Derivate

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$
$f : I \to \mathbb{R}$ **è derivabile in** x_0

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$f : I \to \mathbb{R}$ **è derivabile in** x_0 **da sinistra**

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$$

$f : I \to \mathbb{R}$ **è derivabile in** x_0 **da destra**

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

Proprietà delle derivate

Linearità

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

Derivata del prodotto

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Derivata del rapporto

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Derivata della funzione inversa Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua ed invertibile in I. Se esiste $f'(x_0)$ allora esiste $(f^{-1})'(y_0 = f(x_0))$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivata di funzioni composte

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Retta tangente al grafico

Sia $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ un **punto di derivabilità interno a I** per $f : I \to \mathbb{R}$, allora:

- f è continua in x_0,
- il grafico di f è dotato di **retta tangente nel punto** $(x_0, f(x_0))$ e tale retta ha espressione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Osservazione:

$f \quad \textit{continua} \quad \textit{in} \quad x_0 \qquad \not\Rightarrow \qquad f \quad \textit{derivabile} \quad \textit{in} \quad x_0$

Esempio: $f(x) = |x|$

Derivate notevoli (nei punti interni al dominio)

1. $D\,c = 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $D\,x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $D\,a^x = a^x \log a$
4. $D\,e^x = e^x$
5. $D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e \qquad x > 0$
6. $D \log x = \frac{1}{x} \qquad x > 0$
7. $D \sin x = \cos x$
8. $D \cos x = -\sin x$
9. $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$
10. $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$
11. $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
12. $D\, arccot\, x = -\frac{1}{1+x^2}$

Esercizi-Calcolo di derivate

13. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$
14. $f(x) = 12x^3 - 4x$
15. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{2}$
16. $f(x) = x + 2\sin x - e^x$
17. $f(x) = \tan x$
18. $f(x) = \log^2 x$
19. $f(x) = |x|$
20. $f(x) = x \log |x|$
21. $f(x) = x^x$
22. $f(x) = x^{\log x}$
23. $f(x) = e^{\sin \frac{x}{2}}$
24. $f(x) = (\log x)^{\arctan x}$
25. $f(x) = \sin\left(\log(2 + \cos x)\right)$

Esercizi-Calcolo di derivate

26. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
27. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}$
28. $f(x) = \frac{1}{2}\log^2 x - (\log^2 3)\log|\log x|$
29. $f(x) = 2\log|\log(x+2)| + \log(x+2)$
30. $f(x) = \frac{5\log x}{1+\log^2 x} + 3\arctan(\log x)$
31. $f(x) = \frac{x+2}{|\log(x+2)|}$
32. $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \frac{\sqrt{x-7}\log(x-7)}{x} - \frac{1}{x-7}$
33. $f(x) = (x^2-2)e^{-|x|}$
34. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x-1}}$
35. Sia $f(x) = e^{(8-8x)} - 8\log x - x^5$, sia $g = f^{-1}$, calcolare $\frac{1}{g'(0)}$
36. Calcolare $(f^{-1})'(-4)$ con $f(x) = e^{(4arctan(x+1))} + 4x^5 + x$

Punti di non derivabilità

Sia $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ un **punto di continuità e non derivabilità** per $f : I \to \mathbb{R}$. Si assuma:

$$\exists f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \exists f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$$

- x_0 **punto angoloso**

  $f'_-(x_0),\ f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0), \quad$ *almeno una finita*

- x_0 **punto di cuspide**

  $$f'_-(x_0) = \pm\infty,\ f'_+(x_0) = \pm\infty, \quad f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$

- x_0 **punto di flesso a tangente verticale**

  $$f'_-(x_0) = \pm\infty,\ f'_+(x_0) = \pm\infty, \quad f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Punti di non derivabilità

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, sia $x_0 \in I$. **Se sono verificate le ipotesi del teorema del limite della derivata**, si ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \exists f'(x_0) = l$$

Osservazione

$$\exists f'(x_0) \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Esercizi - punti di non derivabilità

Classificare gli eventuali punti di non derivabilità

37. $f(x) = |x|$
38. $f(x) = \sqrt{|x|}$
39. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
40. $f(x) = |\arctan(x-7)^3|$
41. $f(x) = \sqrt{|sin(x-4)|}$
42. $f(x) = \arctan|x^2 - 4|$
43. $f(x) = |\sin(x-7)|(x-7)$
44. $f(x) = \begin{cases} \frac{|\log(x+2)|}{x+2} & x > -2 \\ 1 & x \leq -2 \end{cases}$
45. Studiare continuità e derivabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{7x} & x \geq 0 \\ \alpha x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

Esercizi

46. Studiare continuità e derivabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \left|\arctan \frac{1}{x}\right| & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

47. Studiare continuità e derivabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x|x|^{\alpha} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

48.
- Dire per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $e^x = 1 - x + 2y$ ha una sola soluzione.
- Dimostrare che $y \to x(y)$ è continua e calcolare $x(0)$.
- Dimostrare che $y \to x(y)$ è derivabile e calcolare $x'(0)$.

Esercizi

49. Studiare continuità e derivabilità al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)\sqrt[3]{\sin x} + \beta x & x > 0 \\ (\alpha+1)\sqrt[3]{x} + 7\sin x & x \leq 0. \end{cases}$$

50. Studiare continuità e derivabilità al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(x^2-1) & x > 1 \\ \alpha x^2 + 4x + \beta & x \leq 1. \end{cases}$$

51. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del Teorema di Rolle?

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & x = \pi \\ (\alpha-1)\sin 2x + \alpha^2 - 1 & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Esercizi

52. Per quali $x \in [0, 2]$ sono verificate le ipotesi del Teorema di Rolle?
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x(\log x - \log 2) & x > 0. \end{cases}$$
53. Per quali $x \in [1, 3]$ sono verificate le ipotesi del Teorema di Lagrange?
$$f(x) = 3 + \log x$$
54. Per quali $x \in [1, 5]$ sono verificate le ipotesi del Teorema di Lagrange?
$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$