

# Equazioni differenziali

Riccarda Rossi

Università di Brescia

**Analisi I**

# Introduzione ed esempi

Le equazioni differenziali ordinarie sono equazioni in cui:

- l'incognita è una funzione  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$
- si stabilisce un un legame tra
  - ▶  $y$  funzione incognita
  - ▶ le derivate  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  di  $y$

Useremo l'acronimo:

E.D.O. = Equazione Differenziale Ordinaria.

## Esempio 1

$$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

- È una E.D.O. del primo ordine:
- Si usa anche la scrittura  $y' = x + \arctan y$ .

## Esempio 2

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

- È una E.D.O. del secondo ordine:
- Si scrive anche  $z'' + 2z' + z = \sin t$ .

## Esempio 3

Il problema della primitiva: sia  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto; data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , trovare  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile, tale che

$$y'(x) = f(x) \quad \forall x \in I. \quad (\text{EDO}_1)$$

Chiamiamo primitiva di  $f$  su  $I$  ogni funzione  $y$  derivabile, verificante la  $(\text{EDO}_1)$ .

### Osservazioni:

- $(\text{EDO}_1)$  è una (particolare) eq. diff. ord., di ordine 1, che si risolve tramite integrazione
- teor. di struttura dell'integrale indefinito:

$$\int f(x)dx = y(x) + c, \text{ con } \begin{array}{l} y \text{ particolare soluz. di } (\text{EDO}_1) \\ c \text{ costante arbitraria in } \mathbb{R} \end{array}$$

cioè la E.D.O.  $(\text{EDO}_1)$  ammette **infinite soluzioni**, parametrizzate da una costante  $c \in \mathbb{R}$ .

- Per determinare una e una sola soluzione a (EDO<sub>1</sub>),

si deve assegnare un'ulteriore condizione.

Per esempio, una **condizione di Cauchy**, cioè

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{con } x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

- Allora il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette **una e una sola soluzione**.

## Generica E.D.O. del prim'ordine (in forma normale)

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- il suo integrale generale = insieme di tutte le soluzioni dipende in generale da **una costante arbitraria**;
- il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su  $f$  ammette un'unica soluzione (definita in un intervallo contenente  $x_0$ ).

Per una E.D.O. del **secondo ordine (in forma normale)**

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad (\text{EDO}_2)$$

- l'integrale generale = insieme di tutte le soluzioni della E.D.O. ( $\text{EDO}_2$ ) dipende in generale da **due costanti arbitrarie**;
- per determinare una e una sola soluzione di ( $\text{EDO}_2$ ) si deve imporre che la soluzione soddisfi ulteriormente due condizioni, infatti il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su  $f$ , ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente  $x_0$ ).

## Generica E.D.O. di ordine $n$ :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (\text{EDO}_n)$$

che **in forma normale si scrive**

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \quad (\text{EDO}_n)$$

- la **derivata di ordine massimo** della funz. incognita  $y$  è la derivata  $n$ -esima  $y^{(n)}$ ;
- la E.D.O. stabilisce un legame fra  $y$  e le sue derivate  $y', \dots, y^{(n)}$
- l'integrale generale dipenderà da  $n$  costanti arbitrarie  $\rightsquigarrow$  necessarie  $n$  condizioni per determinare una e una sola soluzione

- Problema di Cauchy per (EDO<sub>n</sub>) (**in forma normale**):

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su  $f$ , esso ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente  $x_0$ ).

Noi ci occuperemo di

- equazioni del primo ordine (eq. a variabili separabili ed eq. lineari a coefficienti continui)
- equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Quindi d'ora in poi considereremo solo i casi  $n = 1$  oppure  $n = 2$ .

## Un esempio dalla meccanica

Se un punto  $P$  di massa  $m$  si muove soggetto ad una forza  $F$ , allora la seconda legge di Newton afferma che

$$m y''(t) = F(t, y(t), y'(t))$$

dove

- $y(t)$  indica la posizione di  $P$  al tempo  $t$ ,
- $y'(t)$  è la sua velocità,
- $y''(t)$  è la sua accelerazione.

