

L'integrale di Riemann

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Cap. 13
(da pubblicare presto!)

Panoramica

- ▶ Studieremo il **problema dell'integrazione** per funzioni reali di variabile reale. Questo problema è, storicamente, legato al **problema della misura** (calcolare l'area di figure con bordi 'curvilinei').
- ▶ Metteremo in relazione il problema dell'integrazione al **problema della primitiva**.

Parte I – Teoria dell'integrazione

1. Motivazione storica all'introduzione del concetto di integrale.
2. Idee alla base della definizione di integrale di Riemann.
3. Definizione di funzione integrabile e di integrale secondo Riemann.
4. Proprietà delle funzioni integrabili.
5. Classi di funzioni integrabili.

Parte II - I teoremi fondamentali del calcolo

Metteremo in relazione l'integrale con il **problema della primitiva**, cioè:

assegnata una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, determinare (tutte) le funzioni $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

F è detta **primitiva** di f .

$\implies$ daremo il Primo e il

Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Parte III - Tecniche per il calcolo di integrali definiti

Esercizi su:

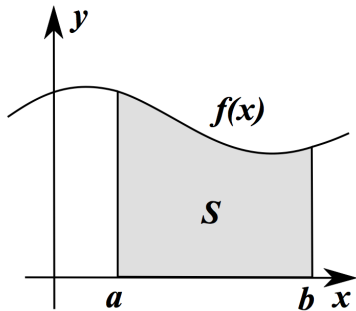
- ▶ integrali immediati
- ▶ formula di integrazione per parti
- ▶ formula di integrazione per sostituzione
- ▶ integrali di funzioni razionali fratte

Motivazioni: calcolo di un'area

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e **positiva**.

Problema

Calcolare l'area A della regione di piano (detta *sottografico* di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x ???



Questo problema ha senso perché suppongo $f \geq 0$. Diversamente, non avrebbe senso parlare di 'sottografico' di f .

Un problema antico..

- ▶ **Archimede di Siracusa** (287 a.C. – 212 a.C.):
metodo di esaustione per il area cerchio/area sottesa da ramo di parabola
- ▶ **P. Fermat** (1636) / **N. Mercator** (1668): metodi ad hoc per area del sottografico di semplici funzioni
- ▶ **I. Newton** (1642–1727) / **G. Leibniz** (1646–1716)/ **J. Bernoulli** (1667–1748): teoremi fondamentali del calcolo integrale $\rightsquigarrow$ legami fra il calcolo di integrali e la ricerca di primitive
- ▶ **G. Riemann** (1826–1866): formalizzazione matematica rigorosa del concetto di funzione integrabile e di integrale



Un procedimento di approssimazione dell'area del sottografico di f

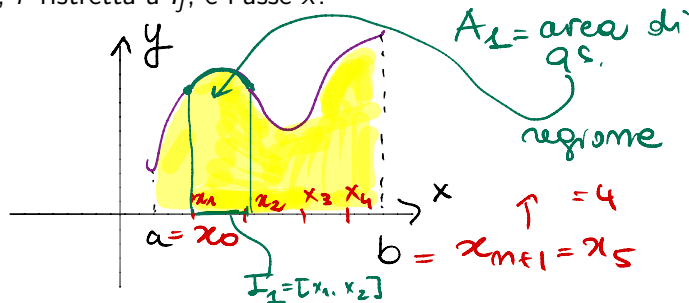
♣ Non è la definizione rigorosa di integrale!!!

■ Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e **positiva**.

(1) Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$:

$$x_0 = a, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Siano $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ e A_j l'area di regione piana compresa fra $\text{graf}(f)$, f ristretta a I_j , e l'asse x .

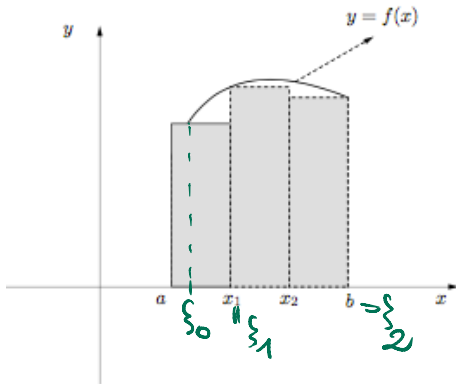


(2) Poiché f è continua, se I_j è "abbastanza piccolo", la variazione di f su I_j sarà "piccola": $\sim f$ costante su I_j . Quindi un'approssimazione dell'area A_j è approssimabile come

$$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

con ξ_j un punto arbitrario di I_j .

Notare che $f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$ è l'area del rettangolo avente come base $(x_{j+1} - x_j)$ e altezza $f(\xi_j)$.



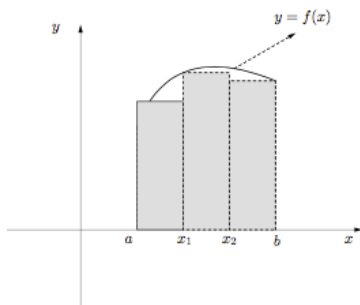
(3) Allora un'approssimazione di A (area del sottografico) è data dalla somma delle approssimazioni delle aree A_j , cioè

$$A \sim \tilde{A} = \sum_{j=0}^n f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

con ξ_j un punto arbitrario di I_j

Ci si aspetta che all'aumentare dei punti di suddivisione di $[a, b]$, il valore $\tilde{A}$ sia un'approssimazione sempre migliore di A .

La definizione di integrale di Riemann formalizza **rigorosamente** queste idee.



Definizione di integrale di Riemann – 1

Siano

IPOTESI DI BASE

- $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (chiuso) e limitato
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, cioè

$$\exists M \geq 0 : \quad \forall x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

Sotto queste **ipotesi di base** daremo la definizione di integrale di Riemann.

(cioè, queste ipotesi **danno senso** a tutte le prossime definizioni.)

N.B.: d'ora in poi, **NON** supporremo che

- f sia continua su $[a, b]$: daremo la definizione di integrale di Riemann per una classe più ampia di funzioni!!
- f sia positiva su $[a, b]$: si perderà l'interpretazione geometrica di integrale $\sim$ area!!

