Primi esercizi sulla ricerca di punti di estremo assoluto

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Il teorema di Weierstrass

Sia

$$K \subset \mathbb{R}^N \text{ un insieme compatto}$$

Sia $f : K \to \mathbb{R}$ un campo scalare continuo su K.
Allora f ammette in K almeno un punto di massimo assoluto e almeno un punto di minimo assoluto, cioè

$$\exists\, \overrightarrow{x}_m, \overrightarrow{x}_M \in K \,:\, \forall\, \overrightarrow{x} \in K \qquad \begin{cases} f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{x}_m), \\ f(\overrightarrow{x}) \leq f(\overrightarrow{x}_M). \end{cases}$$

Problema:

Dato $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto e

$$f : K \to \mathbb{R} \text{ differenziabile,}$$

determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f su K.

Procedimento:

1. cerco i punti di estremo (relativo) per f in $\mathrm{int}(K)$
2. cerco i punti di estremo (relativo) per f su ∂K
3. confronto i risultati ottenuti

Passo 1: cerco i pti. di estremo assol. in $\mathrm{int}(K)$

• È un problema di estremi liberi. Infatti, $\mathrm{int}(K)$ è un insieme aperto: per il Teor. di Fermat, se $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(K)$ è un punto di estremo relativo per f, allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Quindi determino tutti i punti di annullamento di ∇f. E li classifico

Passo 2: cerco i pti. di estremo assol. su ∂K

- È un problema di estremo vincolato, del tipo:

Problema

Data $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

determinare i punti (x, y) di estremo per f,
vincolati a verificare $g(x, y) = 0$,

cioè i punti di estremo della restrizione di f all'insieme

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = 0\}$.

Metodo 1 per il problema di estremo vincolato

- esplicitare il vincolo $g(x, y) = 0$ rispetto a x o a y, per esempio $y = y(x)$

- N.B.: il vincolo può comportare delle limitazioni sulla variabile superstite x (x dovrà variare in un opportuno intervallo I)
- sostituire $y = y(x)$ nell'espressione di f: ottengo una funzione

$$h = h(x) = f(x, y(x))$$

- studio estremi relativi di h (nell'intervallo I!!)

- trovo $x_{\min}$ e $x_{\max}$
- trovo $y_{\min}$ e $y_{\max}$

Metodo 2 per il problema di estremo vincolato

- dare l'equazione del vincolo $g(x, y) = 0$ in
forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

- sostituendo l'eq. parametrica in f ottengo una funzione

$$h = h(t) = f(x(t), y(t))$$

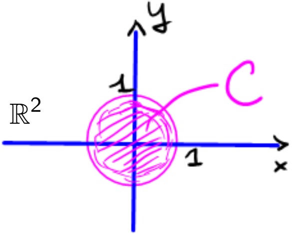
- studio estremi relativi di h (nell'intervallo $[a, b]$!!)
- trovo $t_{\min}$ e $t_{\max}$
- trovo $x_{\min}$ e $x_{\max}$, $y_{\min}$ e $y_{\max}$

.... metodo dei moltiplicatori di Lagrange, metodo delle curve di livello..

Esercizio 1.

Determinare i punti di estremo ASSOLUTO di

$$f(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$



sul compatto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

---

1. Cerco i pti. di estr. rel. in $\mathrm{int}(C)$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ non ammette punti stazionari in } \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \nexists$ punti di estremo in $\mathrm{int}(C)$. I punti di estremo ASS. devono appartenere a ∂C

2. Cerco i pti. di estr. rel. su ∂C, cioè vincolati ad appartenere a

$$x^2+y^2=1 \qquad (*)$$

Metodo 1: non conviene esplicitare in $(*)$ x (o y) in funzione di y (o x), per mancata biunivocità..

$\Rightarrow$ Metodo 2 (eq. parametrica di $(*)$)

$$\begin{cases} x = x(t) = \cos(t) \\ y = y(t) = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Quindi studio i punti di estremo assoluto di

$$h(t) := f(x(t), y(t)) =$$

$$= \cos(t) + \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\cdot\ h'(t) = -\sin(t) + \cos(t) = 0$$

$$\iff t = \frac{\pi}{4} \text{ o } t = \frac{5}{4}\pi$$

$h'(t) > 0$ per $t \in [0, \pi/4) \cup (5/4\,\pi, 2\pi]$

$h'(t) < 0$ per $t \in (\pi/4, 5/4\,\pi)$

- $t_1 = \frac{\pi}{4}$ è punto di MAX. REL. per h
- $t_2 = \frac{5}{4}\pi$ è punto di MIN. REL. per h

Sono punti di estremo assoluto?

