $M < 0$ ed è della forma

$$M = -\left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Corrispondentemente a tali valori di M, l'integrale generale di (6) è

$$X(x) = C\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) \qquad x \in [0,\ell], \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria,}$$

e quindi sostituendo $K + \frac{1}{c^2} = -(n\frac{\pi}{\ell})^2$ nell'equazione per T e risolvendola, si arriva a

$$T(t) = c_1\cos\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}\,t\right) + c_2\sin\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}\,t\right) \qquad t \in [0,+\infty),$$

con $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.

Quindi per ogni $n \geq 1$ ho infinite soluzioni u_n (del problema ottenuto accoppiando l'equazione alle sole condizioni di Dirichlet omogenee) della forma

$$u_n(x,t) = \left(\alpha_n\cos\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}\,t\right) + \beta_n\sin\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}\,t\right)\right)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) \qquad x \in [0,\ell],\ t \in [0,+\infty).$$

Ricerco una soluzione u della forma

$$(4) \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n\cos\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}\,t\right) + \beta_n\sin\left(c\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}\,t\right)\right)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right),$$
$$x \in [0,\ell],\ \ t \in [0,+\infty).$$

Condizioni iniziali Imponendo le condizioni iniziali trovo che per ogni $n \geq 1$

$$\alpha_n = a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\ell f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)\,\mathrm{d}x$$

(i coefficienti di Fourier del prolungamento di f a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$, dispari), e

$$\beta_n = \frac{b_n}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(n\frac{\pi}{\ell}\right)^2}}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\ell f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)\,\mathrm{d}x$$

(cioè i b_n sono i coefficienti di Fourier del prolungamento di g a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$, dispari).

Convergenza della serie Si vede che la serie di funzioni in (4) converge uniformemente su $[0,\ell] \times [0,+\infty)$ con le sue derivate parziali prime e seconde a una funzione $u \in \mathrm{C}^2([0,\ell] \times [0,+\infty))$, soluzione di (1), se f e g soddisfano le seguenti condizioni (oltre alle summenzionate condizioni di compatibilità):

- $f \in \mathrm{C}^2([0,\ell])$, f derivabile tre volte su $[0,\ell]$ con f''' (a quadrato) integrabile su $[0,\ell]$ (per esempio, questo è verificato se f è di classe C^3 a tratti su $[0,\ell]$), e infine

$$f''(0) = f''(\ell) = 0;$$

- $g \in \mathrm{C}^1([0,\ell])$, g derivabile due volte su $[0,\ell]$ con g'' (a quadrato) integrabile su $[0,\ell]$ (per esempio, questo è verificato se g è di classe C^2 a tratti su $[0,\ell]$).

L'equazione delle onde con una perturbazione di ordine uno e condizioni di Neumann omogenee al bordo. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$
(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 & \forall\, x \in (0,\pi)\,,\ \forall\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \forall\, x \in [0,\pi]\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & \forall\, x \in [0,\pi]\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & \forall\, t > 0 \end{cases}
$$

Condizioni di compatibilità sui dati del problema Condizione necessaria perché il problema (1) ammetta una soluzione $u \in \mathrm{C}^2([0,\pi] \times [0,+\infty))$ è che

$$
f'(0) = f'(\pi) = 0, \qquad g'(0) = g'(\pi) = 0.
$$

Separazione delle variabili Ricerco una soluzione non identicamente nulla

$$
u = u(x,t) = X(x)T(t), \quad \text{con } X : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad T : [0,+\infty) \to \mathbb{R}.
$$

Imponendo che u risolva l'equazione ottengo

$$
T''(t)X(x) - X''(x)T(t) + 2X(x)T'(t) = 0 \qquad \forall\, x \in (0,\pi)\,, \forall\, t > 0.
$$

Dividendo per $X(x)T(t)$ si conclude che

$$
\frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad \forall\, x \in (0,\pi)\,, \forall\, t > 0.
$$

Allora esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$
\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} + 2\frac{T'(t)}{T(t)} = K & \forall\, t > 0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = K & \forall\, x \in (0,\pi), \end{cases}
$$

da cui

$$
\begin{cases} T''(t) + 2T'(t) - KT(t) = 0 & \forall\, t > 0, \\ X''(x) - KX(x) = 0 & \forall\, x \in (0,\pi). \end{cases}
$$