Definizione di integrale di Riemann – 2

Definizioni preliminari

- (1) Diciamo che $D = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

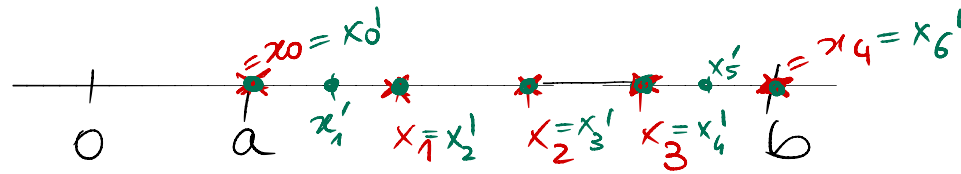
Si ha $[a, b] = \bigcup_{j=0}^n I_j$, $I_j = [x_j, x_{j+1}]$.

- (2) Date due suddivisioni D_1 e D_2 di $[a, b]$, D_2 è più fine di D_1 se

D_2 contiene tutti i punti della suddivisione D_1
 $D_1 \subset D_2$

cioè, ogni punto della suddivisione D_1 è anche un punto di D_2 .

ESEMPIO GRAFICO



$$D_1 = \{ x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b \}$$

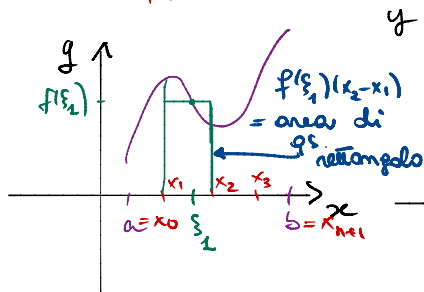
Una suddivisione più fine di D_1 è D_2

$$D_2 = \{ x'_0 = a < x'_1 < x'_2 < x'_3 < x'_4 < x'_5 < x'_6 = b \}$$

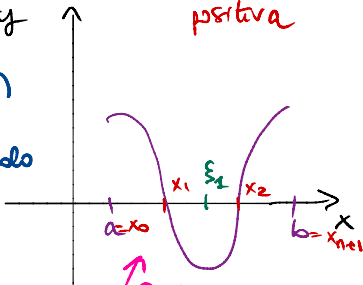
tutti i punti di D_1 sono contenuti in D_2

Definizione di integrale di Riemann – 3

Caso 1: $f \geq 0$



Caso 2: f non può
positiva



Definizioni preliminari

(3) Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diciamo che

qui:
 $f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$
NON è un'area

$$\Sigma(f, D) = \sum_{j=0}^n f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione D .

N.B. La somma di Riemann è legata all'area solo se $f \geq 0$

Definizione di integrale di Riemann – 3

Definizioni preliminari

(4) Poniamo

$$s(f, D) := \sum_{j=0}^n \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

$$S(f, D) := \sum_{j=0}^n \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

$s(f, D)$: **somma inferiore** associata a f e a D

$S(f, D)$: **somma superiore** associata a f e a D .

Osservazioni

(1) Queste **definizioni hanno senso perché f è limitata su $[a, b]$**

In effetti, per ipotesi f è limitata, cioè

$$\exists M > 0 \forall x \in [a, b] : -M \leq f(x) \leq M.$$

In particolare, questo assicura che, per ogni $j = 0, \dots, n$, la restrizione di f a $[x_j, x_{j+1}]$ è inferiormente limitata, cioè

$$\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) > -\infty$$

(infatti, si ha $\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \geq -M$).

$\implies s(f, D)$ è ben definita.

- Con un argomento analogo (**esercizio!**) si vede che $S(f, D)$ è ben definita.

$$s(f, D) = \sum_{j=0}^n \left(\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f \right) (x_{j+1} - x_j) \quad \Sigma(f, D) = \sum_{j=0}^n f(\xi_j) (x_{j+1} - x_j)$$

Osservazioni

$$S(f, D) = \sum_{j=0}^n \left(\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f \right) (x_{j+1} - x_j)$$

(2) Per ogni suddivisione D e per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D)$,

$$s(f, D) \leq \Sigma(f, D) \leq S(f, D) \quad (*)$$

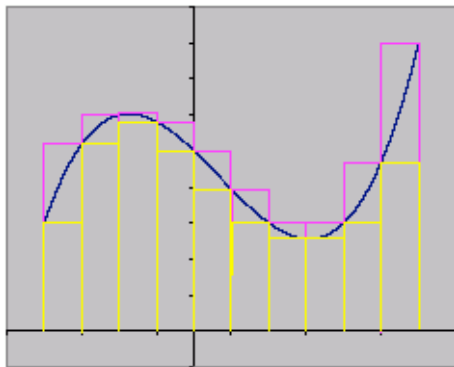
Dimostrazione: Sia $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Per $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, fissiamo un punto $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Allora si ha

$$\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \leq f(\xi_j) \leq \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \quad (**)$$

La disuguaglianza $(*)$ segue sommando $(**)$ per $j \in \{0, \dots, n\}$.

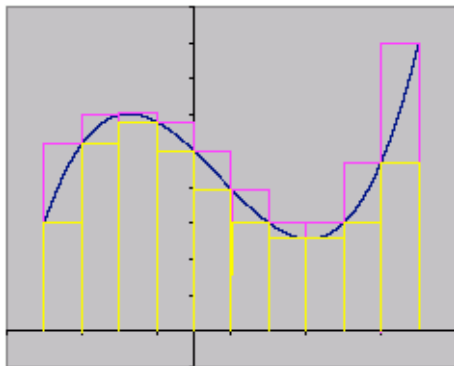
Se $f \geq 0$, allora $s(f, D)$ e $S(f, D)$ assumono un preciso significato geometrico.

Definizione: chiamiamo plurirettangolo un'unione finita di rettangoli, non sovrapposti, con lati paralleli agli assi x e y .



$s(f, D)$ è la somma delle aree dei rettangoli gialli, cioè è l'area del plurirettangolo avente come altezze $\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$

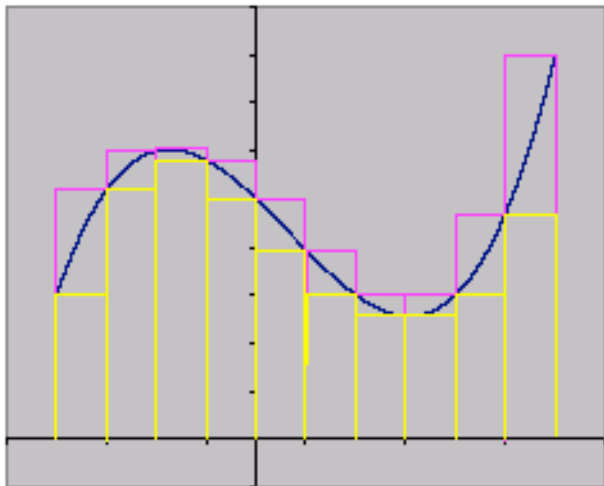
Se $f \geq 0$, allora $s(f, D)$ e $S(f, D)$ assumono un preciso significato geometrico.