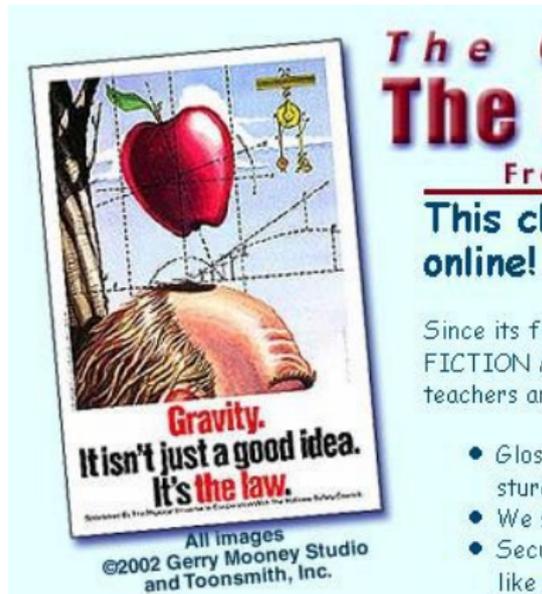
## Un esempio dalla meccanica

Se la forza  $F$  è dovuta alla **gravità**,

allora si ha

$$m y''(t) = -mg,$$

dove  $g$  è  
l'accelerazione  
di gravità



**(E.D.O. lineare di ordine 2 a coeff. cost.)**, con soluzione

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + y'(0) t + y(0)$$

In questo caso la funzione  $y$  descrive la caduta libera.

# Un esempio dalla biologia

Il modello  
di Malthus  
(1798)



descrive l'evoluzione temporale di una popolazione isolata in cui gli unici fattori di evoluzione sono la fertilità e la mortalità. Siano:

- ▶  $N(t) \geq 0 \rightsquigarrow$  numero di individui presenti al tempo  $t$ ,
- ▶  $\lambda \rightsquigarrow$  tasso di natalità per unità di tempo
- ▶  $\mu \rightsquigarrow$  tasso di mortalità per unità di tempo

( $\lambda$  e  $\mu$  costanti in  $t$ ). Allora la variazione di individui nel tempo  $h$  è

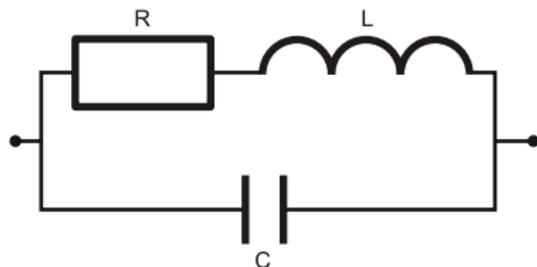
$$N(t+h) - N(t) = \lambda N(t)h - \mu N(t)h.$$

Al limite per  $h \rightarrow 0$  si ha l'**eq. a variabili separabili**

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t).$$

## Un esempio dalla teoria dei circuiti

In un circuito con resistenza  $R$ , induttanza  $L$ , e con un condensatore di capacità  $C$ ,



la carica  $q$  dell'armatura a potenziale maggiore, come funzione del tempo  $t \mapsto q(t)$ , soddisfa l'E.D.O. lineare di ordine 2 a coeff. cost.

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0.$$

Risolvendola, si può studiare il modo in cui varia l'intensità di corrente che circola a spese della scarica del condensatore.

# Equazioni a variabili separabili

Sono E.D.O. del tipo

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

**Osservazione:** è una E.D.O. del prim'ordine  $y'(x) = f(x, y(x))$ , in cui la funzione  $f$  è della forma

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

cioè prodotto di una funz. della sola  $x$  e di una funz. della sola  $y$  (le variabili  $x$  e  $y$  sono separate).

**Es. 1**

$$y'(x) = x \ln(x)$$

**Es. 2**

$$y'(x) = x^2 \sin(y(x))$$

D'ora in poi, cambio di notazione:  $h \rightsquigarrow f$ .