Segno di K Imponendo le condizioni di Neumann omogenee si ottiene il problema

$$
(6) \qquad \begin{cases} X''(x) - KX(x) = 0 & \forall\, x \in (0,\pi), \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases}
$$

e si vede che esso ammette soluzioni non identicamente nulle SE E SOLO SE $K \geq 0$ ed è della forma

$$
K = -n^2, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 0.
$$

Corrispondentemente a tali valori di M, l'integrale generale di (6) è

$$
\begin{cases} X(x) \equiv C & \forall\, x \in [0,\ell], \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria, per } n = 0, \\ X(x) = C\cos\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) & \forall\, x \in [0,\ell], \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria, per } n \geq 1, \end{cases}
$$

e quindi sostituendo $K=-n^2$, $n\geq 0$, nell'equazione per T e risolvendola, si arriva a

$$\begin{cases} T(t)=c_1+c_2e^{-2t} \qquad t\in[0,+\infty), \quad \text{con } c_1,\, c_2\in\mathbb{R} \text{ costanti arbitrarie, per } n=0\\ T(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t} \qquad t\in[0,+\infty), \quad \text{con } c_1,\, c_2\in\mathbb{R} \text{ costanti arbitrarie, per } n=1\\ T(t)=c_1e^{-t}\cos(\sqrt{n^2-1}t)+c_2e^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}t)\\ \qquad\qquad t\in[0,+\infty), \quad \text{con } c_1,\, c_2\in\mathbb{R} \text{ costanti arbitrarie, per } n\geq 2. \end{cases}$$

Quindi per ogni $n\geq 1$ ho infinite soluzioni u_n (del problema ottenuto accoppiando l'equazione alle sole condizioni di Dirichlet omogenee) della forma

$$u_n(x,t)=\begin{cases} \alpha_0+\beta_0e^{-2t} \quad \text{per } n=0,\\ (\alpha_1e^{-t}+\beta_1te^{-t})\cos(x) \quad \text{per } n=1,\\ \Big(\alpha_ne^{-t}\cos(\sqrt{n^2-1}t)+\beta_ne^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}t)\Big)\cos(nx) \quad \text{per } n\geq 2, \end{cases}$$

con $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ costanti arbitrarie. Ricerco una soluzione u della forma
(7)

$$u(x,t)=\alpha_0+\beta_0e^{-2t}+(\alpha_1e^{-t}+\beta_1te^{-t})\cos(x)+\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\alpha_ne^{-t}\cos(\sqrt{n^2-1}t)+\beta_ne^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}t)\Big)\cos(nx)$$

Condizioni iniziali Imponendo le condizioni iniziali trovo che

$$u(x,0)=f(x)=\alpha_0+\beta_0+\alpha_1+\sum_{n=2}^{+\infty}\alpha_n\cos(nx)$$

e quindi concludo che

$$\begin{cases} \text{per } n=0 \qquad \alpha_0+\beta_0=\frac{a_0}{2}, \qquad \text{con } a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x,\\ \text{per } n\geq 1 \qquad \alpha_n=a_n, \qquad \text{con } a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

(cioè gli a_n sono i coefficienti di Fourier del prolungamento di f a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$, pari). Inoltre, essendo

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t)&=-2\beta_0e^{-2t}+e^{-t}(-\alpha_1+\beta_1-t\beta_1)\cos(x)\\ &\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-t}\cos(nx)\Big(-\alpha_n\cos(\sqrt{n^2-1}t)-\beta_n\sin(\sqrt{n^2-1}t)\\ &\qquad -\alpha_n\sqrt{n^2-1}\sin(\sqrt{n^2-1}t)+\beta_n\sqrt{n^2-1}\cos(\sqrt{n^2-1}t)\Big)\end{aligned}$$

si ha

$$g(x)=\partial_t u(x,0)=-2\beta_0+(-\alpha_1+\beta_1)\cos(x)+\sum_{n=2}^{+\infty}\cos(nx)\left(-\alpha_n+\beta_n\sqrt{n^2-1}\right)$$

da cui concludiamo che

$$\begin{cases} \text{per } n=0 \quad -2\beta_0=\frac{b_0}{2} \qquad \Rightarrow \quad \beta_0=-\frac{b_0}{4}\\ \text{per } n=1 \quad \beta_1-\alpha_1=b_1 \qquad \Rightarrow \quad \beta_1=b_1+a_1\\ \text{per } n\geq 2 \quad \beta_n\sqrt{n^2-1}-\alpha_n=b_n \quad \Rightarrow \quad \beta_n=\frac{b_n+a_n}{\sqrt{n^2-1}}, \end{cases}$$

ove b_n sono i coefficienti di Fourier del prolungamento di g a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$, pari, cioè

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Convergenza della serie Si vede che la serie di funzioni in (7) converge uniformemente su $[0,\pi]\times[0,+\infty)$ con le sue derivate parziali prime e seconde a una funzione $u \in \mathrm{C}^2([0,\pi]\times[0,+\infty))$, soluzione di (5), se f e g soddisfano le seguenti condizioni (oltre alle summenzionate condizioni di compatibilità):

- $f \in \mathrm{C}^2([0,\pi])$, f derivabile tre volte su $[0,\pi]$ con f''' (a quadrato) integrabile su $[0,\pi]$ (per esempio, questo è verificato se f è di classe C^3 a tratti su $[0,\pi]$);
- $g \in \mathrm{C}^1([0,\pi])$, g derivabile due volte su $[0,\pi]$ con g'' (a quadrato) integrabile su $[0,\pi]$ (per esempio, questo è verificato se g è di classe C^2 a tratti su $[0,\pi]$).