Analogam.,
 $S(f, D)$ è l'area
 del pluriret-
 tangolo avente
 come altezze
 $\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$

■ Sia $f \geq 0$ e sia A l'area del sottografico di f . Allora
Per ogni suddivisione D si ha

$$s(f, D) \leq A \leq S(f, D)$$



Conseguenze del confronto fra due suddivisioni...

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e siano D_1, D_2 due suddivisioni di $[a, b]$.
Allora

1. $s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \quad \forall D_1, D_2$

(non lo dimostriamo... abbiamo dimostrato questa proprietà nel caso particolare $D_1 = D_2 = D$)

2. Supponiamo che D_2 sia più fine di D_1 :

$$D_1 \subset D_2$$

Allora

cioè
aggiungendo punti
alle
suddivisioni

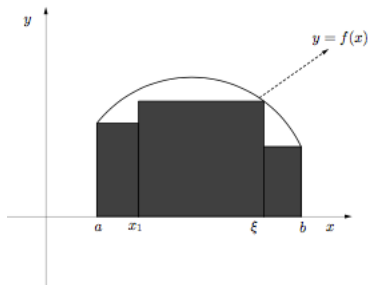
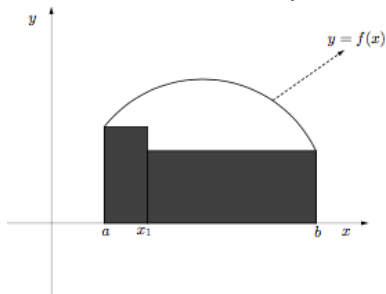
$$s(f, D_1) \leq s(f, D_2)$$

$$S(f, D_2) \leq S(f, D_1)$$

Raffinando la suddivisione di $[a, b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.

(non dimostreremo neppure questa proprietà; ... verifichiamo solo che la somma inferiore cresce al raffinarsi della suddivisione su un esempio grafico..)

Per esempio, supponiamo che D_2 si ottenga aggiungendo un punto a D_1 , e vediamo il comportamento delle somme inferiori



Esercizio: costruire esempi grafici che mostrino che la somma superiore decresce al raffinarsi della suddivisione.

$\uparrow$ se $f \geq 0$

Punto della situazione: ci aspettiamo che l'area del sottografico si ottenga 'prendendo il limite' (in un senso opportuno) delle somme inferiori $s(f, D)$ e delle somme superiori $S(f, D)$ al raffinarsi delle suddivisioni D .

Per le proprietà di monotonia viste, ci aspettiamo che

$\lim s(f, D) = \sup \{ \text{somme inferiori, al variare delle suddivisioni} \}$

$\lim S(f, D) = \inf \{ \text{somme superiori, al variare delle suddivisioni} \}$

al raffinarsi di D , $s(f, D) \uparrow$
al raffinarsi di D , $S(f, D) \downarrow$

Ora formalizziamo queste idee.

Definizione di integrale di Riemann – 4

Definizioni preliminari

(5) Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, definiamo **integrale inferiore** $\mathcal{J}'(f)$ e **integrale superiore** $\mathcal{J}''(f)$ di f su $[a, b]$ i numeri

$$\mathcal{J}'(f) := \sup_D s(f, D) = \sup \{s(f, D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

$$\mathcal{J}''(f) := \inf_D S(f, D) = \inf \{S(f, D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

■ Oss.: f è limitata $\implies \mathcal{J}'(f), \mathcal{J}''(f) \in \mathbb{R}$.

■ Oss.: Si ha che

$$\boxed{\mathcal{J}'(f) \leq \mathcal{J}''(f)}$$

Dimostriamo che

$$\boxed{\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)}$$

Infatti, ricordiamo che per ogni coppia di suddivisioni D_1 e D_2 di $[a, b]$, si ha

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \quad (\star)$$

Poiché D_1 in $(\star)$ è arbitrario, deduciamo che

$$\mathcal{I}'(f) = \sup\{s(f, D_1) : D_1 \text{ sudd. di } [a, b]\} \leq S(f, D_2) \quad (\star\star)$$

per ogni suddivisione D_2 di $[a, b]$.

Siccome anche D_2 è arbitraria in $(\star\star)$, prendendo inf rispetto a D_2 in $(\star\star)$ si ha

$$\mathcal{I}'(f) \leq \inf\{S(f, D_2), : D_2 \text{ sudd. di } [a, b]\} = \mathcal{I}''(f),$$

cioè la tesi.

Definizione di integrale di Riemann – 5

Integrale di Riemann

Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** nell'intervallo $[a, b]$ se

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

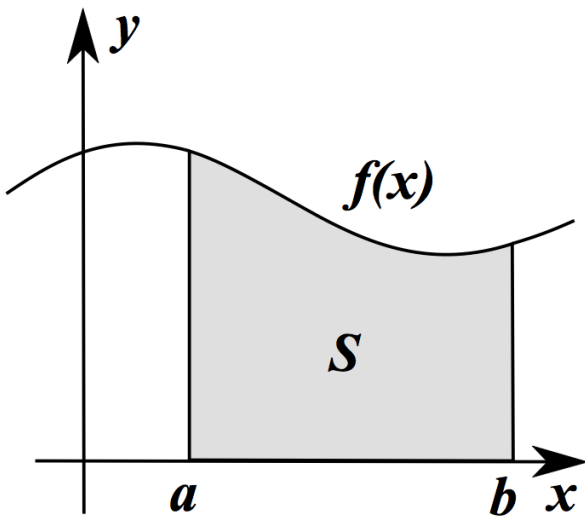
In tal caso scriviamo

$$\int_a^b f(x) dx = \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

e chiamiamo $\int_a^b f(x) dx$ **integrale di Riemann** di f in $[a, b]$ (a e b si dicono *estremi di integrazione*).

Quindi, l'integrale di Riemann è il valore comune fra $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$.