## Ipotesi

$I, J$  intervalli aperti,

$g : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $J$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $I$ ,

e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{con } x_0 \in J \text{ e } y_0 \in I.$$

# Metodo della separazione delle variabili

è un procedimento di risoluzione (formale, ma può essere rigorosamente giustificato) per

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- (1) usiamo la notazione  $y' = dy/dx$ , sicché la E.D.O. si riscrive come

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x).$$

- (2) Questo suggerisce di “separare le variabili”, cioè
- ▶ divido (**formalmente!**) entrambi i membri per  $f(y)$
  - ▶ multiplico (**MOLTO formalmente!**) entrambi i membri per  $dx$

(3) Quindi arriviamo a

$$\frac{1}{f(y)} dy = g(x) dx.$$

(4) Integro entrambi i membri, quindi

$$\int \frac{1}{f(z)} dz = \int g(s) ds, \quad (1)$$

che fornisce l'**integrale generale** della E.D.O.  $y' = f(y)g(x)$ .  
Notare che (1) dipende da una costante arbitraria.

- (5) Impongo la condizione di Cauchy  $y(x_0) = y_0$ , ottenendo la **formula risolutiva** del problema di Cauchy

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)} dz = \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

- (6) Quindi il metodo della separazione delle variabili comporta *due integrazioni nelle variabili  $y$  e  $x$  separatamente.*

## La formula risolutiva

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)} dz = \int_{x_0}^x g(s) ds$$

## La formula risolutiva

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)} dz = \int_{x_0}^x g(s) ds} \quad (2)$$

### Osservazioni

- (1) Supponiamo che  $\ell$  sia una primitiva di  $\frac{1}{f}$ . Allora, per il secondo teor. fond. del calcolo si ha

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)} dz = [\ell]_{y_0}^{y(x)} = \ell(y(x)) - \ell(y_0).$$

Allora (2) diventa  $\ell(y(x)) - \ell(y_0) = \int_{x_0}^x g(s) ds$ , da cui

$$\ell(y(x)) = \ell(y_0) + \int_{x_0}^x g(s) ds$$

che dà la funzione  $y = y(x)$  **in forma implicita** (si deve invertire  $\ell$ ..)

(2) Cosa succede se  $f(y_0) = 0$ ? Allora la funz.  $\frac{1}{f}$  ha un asintoto verticale in  $y_0$ , quindi

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)} dz \text{ non ha senso come integrale di Riemann...}$$

**MA:** Se  $f(y_0) = 0$ , allora la funzione costante

$$y(x) \equiv y_0$$

è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x))g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

## Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Sono E.D.O. della forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{per ogni } x \in I$$

con

$I$  intervallo,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue su  $I$

## Formula risolutiva

Il problema di Cauchy associato

$$\begin{aligned}y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) & \forall x \in I, \\ y(x_0) &= y_0,\end{aligned}\tag{3}$$

Sia  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $A'(x) = a(x) \quad \forall x \in I$ .

Moltiplichiamo entrambi i membri della E.D.O. per la funz.  
 $x \in I \mapsto e^{A(x)}$ ,







Per risolvere il problema di Cauchy,

$$\begin{aligned}y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) & \forall x \in I, \\ y(x_0) &= y_0,\end{aligned}\tag{4}$$

imponiamo la condizione di Cauchy  $y(x_0) = y_0$ , da cui

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[ e^{A(x_0)} y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right].\tag{5}$$

- (1) **Osserviamo che**  $A$  è, fin qui, *una delle infinite* primitive di  $a$ , che dipendono da una costante arbitraria  $c$ . Si verifica facilmente che, in (5), la soluz.  $y$  **non dipende da**  $c$ .

(2) Per “comodità”, scegliamo la primitiva  $A$  di  $a$  tale che  $A(x_0) = 0$ , cioè

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds .$$

(3) Allora otteniamo la formula risolutiva

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left[ y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right]} \quad \text{con } A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds$$

che si riscrive come

$$y(x) = \exp \left( - \int_{x_0}^x a(s) ds \right) \\ \times \left[ y_0 + \int_{x_0}^x \exp \left( \int_{x_0}^s a(r) dr \right) b(s) ds \right].$$

# Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono E.D.O. della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \quad (6)$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzione continua (*termine forzante*).

## Equazione omogenea associata a (6)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Per confronto, (6) viene anche detta *equazione completa*.

## Problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \quad (7)$$

dove  $x_0 \in I$ ,  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ .

