Teorema della divergenza – Richiami di teoria
Operatori divergenza e di Laplace

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$.

Divergenza Consideriamo un campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ differenziabile in } \Omega$$

(cioè $\overrightarrow{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ e per ogni $i = 1, \ldots, n$ le funzioni $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$ sono differenziabili in ogni punto di Ω).

L'operatore *divergenza* di $\overrightarrow{F}$ è definito da

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x), \quad x \in \Omega,$$

cioè è la traccia (cioè la somma degli elementi della diagonale principale) della matrice jacobiana $\mathrm{J}\overrightarrow{F}(x)$.

Notare che l'operatore divergenza fa passare

da un campo vettoriale $\overrightarrow{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
a un campo scalare $\mathrm{div}\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}$.

Laplaciano Consideriamo un campo scalare

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f \in C^2(\Omega).$$

L'operatore *Laplaciano* di f è definito da

$$\begin{aligned}\Delta f(x) = \mathrm{div}\,(\nabla f)\,(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x), \quad x \in \Omega,\end{aligned}$$

cioè è la traccia della matrice hessiana $\mathsf{H}f(x)$.

Data $f = f(x, y) \in \mathsf{C}^2(\Omega)$, sia

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\rho, \vartheta) = f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta))$$

la funzione corrispondente a f in coordinate polari. L'operatore corrispondente al Laplaciano in coordinate polari è

$$\Delta f \quad \longrightarrow \quad \Delta \tilde{f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \vartheta^2}.$$

Regolarità di insiemi aperti

Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^1 se soddisfa le seguenti condizioni

- Ω è limitato
- *$\partial\Omega$ si rappresenta localmente come grafico di una funzione di classe* C^1, cioè

$$\forall\, x \in \partial\Omega \quad \exists\, B_r(x) \quad \exists\, f : T \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R},$$
$$T \text{ insieme aperto e } f \in \mathrm{C}^1(T), \text{ tali che}$$

$$\begin{aligned} &B_r(x) \cap \partial\Omega \\ &= \mathrm{graf}(f) \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in T,\; x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}\,. \end{aligned}$$

Analogamente si da' la definizione di aperto di classe C^k, $k \geq 1$.

Versore normale esterno

Sia

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{un aperto di classe } C^1.$$

Allora per ogni $x \in \partial\Omega$ è ben definito il versore (di $\mathbb{R}^n$) normale a $\partial\Omega$ in x, diretto verso l'esterno di Ω, che denotiamo come

$$\nu(x) \qquad \text{versore normale esterno in } x.$$

Chiamiamo *normale esterna* il campo vettoriale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, che è di classe C^0 su $\partial\Omega$.

Esempi:

- se $n = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, quindi

  $\partial\Omega$ è una curva regolare (di classe C^1)
  allora $\nu(x)$ è il versore normale alla curva in x,
  diretto verso l'esterno di Ω

- se $n = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, quindi

  $\partial\Omega$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$
  e $\nu(x)$ è il versore normale alla superficie in x,
  diretto verso l'esterno di Ω

Superficie e integrali di superficie

Sia $\mathcal{S}$ una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ data in forma cartesiana, cioè $\mathcal{S}$ è il grafico di una funzione $f : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ classe C^1:

$$\mathcal{S} = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = f(x, y)\,, \quad (x, y) \in T \Big\}\,.$$

Allora

- per ogni $P = (x, y, z) = (x, y, f(x, y)) \in \mathcal{S}$ il versore normale a $\mathcal{S}$ nel punto P è

  $$\nu(P) = \nu(x, y, f(x, y))$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

- data una funzione

  $$g : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \qquad \text{limitata su } \mathcal{S}, \qquad g = g(x, y, z)$$

  l'<u>integrale di superficie</u> di g su $\mathcal{S}$ è

  $$\iint_{\mathcal{S}} g \, \mathrm{d}S$$

  $$= \iint_T g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  ove

  $$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  è l'*elemento infinitesimo di area della superficie*.