■ Se $f \geq 0$, allora $\int_a^b f(x) dx$ coincide con l'area A della regione di piano tra il grafico di f , l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$.

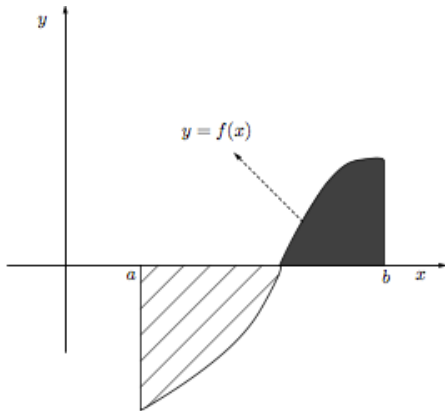


N.B.

L'interpretazione

integrale = area

si perde quando f NON è positiva



Qui $\int_a^b f(x) dx$ è la differenza fra l'area(figura scura) e l'area(figura chiara), e quindi non è più un'area!!

Teorema: condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ t.c.}$$

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

(c)

Inoltre, per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ associata a D_ε si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, D_\varepsilon) \right| < \varepsilon.$$

Questo teorema in particolare assicura che anche le somme di Riemann sono 'buone' approssimazioni di $\int_a^b f(x) dx$

La dimostrazione $\rightarrow$ leggerla voi (PACOTATIVO)

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che (c) è equivalente all'integrabilità secondo Riemann.

1) f integrabile $\Rightarrow$ (c)

IPOTESI $I''(f) = I'(f)$ (e sono entrambi numeri reali)

Ricordo che $I'(f) = \sup \{ s(f, D) \mid D \text{ suddivisione di } [a, b] \}$

Per la caratterizzazione di sup con ε ,

si ha che

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ una suddivisione D'_ε di $[a, b]$ tale che

$$I'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, D'_\varepsilon) \leq I'(f)$$

(N.B. : di fatto, applico la caratterizzazione con ε_2 ;
la disuguaglianza segue dal fatto che $I'(f)$ è $\mathbb{R}$
sup su tutte le suddivisioni)

Analogamente, dalla caratterizzazione di $\inf$ con ε
segue che

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una suddivisione D_ε'' di $[a, b]$ tale che

$$I''(f) \leq S(f, D_\varepsilon'') \leq I''(f) + \varepsilon_2$$

Ora sia $D_\varepsilon' = D_\varepsilon' \cup D_\varepsilon''$ (l'unione delle 2
suddivisioni). Quindi, per costruzione D_ε' è
più fine sia di D_ε' che di D_ε'' , in quanto
 $D_\varepsilon' \subset D_\varepsilon$ e $D_\varepsilon'' \subset D_\varepsilon$.

Ricordo che

- al raffinarsi della suddivisione le somme inferiori aumentano - Quindi avremo

$$I'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, D_{\varepsilon}') \leq s(f, D_{\varepsilon}) \leq I'(f)$$

perché comunque
 $I'(f)$ è il sup su
tutte le
suddivisioni

- al raffinarsi della suddivisione le somme superiori diminuiscono - Quindi

$$I''(f) \leq S(f, D_{\varepsilon}) \leq S(f, D_{\varepsilon}'') \leq I''(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

dove $\int$ è vero perché $I'(f)$ è l'inf in tutte
le suddivisioni

Quindi si ha

$$S(f, D_\varepsilon) \leq I''(f) + \varepsilon_2$$

$$I'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, D_\varepsilon)$$

$$\text{e } I'(f) = I''(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Però

$$0 \leq S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) \leq \cancel{I''(f) + \varepsilon_2} - (\cancel{I'(f) - \frac{\varepsilon}{2}})$$

$$\begin{array}{l} \text{perché somma superiore} \geq \\ \text{somma inferiore} \end{array} = 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cioè (C)

Viceversa, supponiamo che f sia continua su $[a, b]$ e dimostriamo che f è integrabile su $[a, b]$.

È sufficiente osservare che

$$0 \leq I''(f) - I'(f) \leq S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\text{perché} \quad S(f, D_\varepsilon) \geq I''(f) \\ \text{e} \quad s(f, D_\varepsilon) \leq I'(f)$$

Quindi concludiamo che $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \leq I''(f) - I'(f) \leq \varepsilon$$

Da questo si vede facilmente che
 $I'(f) = I''(f)$.

Sia inoltre $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ una generica somma di Riemann associata alla suddivisione D_ε .
 Si ha che

$$\Sigma(f, D_\varepsilon) - \int_a^b f(x) dx$$

$$\leq S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

↓
 per abbiamo usato che

$$\Sigma(f, D_\varepsilon) \leq S(f, D_\varepsilon)$$

e che $\int_a^b f(x) dx = I(f) = \sup_{\text{al valore di } D} \{s(f, D)\}$

quindi $-\int_a^b f(x) dx \leq -s(f, D_\varepsilon)$

Analogamente

$$\int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, \Delta_\varepsilon)$$

$$\leq S(f, \Delta_\varepsilon) - s(f, \Delta_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

per cui

$$\Sigma(f, \Delta_\varepsilon) \geq s(f, \Delta_\varepsilon)$$

e per cui $\int_a^b f(x) dx = I(f) = \inf_D \{ S(f, D) \}$

Per cui

$$\int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, \Delta_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\text{e } \Sigma(f, \Delta_\varepsilon) - \int_a^b f(x) dx \leq \varepsilon$$

Concludiamo che

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, D_\varepsilon) \right| \leq \varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione



Interpretazione geometrica del criterio di integrabilità (se $f \geq 0$)

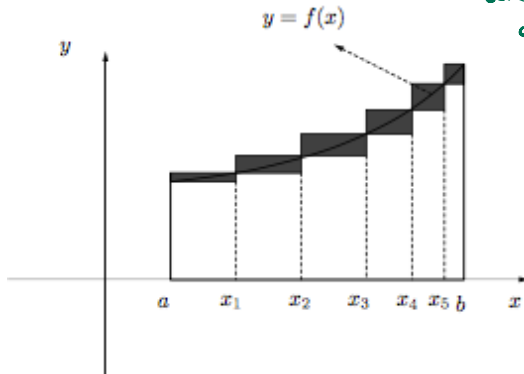
$\forall \varepsilon > 0 \exists D_\varepsilon$ suddivisione di $[a, b]$ t.c. $\underbrace{S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon)}_{\geq 0} \leq \varepsilon$.

