Teorema di De l'Hôpital

La regola di De l'Hôpital è utile per il calcolo dei limiti che si presentano nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema **Siano f e g derivabili in un intorno I di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (eventualmente privato di x_0) con $g'(x) \neq 0$ in $I \setminus \{x_0\}$,**

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema di De l'Hôpital

Il Teorema di De l'Hôpital si applica anche negli altri casi di forme indeterminate.

- $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

- $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

- $0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$ mediante la trasformazione

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \log f(x)}$$

Ci si riporta, tenuto conto della continuità della funzione esponenziale, alle altre forme indeterminate.

Esercizi

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \arctan x}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\tan x - x}$
5. $\lim_{x\to 0^-} (1 - 2^x)^{\sin x}$
6. $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x - 1)}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$
8. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$
9. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n} - 1}$
10. $\lim_{x\to +\infty} (2^n + n!) \sin(4 \arctan n!)$