Equazioni differenziali

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Introduzione ed esempi

Le equazioni differenziali ordinarie sono equazioni in cui:

- l'incognita è una funzione $y : I \to \mathbb{R}$ per convenzione, I è un intervallo
- si stabilisce un un legame tra
  - y funzione incognita
  - le derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$ di y

Useremo l'acronimo:

$$\boxed{\text{E.D.O.} = \text{Equazione Differenziale Ordinaria.}}$$

ORDINARIA: la funzione incognita è una fz. della sola variabile x

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI: la fz. incognita è una funzione di PIÙ VARIABILI

Esempio 1

$$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

L'incognita è la funzione $y: I \to \mathbb{R}$, $y = y(x)$

- È una E.D.O. del primo ordine:

è una relaz. fra y, x, e y'; l'ordine massimo di derivazione della fz incognita è 1

- Si usa anche la scrittura $y' = x + \arctan y$.

Esempio 2

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

l'ordine massimo di derivazione della fz. incognita z è 2

- È una E.D.O. del secondo ordine:
- Si scrive anche $z'' + 2z' + z = \sin t$.

Esempio 3

Il problema della primitiva: *sia* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo aperto; data* $f : I \to \mathbb{R}$, *trovare* $y : I \to \mathbb{R}$, *derivabile, tale che*

$$\boxed{y'(x) = f(x)} \qquad \forall\, x \in I\,. \qquad (\mathrm{EDO}_1)$$

Chiamiamo primitiva di f *su* I *ogni funzione* y *derivabile, verificante la* (EDO_1).

Osservazioni:

- (EDO_1) è una (particolare) eq. diff. ord., di ordine 1, che si risolve tramite integrazione
- teor. di struttura dell'integrale indefinito: ✓ VALE se I è INTERVALLO

$$\int f(x)dx = y(x) + c, \ \text{con} \quad \begin{array}{ll} y & \text{particolare soluz. di } (\mathrm{EDO}_1) \\ c & \text{costante arbitraria in } \mathbb{R} \end{array}$$

cioè la E.D.O. (EDO_1) ammette **infinite soluzioni**, parametrizzate da una costante $c \in \mathbb{R}$.

- Per determinare <u>una e una sola</u> soluzione a $\underbrace{(\mathrm{EDO}_1)}$,

$$y'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

si deve assegnare un'ulteriore condizione.
Per esempio, una **condizione di Cauchy**, cioè

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{con } x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

- Allora il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette **una e una sola soluzione**.

N.B. Già a livello del problema della primitiva, avevamo osservato che per selezionare una e una sola primitiva è sufficiente imporre $y(x_0) = y_0$

$(F(x_0) = y_0)$

Generica E.D.O. del prim'ordine (in forma normale)

N.B.

f è una fz. di 2 VARIABILI

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$$

cioè $y'(x)$ è isolata, ed è scritta come funzione di x e di $y(x)$

- il suo $\boxed{\text{integrale generale}}$ = insieme di tutte le soluzioni dipende in generale da **una costante arbitraria**;
- il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su f ammette un'unica soluzione (definita in un intervallo contenente x_0).

Per una E.D.O. del **secondo ordine (in forma normale)**

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \qquad (\mathrm{EDO}_2)$$

esprimo y'' come fz di x, $y(x)$, $y'(x)$; f è una fz di 3 VARIABILI

- l' $\boxed{\text{integrale generale}}$ = insieme di tutte le soluzioni della E.D.O. (EDO_2) dipende in generale da **due costanti arbitrarie**;

- per determinare una e una sola soluzione di (EDO_2) si deve imporre che la soluzione soddisfi ulteriormente due condizioni, infatti il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su f, ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente x_0).

Generica E.D.O. di ordine n:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (\mathrm{EDO}_n)$$

che **in forma normale si scrive**

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \qquad (\mathrm{EDO}_n)$$

N.B. f è una fz. di $(n+1)$-variabili

- la **derivata di ordine massimo** della funz. incognita y è la derivata n-esima $y^{(n)}$;
- la E.D.O. stabilisce un legame fra y e le sue derivate $y', \dots, y^{(n)}$
- l'integrale generale dipenderà da n costanti arbitrarie $\rightsquigarrow$ necessarie n condizioni per determinare una e una sola soluzione

- Problema di Cauchy per (EDO_n) (**in forma normale**):

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

n condizioni

sotto opportune condizioni su f, esso ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente x_0).