lo scarto fra SOMMA SUPERIORE e
SOMMA INFERIORE

di f su D_ε = SOMMA
AREE rettangoli scuri

$s(f, D_\varepsilon)$ = somma
aree rettangolini
bianchi

$S(f, D_\varepsilon)$ = somma
aree rettangolini
bianchi e scuri



Esempio di funzione limitata non integrabile

La funzione di Dirichlet $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio di funzione limitata non integrabile

funzione di
Dirichlet

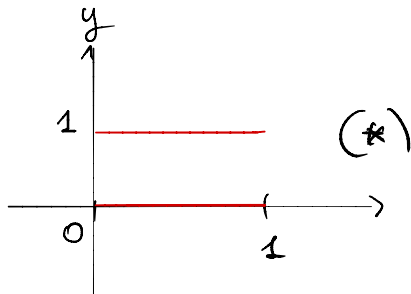
$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora per ogni suddivisione D si ha

$$s(f, D) = \sum_{j=0}^n 0 (x_{j+1} - x_j) = 0, \quad S(f, D) = \sum_{j=0}^n 1 (x_{j+1} - x_j) = 1$$

Grafico della funzione di Dirichlet



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Proprietà di DENSITÀ di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

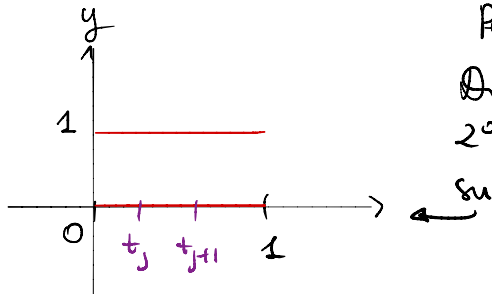
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{Q} : \\ x < z < y$$



Qs. proprietà implica che la fz. di Dirichlet
è DISCONTINUA in ogni punto $x \in [0, 1]$

⇒ non è possibile disegnare il grafico

Il suo grafico assomiglia a (*), che **NON È**
il grafico di una funzione



Per dimostrare che $f(x)$ di Dirichlet non è integrabile.
2° Riemann, ragioniamo

Calcolo le somme (inferiori e superiori) di Riemann associate a una suddivisione $D = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$ di $[0, 1]$

$$\forall j = 0, \dots, m-1,$$

$$\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = 0 \Rightarrow S(f, D) = \sum_{j=0}^{m-1} 0 (x_{j+1} - x_j) = 0$$

$\forall$ suddivisione D di $[0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \bullet \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) &= 1 \Rightarrow S(f, D) = \sum_{j=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{j+1} - x_j) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) = \\
 &= \text{lunghezza di } [0, 1] \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$\forall D$ suddivisione di $[0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow J'(f) &= \sup \{ S(f, D) \mid D, \dots \} \\
 &= \sup \{ 1 \} = 1
 \end{aligned}$$

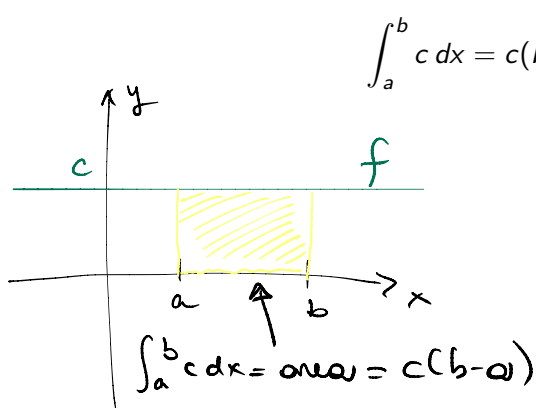
$$J''(f) = \inf \{ \underbrace{S(f, D)}_{=1} \mid D, \dots \} = 1$$

Quindi $\mathcal{I}'(f) = 0 < \mathcal{I}''(f) = 1$ e f non è integrabile secondo Riemann su $[0, 1]$.

Classi di funzioni integrabili

Diamo cioè delle condizioni sufficienti per l'integrabilità..

- (1) Sono integrabili le funzioni **costanti** $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, e il valore del loro integrale di $[a, b]$ è



$$\int_a^b c \, dx = c(b-a).$$

N.B. da ps.
===== formula si
vede subito
che se

NON ($f \geq 0$), allora
 $\int_a^b f(x) \, dx$ può essere
negativo: p.e. $\in \mathbb{R}$ è s,
 $f(x) \equiv -5$ su
 $[a, b] = [1, 2]$

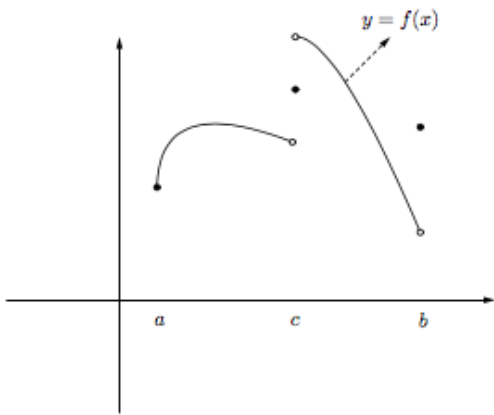
$$\int_1^2 (-5) \, dx = -5 < 0$$

- (2) Sono integrabili le funzioni **continue** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Classi di funzioni integrabili

- (3) Sono integrabili le funzioni **continue a tratti**: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} f(x).$$



Classi di funzioni integrabili

- (4) Sono integrabili le funzioni **monotone**
- (5) Sono integrabili le funzioni **limitate e monotone a tratti**.

Tutte queste condizioni sono **sufficienti**, non necessarie, per l'integrabilità.

che esistono funzioni che sono integrabili
ma non continue;
esistono funzioni che sono integrabili
ma non monotone....