## FONDAMENTALE: proprietà (di linearità) dell'equazione

Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  sono soluzioni di

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

allora

$$v(x) = y_1(x) - y_2(x) \text{ risolve}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad (\text{EQ}_{\text{omog}})$$

Infatti,

♣ **Quindi:** date due qualunque soluzioni  $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  di

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

si ha che

$$y_1(x) = v(x) + y_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ con } v \text{ soluz. dell'omogenea}$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \quad (\text{EQ}_{\text{comp}})$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad (\text{EQ}_{\text{omog}})$$

## Teorema di struttura per l'integrale generale di $(\text{EQ}_{\text{comp}})$

integrale generale di  $(\text{EQ}_{\text{comp}})$

= integrale generale di  $(\text{EQ}_{\text{omog}})$  + soluz. particolare di  $(\text{EQ}_{\text{comp}})$

cioè, la generica soluzione  $y$  di  $(\text{EQ}_{\text{comp}})$  è data da

$$y(x) = v(x) + y_p(x) \quad \forall x \in I, \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} v \quad \text{generica sol. di } (\text{EQ}_{\text{omog}}), \\ y_p \quad \text{sol. particolare di } (\text{EQ}_{\text{comp}}). \end{array}$$

**Osservazione importante:**  $(\text{EQ}_{\text{comp}})$ ,  $(\text{EQ}_{\text{omog}})$  sono equazioni del second'ordine: il loro integrale generale sarà parametrizzato da **due costanti arbitrarie**.

## Strategia per risolvere

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \quad (8)$$

1. Determinare l'integrale generale (cioè **tutte le soluzioni**) dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare **una soluzione particolare**  $y_p$  dell'equazione completa; in questo modo si otterrà l'integrale generale dell'equazione completa, dipendente da **due costanti arbitrarie**.
3. Imponendo le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

si determinano anche le costanti corrispondenti all'**unica soluzione** del problema di Cauchy (8).

# Risoluzione dell'equazione omogenea

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Si risolve non tramite integrazione, ma con un processo risolutivo algebrico, considerando l'associata **equazione caratteristica**

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

↪ tre casi:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

**[Caso 1:]** esistono due soluzioni reali e distinte  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$   
(caso  $a^2 - 4b > 0$ ),  
allora l'integrale generale di  $y'' + ay' + by = 0$  è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

**[Caso 2:]** esiste ammette una sola soluzione reale  $\lambda$  di molteplicità due (caso  $a^2 - 4b = 0$ ), allora l'integrale generale di  $y'' + ay' + by = 0$  è

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{\lambda x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

**[Caso 3:] L'eq. ammette due soluzioni complesse coniugate  $\alpha + i\beta$  e  $\alpha - i\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (caso  $a^2 - 4b < 0$ ), allora l'integrale generale di  $y'' + ay' + by = 0$**

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}$$

## Esempio

$$y'' - 4y = 0$$

# Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni particolari dell'equazione completa

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \quad (\text{EQ}_{\text{comp}})$$

Ci sono due metodi per determinare una soluzione particolare:

1. il metodo della variazione delle costanti
2. il metodo "ad hoc"

Esamineremo il problema nel caso in cui il termine forzante  $f$  è del tipo

$$\begin{cases} f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ o} \\ f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $R_k$  polinomio di grado  $k$

## Esempi:

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$\text{con } R_k(x) =$$

$$f(x) = x$$

$$\text{con } R_k(x) =$$

## Esempi:

$$f(x) = \sin 2x$$

$$\text{con } R_k(x) =$$

$$f(x) = x^3 e^{2x} \cos 3x$$

$$\text{con } R_k(x) =$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \quad (\text{EQ}_{\text{comp}})$$

con  $f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  o  $f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

♣ **Tecnica di risoluzione:** Considero il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

Due alternative:

(1)  $\tilde{z} = \alpha + i\beta$  non è soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea  $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ : allora esiste una soluzione particolare  $y_p$

$$y_p(x) = e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)],$$

con  $Q_k$  e  $S_k$  polinomi di grado  $k$ .

Determino  $Q_k$  e  $S_k$  **imponendo che  $y_p$  sia effettivamente una soluzione.**

(2)  $\tilde{z} = \alpha + i\beta$  è soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea  $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ , con molteplicità  $h$ , allora esiste una soluzione particolare  $y_p$

$$y_p(x) = x^h e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)]$$

con  $Q_k$  e  $S_k$  polinomi di grado  $k$ , che si determinano **imponendo che  $y_p$  sia effettivamente una soluzione di (EQ<sub>comp</sub>)**.