Noi ci occuperemo di

- equazioni del primo ordine (eq. a variabili separabili ed eq. lineari a coefficienti continui)
- equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Quindi d'ora in poi considereremo solo i casi **n = 1** oppure **n = 2**.

Un esempio dalla meccanica

Se un punto P di massa m si muove soggetto ad una forza F, allora la seconda legge di Newton afferma che

$$\boxed{m\,y''(t) = F(t, y(t), y'(t))}$$

dove

- $y(t)$ indica la posizione di P al tempo t,
- $y'(t)$ è la sua velocità,
- $y''(t)$ è la sua accelerazione.

Interpretaz meccanica:

nel tempo t_0 (iniziale) prescrivo POSIZIONE INIZ. E VELOCITÀ INIZIALE

Condizioni di Cauchy:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Un esempio dalla meccanica

Se la forza F è dovuta alla **gravità**,

$$F(t, y, y') = -mg$$

allora si ha

$$m\, y''(t) = -mg,$$

dove g è l'accelerazione di gravità

(E.D.O. lineare di ordine 2 a coeff. cost.), con soluzione

$$y(t) = -\frac{g}{2}\, t^2 + \overbrace{y'(0)}^{\text{VELOCITÀ INIZIALE}}\, t + \underbrace{y(0)}_{\text{POSIZIONE INIZIALE}}$$

In questo caso la funzione y descrive la caduta libera.

Un esempio dalla biologia (dinamica delle popolazioni)

Il modello di Malthus (1798)

descrive l'evoluzione temporale di una popolazione isolata in cui gli unici fattori di evoluzione sono la fertilità e la mortalità. Siano:

- $N(t) \geq 0 \rightsquigarrow$ numero di individui presenti al tempo t,
- $\lambda \rightsquigarrow$ tasso di natalità per unità di tempo
- $\mu \rightsquigarrow$ tasso di di mortalità per unità di tempo

(λ e μ costanti in t). Allora la variazione di individui nel tempo h è

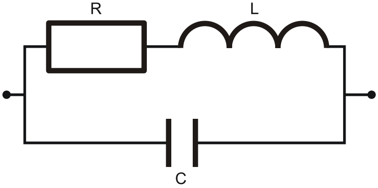
$$\underbrace{N(t+h) - N(t)}_{h} = \underbrace{\lambda N(t)\cancel{h} - \mu N(t)\cancel{h}}_{\cancel{h}}.$$

Al limite per $h \to 0$ si ha l'**eq. a variabili separabili**

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t)\,.$$

Un esempio dalla teoria dei circuiti

In un circuito con resistenza R, induttanza L, e con un condensatore di capacità C,



la carica q dell'armatura a potenziale maggiore, come funzione del tempo $t \mapsto q(t)$, soddisfa l'E.D.O. lineare di ordine 2 a coeff. cost.

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0\,.$$

Risolvendola, si può studiare il modo in cui varia l'intensità di corrente che circola a spese della scarica del condensatore.

Equazioni a variabili separabili

Sono E.D.O. del tipo

$$\boxed{y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))}$$

Osservazione: è una E.D.O. del prim'ordine $y'(x) = f(x, y(x))$, in cui la funzione f è della forma

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

cioè prodotto di una $\underline{\text{funz. della sola } x}$ e di una $\underline{\text{funz. della sola } y}$ (le variabili x e y sono $\underline{\text{separate}}$).

Es. 1

$$y'(x) = x \ln(x) \qquad (*)$$

è un'eq. a variabili separabili:

$$y'(x) = g(x)\, h(y(x))$$

<u>Qui</u>:

$$g(x) = x \log(x)$$

$$h(y) \equiv 1$$

In realtà, risolvendo $(*)$ trovo tutte le primitive di $g(x) = x \log(x)$. In generale, il "problema della primitiva"

$$y'(x) = g(x)$$

(cioè trovare tutte le primitive di un'assegnata

funzione g) è una particolare equazione
a VARIABILI SEPARABILI
(in cui $h(y) = 1$)

Es. 2

$$y'(x) = x^2 \sin(y(x))$$

è un'equazione a VARIABILI SEPARABILI:

$$y'(x) = f(x, y(x)) = g(x)\, h(y(x))$$

$$\text{con} \begin{cases} g(x) = x^2 \\ h(y) = \sin(y) \end{cases}$$

N.B. $\qquad y'(x) = x^2 + \sin(y(x))$

NON è a VARIAB. SEPARABILI: la somma "mischia" le variabili

$y'(x) = g(x)\, h(y(x)) = f(x, y(x))$

D'ora in poi, cambio di notazione: $h \rightsquigarrow f$.