Proprietà dell'integrale

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$f + g, \quad \lambda f, \quad |f| \text{ sono integrabili,}$$
$$\forall [c, d] \subset [a, b] \quad f|_{[c, d]} \text{ è integrabile.}$$

Inoltre:

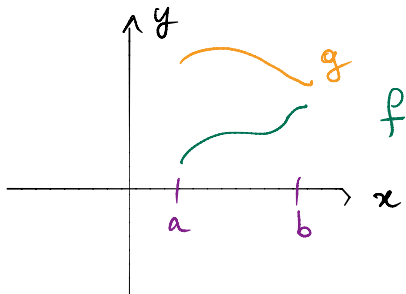
(a) **Proprietà di linearità** : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

(b) **Proprietà di confronto:** se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$,
si ha

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

Interpretazione geometrica: se $0 \leq f(x) \leq g(x)$
 $\forall x \in [a, b]$



$\int_a^b f(x) dx = \text{area}$
sottografico di f

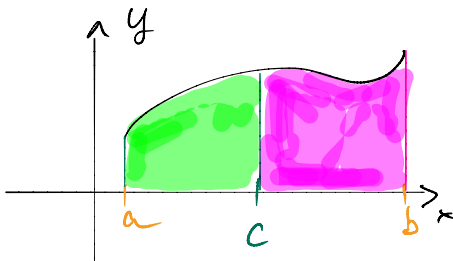
$\int_a^b g(x) dx = \text{area}$
sottografico di g

$f \leq g \Rightarrow$ sottografo di f $\subseteq$ sottografo di g e la sua area è più piccola

(c) Proprietà di additività: $\forall c \in]a, b[$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

Interpretaz. geometrica se $f \geq 0$ su $[a, b]$



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{area sottografo} \\ &= \text{area}(\text{green}) \\ &\quad + \text{area}(\text{pink}) \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

(d) **Confronto con il modulo:**

$$\left| \int_a^b f(x) \right| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

In generale $\int \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$
È FALSO che

Simmetrie

Supponiamo che

$f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $[-a, a]$ intervallo simmetrico rispetto a origine

► Se f è **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$), allora

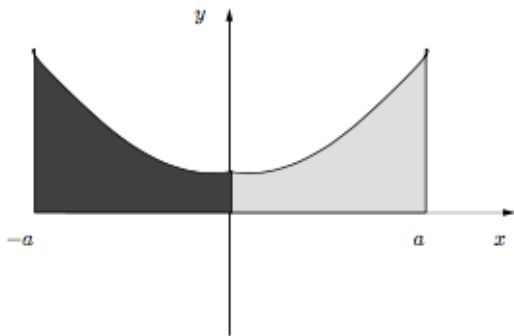
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$= 2 \int_{-a}^0 f(x) dx$$

(perché $\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx$)

non lo dimostriamo, ma lo osserviamo

graficamente, nell'ipotesi (ulteriore)
che $f \geq 0$ su $[-a, a]$



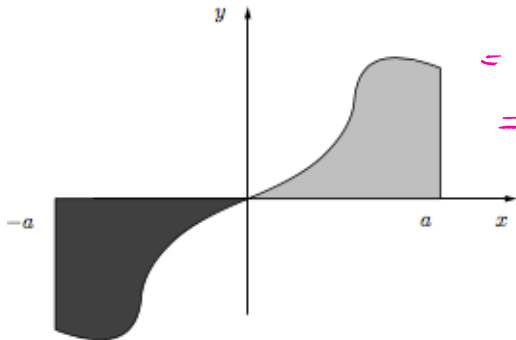
significa che
area (grigia)
= area (nera)

- Se f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$) si ha

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Quindi: $\int_{-a}^a f(x) dx =$
 $= \text{area}(\text{grigia}) - \text{area}(\text{nera})$
 $= 0$

(le 2 aree sono
uguali: x^3
 f è dispari)



Convenzione sui segni

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e siano $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$.

Poniamo

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx := - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

In altre termini, quando scambiamo l'ordine di integrazione, cambia il segno all'integrale

PER ES:
$$\int_7^5 f(x) dx = - \int_5^7 f(x) dx$$

Con questa convenzione abbiamo che

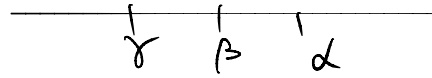
per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

si ha la formula di additività

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

N.B. γ non è più, necessariamente,
intermedio fra α e β

per es. potrebbe essere



Ci servirà estendere l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ al
caso in cui gli estremi di integrazione a e b
verifcano $b < a$

La media integrale

Definizione

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo *media integrale* di f su $[a, b]$ il valore

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. = \frac{\text{integrale}}{\text{ampiezza intervallo}}$$

Teorema della media integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, cioè

$$\exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

N.B. Il teorema della media vale se f è continua. Non basta che f sia integrabile!

N.B. è ben definita solo se f è integrabile!

Dimostrazione

Scriviamo $f \in C^0([a, b])$, per il teor. di Weierstrass f ammette su $[a, b]$ almeno un pto di $\min$ / un pto di $\max$. assoluto.

Siano M e m i valori di massimo/minimo assoluto, rispettivamente -

Quindi

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

↓ per la proprietà di
confronto dell'integrale

$$\text{con } g(x) \equiv M$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \\ = M(b-a)$$

allo stesso modo, da $f(x) \geq m \quad \forall x \in [a, b]$

e dalla proprietà del confronto deduco che

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx = \\ = m(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

Ricordo il teorema dei valori intermedi:

ogni fz continua su un intervallo (chiuso e limitato) assume tutti i valori compresi fra il suo valore di minimo assoluto e il suo valore di massimo assoluto.

Perché

$$M_f = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \in [m, M]$$

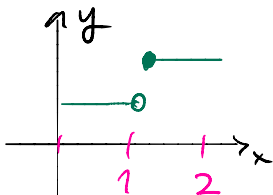
$$\Rightarrow M_f \in \text{im}(f) \quad \text{clo}^-$$

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = M_f$$



■ La condizione che f sia continua **non può essere omessa**:
consideriamo ad esempio la funzione $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Allora

$$M_f = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2},$$

↳ per la proprietà di additività

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2 dx = 2$$

Ma non esiste alcun punto $c \in [0, 2]$ tale che $f(c) = \frac{3}{2}$.

Il problema della primitiva

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, trovare $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile, tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I. \quad (*)$$

(ANTI DERIVATA)

Chiamiamo *primitiva* di f su I ogni funzione

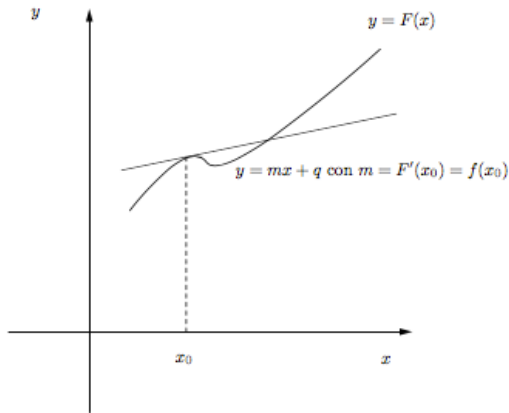
$F : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile, verificante (*).

