Funzioni convesse

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Definizione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice

- convessa se

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2$$

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2)$$

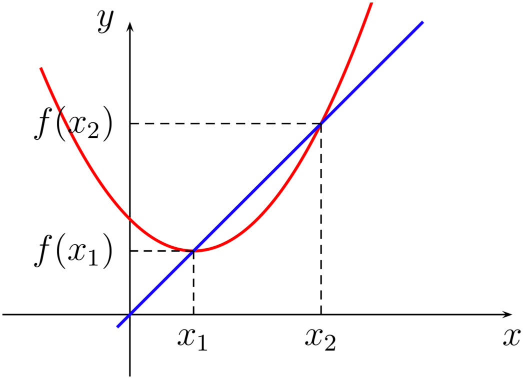
Definizione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice

- convessa se

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2$$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2)$$



Definizione

- $f : I \to \mathbb{R}$ si dice <u>concava</u> se

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2$$

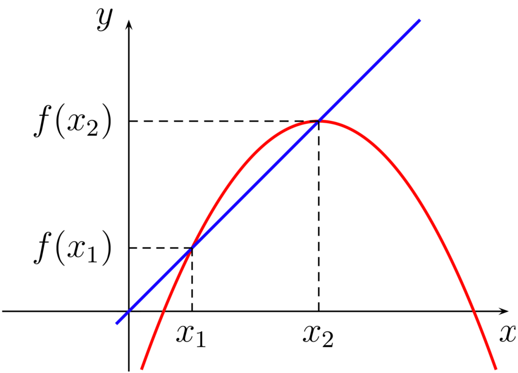
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2)$$

Definizione

- $f : I \to \mathbb{R}$ si dice concava se

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2$$

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2)$$



Definizione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice

- **strettamente** convessa se

$$\forall\, x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2$$

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2)$$

Definizione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice

- **strettamente** concava se

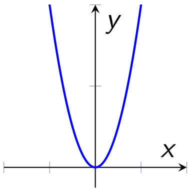
$$\forall\, x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2$$

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2)$$

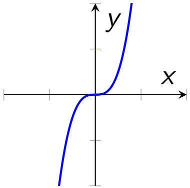
Convessità e concavità di alcune funzioni elementari

Convessità e concavità di alcune funzioni elementari

$f(x) = x^2$

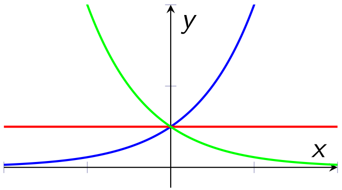


$f(x) = x^3$

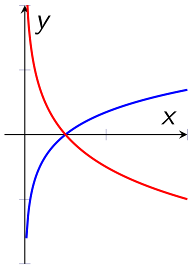


Convessità e concavità di alcune funzioni elementari

Funzione esponenziale:
$f(x) = \alpha^x, \quad \alpha \in (0, \infty)$.



Funzione logaritmo:
$f(x) = \log_\alpha x, \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1$



Proposizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

- f è continua in ogni punto interno a I. Gli unici eventuali punti di discontinuità sono gli estremi dell'intervallo I.
- Se f non è derivabile in un punto interno x, allora x è un punto angoloso.

Convessità e derivabilità

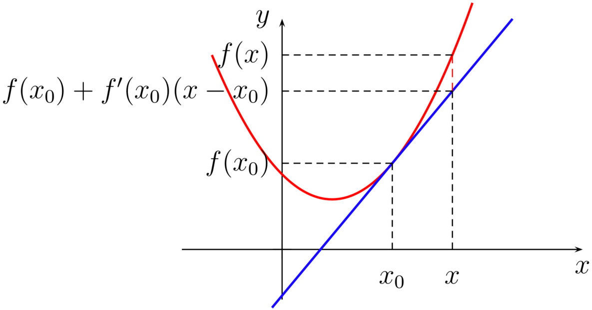
D'ora in poi supporremo che

$$\boxed{f : I \to \mathbb{R} \text{ sia derivabile in } I.}$$

Teorema: caratterizzazione (I) della convessità

f è convessa in I **SE E SOLO SE**

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall\, x,\, x_0 \in I.$$



N.B.: La **retta tangente** è sempre **sotto** il grafico della funzione f, e lo “tocca” nel punto di contatto $(x_0, f(x_0))$.

Corollario: convessità e punti stazionari

Sia

$$\boxed{f : I \to \mathbb{R} \text{ derivabile e convessa in } I.}$$

Sia x_0 un punto stazionario per f. Allora

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in I$$

quindi $x_0 = \min_I f(x)$, cioè x_0 è punto di minimo assoluto per f.

- Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile e concava

Teorema: caratterizzazione (II) di convessità e concavità tramite f'

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile in I. Allora:

1. f convessa su $I \Leftrightarrow f'$ è non decrescente su I,
2. f concava su $I \Leftrightarrow f'$ è non crescente su I.

Teorema: caratterizzazione (III) di convessità e concavità tramite f''

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte in I. Allora:

1. f convessa su $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$,
2. f concava su $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.
3. se $f''(x) > 0 \ \forall x \in I$, allora f è strettamente convessa su I.
4. se $f''(x) < 0 \ \forall x \in I$, allora f è strettamente concava su I.

Applicazione

Ritroviamo analiticamente le proprietà di convessità/concavità delle funzioni elementari.

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di continuità per f in cui $\exists\, f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Diciamo che x_0 è PUNTO DI FLESSO per f se

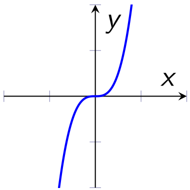
(i) esiste un intorno **destro** di x_0 nel quale f è **convessa** (oppure **concava**)

(ii) esiste un intorno **sinistro** di x_0 nel quale f è **concava** (oppure **convessa**).

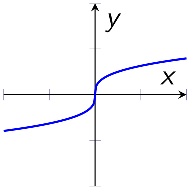
cioè il punto $(x_0, f(x_0))$ separa una regione di convessità da una regione di concavità.

Esempi

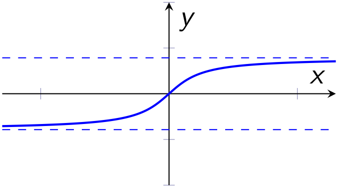
$f(x) = x^3$



$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$



$f(x) = \arctan x$



Proposizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b), e sia $x_0 \in (a, b)$ un *punto di flesso* per f.
Se esiste $f''(x_0)$, allora

$$f''(x_0) = 0.$$

♠ L'annullamento di f'' è condizione NECESSARIA ma NON SUFFICIENTE per avere in x_0 un punto di flesso. Per esempio, sia $f(x) = x^4$.

Si ha $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$, ma $x_0 = 0$ NON è punto di DI FLESSO.