Ipotesi

I, J intervalli aperti,

$$g : J \to \mathbb{R} \text{ continua su } J, \quad f : I \to \mathbb{R} \text{ continua su } I,$$

e consideriamo il $\boxed{\text{problema di Cauchy}}$

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{con } x_0 \in J \text{ e } y_0 \in I.$$

Metodo della separazione delle variabili

è un procedimento di risoluzione (formale, ma può essere rigorosamente giustificato) per

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(1) usiamo la notazione $y' = dy/dx$, sicché la E.D.O. si riscrive come

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x).$$

(2) Questo suggerisce di "separare le variabili", cioè
- divido **(formalmente!)** entrambi i membri per $f(y)$
- moltiplico **(MOLTO formalmente!)** entrambi i membri per dx

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\,g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx \cdot f(y)} = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx$$

(3) Quindi arriviamo a

$$\frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx.$$

A questo punto, mi dimentico che y è una funzione della variabile x!
Tratto y come se fosse una variabile indipendente, alla stregua della x

Quindi $\frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx$

è un'uguaglianza fra una fz. della sola y
e una funzione della sola x.
In realtà, ho scritto
Da questa identità deduco un'identità
fra i rispettivi INTEGRALI INDEFINITI
(cioè gli insiemi delle primitive!!)
Per scrivere l'identità fra gli integrali
indefiniti, cambio nome alle variabili
di integrazione:

$$y \rightsquigarrow z$$
$$x \rightsquigarrow s$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{f(z)}\,dz = \int g(s)\,ds$$

(4) Integro entrambi i membri, quindi

$$\boxed{\int \frac{1}{f(z)}\,dz = \int g(s)\,ds,} \tag{1}$$

che fornisce l'**integrale generale** della E.D.O. $y' = f(y)g(x)$.
Notare che (1) dipende da una costante arbitraria.

Per selezionare fra tutte le soluzioni quella che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y)\,g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P)$$

,

passo a calcolare gli integrali definiti

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\,dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

Questa formula fornisce la soluzione del pb. di Cauchy (P)

OSSERVAZIONI

1] dovevo cambiare il nome alle variabili di integrazione, perché uso $x \mid y(x)$ negli estremi di integrazione

(5) Impongo la condizione di Cauchy $y(x_0) = y_0$, ottenendo la **formula risolutiva** del problema di Cauchy

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds.$$

(6) Quindi il metodo della separazione delle variabili comporta *due integrazioni nelle variabili y e x separatamente.*

La formula risolutiva di $\begin{cases} y'(x) = g(x)\, f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds}$$

Qui compare la soluzione $y(x)$, in forma implicita

Sia $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z)$ una primitiva di $\dfrac{1}{f(z)}$:

$$\mathcal{L}'(z) = \frac{1}{f(z)}$$

Per il 2° T.F.C.

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz = \Big[\, \mathcal{L} \,\Big]_{z=y_0}^{z=y(x)}$$

Allora la formula scritta diventa

$$\mathcal{L}(y(x)) - \mathcal{L}(y_0) = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(y(x))}_{\substack{\parallel \\ \mathcal{L} \text{ calcolata in } y(x)}} = \underbrace{\mathcal{L}(y_0)}_{\text{costante}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds}_{\substack{\text{fz. integrale della } g, \\ \text{valutata fra } x_0 \text{ e } x}}$$

$\Rightarrow$ se so invertire $\mathcal{L}$, allora

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right)$$

cioè ricavo l'espressione esplicita di y!

La formula risolutiva

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds} \tag{2}$$

Osservazioni

(1) Supponiamo che ℓ sia una primitiva di $\frac{1}{f}$. Allora, per il secondo teor. fond. del calcolo si ha

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz = [\ell]_{y_0}^{y(x)} = \ell(y(x)) - \ell(y_0).$$

Allora (2) diventa $\ell(y(x)) - \ell(y_0) = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$, da cui

$$\ell(y(x)) = \ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$$

che dà la funzione $y = y(x)$ **in forma implicita** (si deve invertire ℓ..)