Esempi

- (1) $f(x) \equiv 1, x \in \mathbb{R} \rightarrow F(x) = x$ è primitiva di f
" " " $F(x) = x + 1$ " " "
- (2) $f(x) = x, x \in \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$, ma anche $F(x) = \frac{x^2}{2} + 58$
- (3) $f(x) = \cos(x), x \in \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \sin(x)$; o anche $F(x) = \sin(x) + e^{5x}$

Interpretazione geometrica

Una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni x_0 la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.

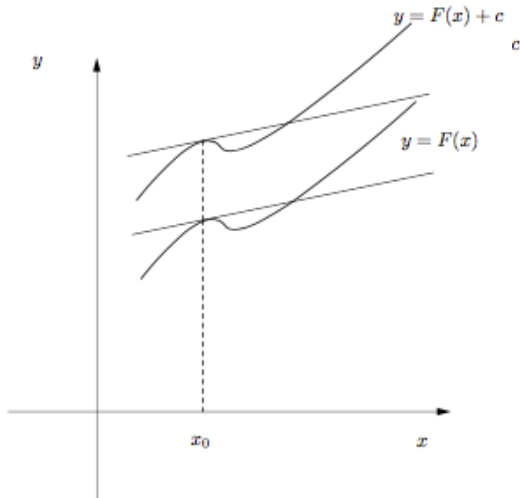


Infatti,
 $f(x_0) = F'(x_0)$, che è
il coefficiente
angolare della
retta tangente
al grafico di
 F in $(x_0, F(x_0))$

Osservazione: non unicità delle primitive

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f ammette una primitiva F su I , allora f ammette di fatto **infinite** primitive su I : si ha che

$\forall c \in \mathbb{R}$ la funzione $x \in I \mapsto F(x) + c$ è una primitiva di f .



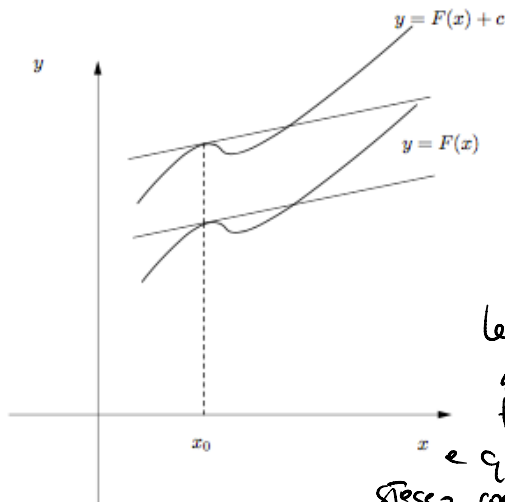
VERO,
poiché

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Osservazione: non unicità delle primitive

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f ammette una primitiva F su I , allora f ammette di fatto **infinite** primitive su I : si ha che

$\forall c \in \mathbb{R}$ la funzione $x \in I \mapsto F(x) + c$ è una primitiva di f .



Geometricamente,

osservo che il grafico di $(F+c)$ si ottiene traslando il grafico di F verticalmente di c .
Le rette tangenti a $\text{graf}(F)$ e al suo traslato sono parallele, e quindi hanno lo stesso coefficiente angolare.

Definizione

Data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo *integrale indefinito* di f (su I) l'insieme di tutte le primitive di f (su I), ammesso che ne esistano. Lo denotiamo con

$$\int f(x) \, dx.$$

N.B.: l'integrale indefinito non è un numero, è un insieme di funzioni

• Abbiamo visto che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare tutte le funzioni del tipo

$$\{F + c : c \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } F \text{ una particolare primitiva di } f.$$

In questo modo otteniamo **tutte le primitive di f** ???

- Questo è **VERO** se f è definita su un intervallo

(Ricordiamo che $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo
se $\forall x, y \in I$, anche tutti i punti $z \in (x, y)$
appartengono ancora a I).

- Questo è **FALSO** se f non è definita su un intervallo

Esempio

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (non è intervallo!)}$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma (con $c_1 \neq c_2$,
in generale)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

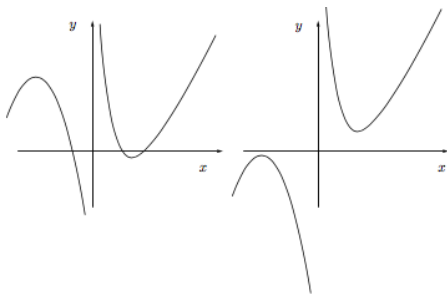
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
costanti arbitrarie

Data

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

il suo integrale indefinito è costituito dalle F

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



♣ Ritorniamo a funzioni **definite su intervalli**.

Proposizione

sia I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, e $F, \tilde{F} : I \rightarrow \mathbb{R}$ due primitive di f sull'intervallo I . Allora esiste

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in I \quad \tilde{F}(x) = F(x) + c.$$

Dimostrazione: Pom'anno

$$H(x) = F(x) - \tilde{F}(x) \quad \forall x \in I.$$

La funzione $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, con

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{d}{dx} (F - \tilde{F})(x) = F'(x) - \tilde{F}'(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Ora possiamo applicare a H

Il teorema della derivata nulla :

Infatti, H è definita su un intervallo !!

Quindi deduciamo che H è costante,
cioè

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in I, H(x) \equiv c$$

Se come $H = F - \tilde{F}$, concludiamo

che
$$F(x) - \tilde{F}(x) \equiv c \quad \forall x \in I$$

e cioè
$$F(x) = \tilde{F}(x) + c \quad \forall x \in I,$$

cioè la tesi.

Corollario: il teorema di struttura degli integrali indefiniti

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F . Allora l'integrale indefinito di f è dato da

$$\int f(x) \, dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\} .$$

Esempio

Una primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

NB ! Scrivere $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

È SBAGLIATO!

Perché $\int x^2 dx$ denota l'insieme di tutte le primitive di x^2 , che sono infinite! Bisogna sempre scrivere

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Osservazioni:

- (1) il calcolo di un integrale indefinito dà come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata f , è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0 , la primitiva assuma un assegnato valore y_0 .