Li confronto con $t=0$ e $t=2\pi$

$h(t_1) = \sqrt{2}$

$h(t_2) = -\sqrt{2}$

$h(0) = h(2\pi) = 1$

$\Rightarrow$ t_1 è MAX. ASS. per h

t_2 è MIN. ASS. per h

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x(t_1), y(t_1))$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ è punto di}$$
MAX. ASS. per f

$$M = f(x_1, y_1) = \sqrt{2} \leftarrow$$ VALORE di MAX. ASS

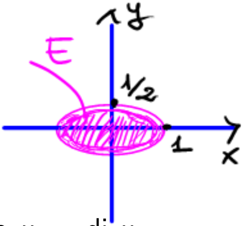
$$\Rightarrow (x_2, y_2) = (x(t_2), y(t_2))$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ è punto di}$$
MIN. ASS. per f

$$m = f(x_2, y_2) = -\sqrt{2} \leftarrow$$ VALORE di MIN. ASS.

Es. 2.

Determinare i punti di estremo ASSOLUTO di

$$u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$



in

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Determinare i valori di minimo $u_{\min}$ e massimo assoluto $u_{\max}$ di u.

Siccome $\sqrt{\cdot}$ è funzione crescente, è equivalente cercare i punti di estremo di

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

In generale, se $u(x,y) = h(f(x,y))$ con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettam. crescente, allora (x_0, y_0) è punto di MAX/MIN. REL (ASS) per f se e solo se lo è per u.

1. Cerco i pti. di estr. rel. in $\mathrm{int}(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+4y^2<1\}$

Punti stazionari

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Classifico immediatamente $(0,0)$:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2+y^2 \geq f(0,0) = 0$

$(0,0)$ è punto di MIN. ASS. per f in $\mathbb{R}^2$, quindi anche in E e anche per u

2. Cerco i pti. di estr. rel. su ∂E. $x^2+4y^2=1$

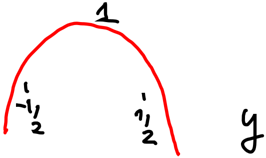
<u>Metodo 1</u>: conviene esplicitare x o y (perché ho "quadrati" sia nel vincolo, sia nella f!)

Per esempio $x = x(y)$:

$$x^2+4y^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1-4y^2 \\ 1-4y^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Studio quindi

$h(y) = f[x(y), y] = 1-3y^2$ per $y \in [-1/2, 1/2]$



$\Rightarrow y_0 = 0$ è punto di mass. ass. per h

$y = \pm 1/2$ sono punti di MIN ASS. per h

ma non mi interessano (ho già determinato il punto di MIN. ASS. per f).

$y_0 = 0$ corrisponde a x tale che

$$x^2 = 1 - 4y_0^2 = 1 - 0 = 1$$

$\Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow$ i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono di MAX. ASS. per f, quindi per u

I valori:

- di MIN. ASS.

$$m = u(0,0) = \sqrt{f(0,0)} = 0$$

- di MAX. ASS.

$$M = u(\pm 1, 0) = \sqrt{f(\pm 1, 0)} = 1$$

Esercizio: per studiare il problema di estremo vincolato, usare l'equazione parametrica dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$:

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \frac{1}{2}\sin(t), \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Mi riduco a studiare i punti di minimo e massimo di

$$\begin{aligned} h(t) &= f\left(\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ &= \cos^2(t) + \frac{1}{4}\sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

....

Esercizio assegnato

Trovare i punti di estremo assoluto di

$$f(x,y) = 7^{xy}$$

ELLISSE

sul ~~triangolo~~ $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + 49y^2 = 1\}$.

Impostazione:

$$f(x,y) = h(g(x,y))$$

con $g(x,y) = xy$ e $h(z) = 7^z$

strett. crescente

$\Rightarrow$ Studio i punti di estremo di $g(x,y)$

Uso l'equazione parametrica di

$x^2+49y^2=1$, cioè

$$\begin{cases} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\frac{1}{7}\sin(t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

$\Rightarrow$ Quindi studio i punti di estremo di

$$h(t)=g(x(t),y(t))=x(t)\cdot y(t)$$
$$=\frac{1}{7}\cos(t)\sin(t)$$
$$=\frac{1}{14}\sin(2t)$$

su $[0,2\pi]$, ... da concludere