(2) Cosa succede se $\boxed{f(y_0) = 0}$? Allora la funz. $\frac{1}{f}$ ha un asintoto verticale in y_0, quindi

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\, dz \quad \text{non ha senso come integrale di Riemann...}$$

MA: Se $\boxed{f(y_0) = 0}$, allora la funzione <u>costante</u>

$$y(x) \equiv y_0$$

è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x))g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Sono E.D.O. della forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{per ogni } x \in I$$

con

$$I \text{ intervallo}, \ a, b : I \to \mathbb{R} \text{ funzioni continue su } I$$

Os. non è a VARIABILI SEPARABILI, in generale: in forma normale è $\boxed{y'(x) = b(x) - a(x)y(x)}$

non posso separare x e y

Formula risolutiva

Il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

Sia $A : I \to \mathbb{R}$ tale che $\boxed{A'(x) = a(x) \ \ \forall x \in I}$.

N.B.: a questo livello, A è una qualsiasi PRIMITIVA di a

Moltiplichiamo entrambi i membri della E.D.O. per la funz. $x \in I \mapsto e^{A(x)}$, ottenendo

$$y'(x)e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y(x) = b(x)e^{A(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$y'(x)e^{A(x)} + \underbrace{A'(x)e^{A(x)}}_{= \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}\right)} y(x) = b(x)e^{A(x)}$$

Quindi a SINISTRA ho

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{A(x)}\right] \quad !$$

Ottengo

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{A(x)}\right) = b(x)e^{A(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{d}{ds}\left(y(s)e^{A(s)}\right)ds = \int b(s)e^{A(s)}ds$$

Per risolvere il problema di Cauchy: $y(x_0)=y_0$, calcolo gli integrali definiti

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{ds}\left(y(s)e^{A(s)}\right)ds = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}ds$$

$\Downarrow$ 2° Teor. fondam. CALCOLO

$$\left[y(s)e^{A(s)}\right]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}ds$$

$$\Updownarrow$$

N.B $y(x_0)=y_0$

$$y(x)e^{A(x)} - y(x_0)e^{A(x_0)} = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}ds$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x)e^{A(x)} = y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}ds$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}ds\right]}$$

Per *risolvere il problema di Cauchy*,

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall\, x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

imponiamo la condizione di Cauchy $\boxed{y(x_0) = y_0}$, da cui

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left[e^{A(x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right].} \tag{5}$$

(1) **Osserviamo che** A è, fin qui, *una delle infinite* primitive di a, che dipendono da una costante arbitraria c. Si verifica facilmente che, in (5), la soluz. y **non dipende da** c.

Se sostituite ad $A(x)$ la funzione $\tilde{A}(x) = A(x) + c$,
il membro di DS non cambia

(2) Per "comodità", scegliamo la primitiva A di a tale che $A(x_0) = 0$, cioè

$$\boxed{A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}.$$

$\Rightarrow e^{A(x_0)} = 1$

$A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} a(s)\,ds = 0$

La formula risolutiva diventa

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\,ds \right]$$

[basta moltiplicare l'equazione per $e^{A(x)}$ con $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$]

(3) Allora otteniamo la formula risolutiva

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s)\, ds \right]} \text{ con } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$$

che si riscrive come

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds \right) \times \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{s} a(r)\, dr \right) b(s)\, ds \right].$$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono E.D.O. della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \tag{6}$$

con $\boxed{a, b \in \mathbb{R}}$ e $\boxed{f : I \to \mathbb{R} \text{ funzione continua}}$ (*termine forzante*).

Equazione omogenea associata a (6)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$$

Per confronto, (6) viene anche detta *equazione completa*.

Problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \ \forall\, x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{7}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

L'equazione $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$

ammette infinite soluzioni, parametrizzate da 2 costanti arbitrarie.

Il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.