Què, il problema: data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,
trovare $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) & \forall x \in I \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(noto come problema di Cauchy)
ha al più una soluzione.

Osservazioni:

- (2) Vale il teorema di linearità per gli integrali indefiniti: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, per ogni $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

Integrali indefiniti delle funzioni elementari

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c,$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \sin(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + c,$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + c,$$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} dx &= \int (1 + \tan^2(\alpha x)) dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \tan(\alpha x) + c, \end{aligned}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c,$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctan(\alpha x) + c$$

Esempio:

Calcolare la primitiva (**l'unica!**) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di

$$f(x) = x^5 + \frac{1}{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

tale che $F(0) = 3$.

Problema: esistenza di primitive?

Il **primo teorema fondamentale del calcolo** garantisce che, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su I , allora f ammette (infinite) primitive su I .

Definizione

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo *funzione integrale* di f la funzione $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) := \int_c^x f(t) dt \quad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

con $c \in [a, b]$ fissato.

OSSERVAZIONI :

- 1) la funzione A è ben definita perché, per ipotesi, f è integrabile su $[a, b]$, quindi è integrabile su ogni

• l'intervallo $[c, x] \subseteq [a, b]$ (se $c < x$)
 $[x, c] \subseteq [a, b]$ (se $c > x$)

2) Nella definizione

$$A(x) := \int_c^x f(t) dt \quad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

la variabile indipendente x compare
nel secondo estremo di integrazione,
mentre il primo è fisso $= c$.

3) Scriviamo

$$\int_c^x f(t) dt$$

In effetti, la variabile di integrazione è

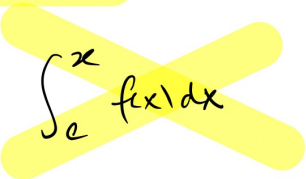
NOTA, posso cambiare il simbolo con
un'altra denota e scrivere

$$\int_c^x f(t) dt = \int_c^x f(s) ds = \int_c^x f(r) dr$$

Ma

È VIETATO

Scrivere


$$\int_c^x f(x) dx$$

Il primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$. Sia $c \in [a, b]$ e sia $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale

$$A(x) := \int_c^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in]a, b[$, e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Quindi f ammette una primitiva (e poi ne ammetterà infinite), è la funzione A .

Dimostrazione~

Preliminarmente osservo che, poiché f è continua su $[a, b]$, f sarà anche integrabile su $[a, b]$. Quindi la funzione integrale A è ben definita -

Dimosteremo che

- 1) $\forall x_0 \in]a, b[$, A è derivabile in x_0
- 2) $A'(x_0) = f(x_0)$

Possiamo quindi $x_0 \in (a, b)$ -

Calcolo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h}$$

PASSO 1

Si ha

$$A(x_0+h) - A(x_0) \stackrel{\text{per la definizione di } A}{=}$$

$$= \int_c^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt \stackrel{\text{proprietà additiva di } \int}{=}$$

$$= \int_c^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Quindi

$$\frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Caso 1 Se $h > 0$,

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

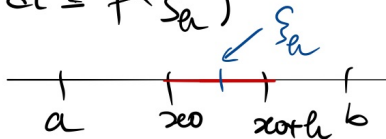
è la media integrale
di f su $[x_0, x_0+h]$



Perché f è continua, posso applicare il
Teorema della media integrale.

Quindi $\exists \xi_h \in [x_0, x_0+h]$ tale che

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(\xi_h)$$



Caso Se $h < 0$,

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = -\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$$



Applico il teorema della media a

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$$

Concludo che $\exists \xi_h \in (x_0+h, x_0]$



tale che $f(\xi_h) = \frac{1}{x_0 - (x_0+h)} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$

$$= -\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$$

(infatti la media integrale di f su $[x_0+h, x_0]$
è $-\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$)

Quindi anche per $h < 0$ trovo che

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = -\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt = f(\xi_h)$$

per un certo $\xi_h \in [x_0+h, x_0]$

In conclusione, $\exists \xi_h$ tale che

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(\xi_h) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \xi_h \in [x_0, x_0 + h] & \text{se } h > 0, \\ \xi_h \in [x_0 + h, x_0] & \text{se } h < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x_0)$$

perché, per $h \rightarrow 0$, si ha che $\xi_h \rightarrow x_0$, e la funzione f è continua in x_0 (ricordare la caratterizzazione della continuità tramite limiti di successioni).

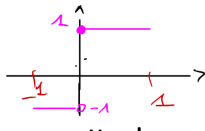
Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$$

$\forall x_0 \in]a, b[.$

■ Come per il teorema della media, anche qui l'ipotesi di continuità su f è fondamentale: la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



è integrabile in quanto continua a tratti, ma **non ammette alcuna** primitiva. Cioè non esiste alcuna funzione derivabile

$F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Infatti, se F soddisfa $(*)$, allora si ha

$$F'_+(0) = 1, \quad F'_-(0) = -1.$$

e quindi F non è derivabile in $x = 0$.

Corollario del Primo Teorema fondamentale del calcolo

Le funzioni continue f su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva.

Tutte e sole le primitive di f si ottengono aggiungendo una costante arbitraria a

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

dove a è un elemento di I : quindi

processo di integrazione $\Rightarrow$ primitive di una funzione continua

Il secondo teorema fondamentale del calcolo

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f .

Osservazione:

primitive di una funzione continua $\Rightarrow$ calcolo di integrali

(non si passa attraverso la definizione di integrale: somme superiori e inferiori!!)

Notazione: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

Dimostrazione del secondo teorema fondamentale del calcolo

Per il primo teorema fond. del calc.
(che posso applicare, perché f è continua su I), la funzione integrale

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

è una primitiva di f .

Per il teorema di struttura dell'integrale improprio,

tutte le primitive di f differiscono per una costante.

Sia F un'altra primitiva di f :

$\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in [a, b]$

$$F(x) = A(x) + c$$

$$= \int_a^x f(t) dt + c \quad (*)$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

Ora sceglio $x = a$:

$$F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t) dt + c}_{=0}$$

$$\Rightarrow c = F(a).$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt + F(a), \quad \forall x \in [a, b].$$

Ora sceglio $x = b \Rightarrow$

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + F(a)$$