- Sia
$$\overrightarrow{F} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{di classe } C^1.$$
Il *flusso di* $\overrightarrow{F}$ *attraverso* $\mathbb{S}$ è
$$\iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F} \cdot \nu \, \mathsf{d}S$$
con $\cdot$ il prodotto scalare. Quindi usando la rappresentazione cartesiana della superficie (e osservando che la quantità $\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2}$ si elide) si ha la formula per il flusso di una campo vettoriale attraverso una superficie cartesiana
$$\iint_{\mathbb{S}} \overrightarrow{F} \cdot \nu \, \mathsf{d}S$$
$$= \iint_T \overrightarrow{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

Il teorema della divergenza (o teorema di Gauss)

- Sia $n = 2$ o $n = 3$
- sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^1
- sia
$$\overrightarrow{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n \quad \text{un campo vettoriale con}$$
$$\overrightarrow{F} \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$$
cioè $\overrightarrow{F}$ è continuo sulla chiusura $\overline{\Omega}$ di Ω e di classe C^1 in Ω
- sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ la normale esterna al bordo $\partial\Omega$.

Allora
$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{F} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S.$$

Riduzione dimensionale:

Si passa da un integrale in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$)
a un integrale in $\mathbb{R}^{n-1}$!

- se $n = 2$, si passa da un integrale doppio a un integrale curvilineo: notare che
$$\nu \quad \text{è il versore normale (esterno) alla curva } \partial\Omega$$
$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S \quad \text{è l'integrale curvilineo di prima specie}$$
del campo scalare $\varphi = \overrightarrow{F} \cdot \nu$ lungo la curva $\partial\Omega$

- se $n = 3$, si passa da un integrale triplo a un integrale superficiale: notare che
$$\nu \quad \text{è il versore normale (esterno) alla superficie } \partial\Omega$$
$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S \quad \text{è il flusso di } \overrightarrow{F} \text{ attraverso la superficie } \partial\Omega$$

Formula di integrazione per parti

• La riduzione dimensionale è caratteristica di tutte le formule di integrazione per parti: nel caso

$$f,\, g : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{di classe } \mathsf{C}^1 \text{ su } (a,b)$$

si passa da integrali 1-dimensionali a "integrali 0-dimensionali"

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + [f(x)g(x)]_a^b\,.$$

• Dal teorema della divergenza si ricava la seguente

Formula di integrazione per parti.

- Sia $n = 2$ o $n = 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^1
- siano

$$\begin{array}{rlr} u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} & \text{un campo scalare con} & u \in \mathsf{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathsf{C}^1(\Omega) \\ \overrightarrow{v} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n & \text{un campo vettoriale con} & \overrightarrow{v} \in \mathsf{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathsf{C}^1(\Omega) \end{array}$$

Allora

$$\int_\Omega \overrightarrow{v}(x) \cdot \nabla u(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}(\overrightarrow{v}(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nu}\,\mathrm{d}S.$$

... Si dimostra applicando il teorema della divergenza al campo $\overrightarrow{F} = u\overrightarrow{v}$ e osservando che vale la *formula di Leibniz*

$$\mathrm{div}(u\overrightarrow{v}) = \nabla u \cdot \overrightarrow{v} + u\,\mathrm{div}(\overrightarrow{v})$$

Altre formule di integrazione per parti

- Da

$$\int_\Omega \overrightarrow{v}(x) \cdot \nabla u(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\, \mathrm{div}(\overrightarrow{v}(x))\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nu}\, \mathrm{d}S.$$

si ricavano

- formula di integrazione per parti rispetto alla derivata parziale i-esima: dati

  $$u,\, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \qquad \text{campi scalare con} \qquad u,\, w \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}^1(\Omega)$$

  si ha per ogni $i = 1, \ldots, n$

  $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, w\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\, \frac{\partial w}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uw\nu_i\, \mathrm{d}S.$$

  ... Si dimostra applicando la formula di integrazione per parti al campo scalare u e al campo vettoriale $\overrightarrow{v} = w\overrightarrow{e}_i$, con $\overrightarrow{e}_i$ l'i-esimo versore della base canonica di $\mathbb{R}^n$

- formula di integrazione per parti per l'operatore di Laplace: dati

  $$u,\, w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \qquad \text{campi scalari con} \qquad \begin{aligned} u &\in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}^1(\Omega) \\ w &\in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}^2(\Omega) \end{aligned}$$

  si ha

  $$\int_\Omega u\, \Delta w\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\nabla w \cdot \nu\, \mathrm{d}S.$$

  ... Si dimostra applicando la formula di integrazione per parti al campo scalare u e al campo vettoriale $\overrightarrow{v} = \nabla w$, che ha la regolarità giusta essendo $w \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}^2(\Omega)$.
  Si noti che il termine

  $\nabla w \cdot \nu$ viene detto derivata normale di w e denotato come $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$.

  Allora la formula diventa

  $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\, \Delta w\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial \nu}\, \mathrm{d}S.$$