FONDAMENTALE: proprietà (di linearità) dell'equazione

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni di

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I,$$

allora

$$\boxed{v(x) = y_1(x) - y_2(x) \text{ risolve}}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$$

Infatti, supponiamo che y_1 e y_2 siano soluzioni dell'equazione, cioè

$$y_1''(x) + a\,y_1'(x) + b\,y_1(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$y_2''(x) + a\,y_2'(x) + b\,y_2(x) = f(x) \qquad (2)$$

Sottraendo (2) da (1) otteniamo che

$$y_1''(x) - y_2''(x) + a\,y_1'(x) - a\,y_2'(x) + b\,y_1(x) - b\,y_2(x) = 0$$

cioè la funzione

$$v(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

risolve

$$v''(x) + a v'(x) + b v(x) = 0$$

cioè $v = y_1 - y_2$ risolve l'equazione omogenea

♣ **Quindi:** date <u>due qualunque</u> soluzioni $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ di

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I,$$

si ha che

$$y_1(x) = v(x) + y_2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ con } v \text{ soluz. dell'omogenea}$$

Quindi: una qualsiasi soluzione dell'equazione completa si ottiene prendendo una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea e sommandole una (particolare) soluzione dell'equazione completa.

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad \text{(EQ}_{\text{comp}}\text{)}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \qquad \text{(EQ}_{\text{omog}}\text{)}$$

Teorema di struttura per l'integrale generale di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$

cioè l'insieme delle soluzioni

integrale generale di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$

$=$ integrale generale di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$ $+$ soluz. particolare di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$

cioè, la generica soluzione y di $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$ è data da

$$y(x) = v(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I, \text{ con } \begin{array}{ll} v & \text{generica sol. di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}), \\ y_p & \text{sol. particolare di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}). \end{array}$$

Osservazione importante: $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$, $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}})$ sono equazioni del second'ordine: il loro integrale generale sarà parametrizzato da **due costanti arbitrarie**.

Strategia per risolvere

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \; \forall \, x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{8}$$

1. Determinare l'integrale generale (cioè **tutte le soluzioni**) dell'equazione <u>omogenea</u> associata.
2. Determinare **una soluzione particolare** y_p dell'equazione <u>completa</u>; in questo modo si otterrà l'integrale generale dell'equazione completa, dipendente da **due costanti arbitrarie**.
3. Imponendo le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

si determinano anche le costanti corrispondenti all'**unica soluzione** del problema di Cauchy (8).

Risoluzione dell'equazione omogenea

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Si risolve non tramite integrazione, ma con un processo risolutivo algebrico, considerando l'associata **equazione caratteristica**

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

$\rightsquigarrow$ tre casi:

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

[Caso 1:] **esistono due soluzioni reali e distinte** λ_1 e λ_2 (caso $a^2 - 4b > 0$),
allora l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$ è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

[Caso 2:] **esiste ammette una sola soluzione reale λ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), allora l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$ è

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

[Caso 3:] **L'eq. ammette due soluzioni complesse coniugate** $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), allora l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

Esempio

$$y'' - 4y = 0$$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni particolari dell'equazione completa

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$$

Ci sono due metodi per determinare una soluzione particolare:

1. il metodo della variazione delle costanti
2. il metodo "ad hoc" (detto anche metodo di somiglianza o di similarità)

Esamineremo il problema nel caso in cui il termine forzante f è del tipo

$$\begin{cases} f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ o} \\ f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, R_k polinomio di grado k

Esempi:

$f(x) = x^2 e^x$

con $R_k(x) =$ $R_2(x) = x^2$

$\alpha = 1$

$\beta = 0$

$f(x) = x$

con $R_k(x) =$ $R_1(x) = x$

$\alpha = \beta = 0$

Esempi:

$f(x) = \sin 2x$

con $R_k(x) =$ $R_0(x) = 1$

$\alpha = 0$ $\beta = 2$

$f(x) = x^3 e^{2x} \cos 3x$

con $R_k(x) =$ $R_3(x) = x^3$

$\alpha = 2$

$\beta = 3$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$$

con $\boxed{f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$ o $\boxed{f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$

♣ **Tecnica di risoluzione:** Considero il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

Due alternative:

(1) $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ $\boxed{\text{ non è }}$ soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$: allora esiste una soluzione particolare y_p

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

con Q_k e S_k polinomi di grado k.
Determino Q_k e S_k **imponendo che y_p sia effettivamente una soluzione**.

(2) $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ $\boxed{\text{è}}$ soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0 \qquad (E)$$

associata all'eq. omogenea $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$, con molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare y_p

$$y_p(x) = x^h e^{\alpha x} \left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]$$

con Q_k e S_k polinomi di grado k, che si determinano **imponendo che y_p sia effettivamente una soluzione di** $(\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}})$.

Notare che, siccome (E) è un'equazione algebrica di 2° grado, la molteplicità h può essere solo $h=1$ o $h=2$