Proprietà globali delle funzioni derivabili - 1

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Massimi e minimi relativi

Definizione

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.
Si dice che

- x_0 è un **punto di massimo RELATIVO (o LOCALE)** , se esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$; cioè

$$\exists r > 0 \ : \ \forall x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r) \quad \text{si ha} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

- x_0 è un **punto di minimo RELATIVO (o LOCALE)** se esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0 tale che x_0 è punto di minimo per la restrizione di f a $(x_0 - r, x_0 + r) \cap A$; cioè

$$\exists r > 0 \ : \ \forall x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r) \quad \text{si ha} \quad f(x) \geq f(x_0).$$

- x_0 è un punto di estremo relativo (o locale) se è punto di massimo o di minimo relativo (o locale).

Osservazioni

- Se x_0 è un punto di massimo assoluto per f su A, cioè

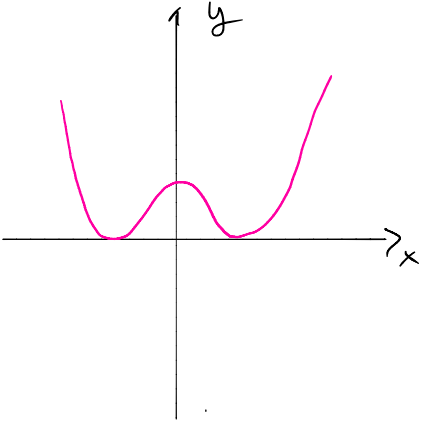
  allora x_0 è anche punto di massimo relativo

- idem per punti di minimo

Esempio 1

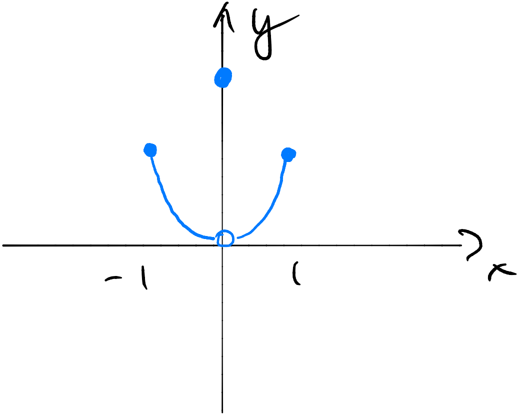
La funzione "doppio pozzo"

$$W(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{4} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$



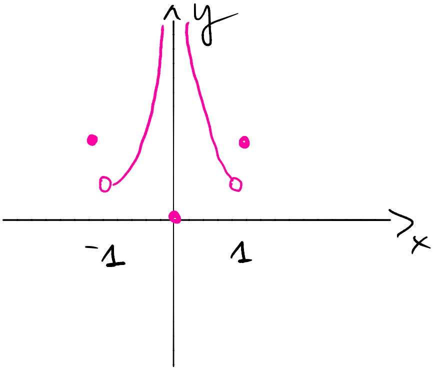
Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



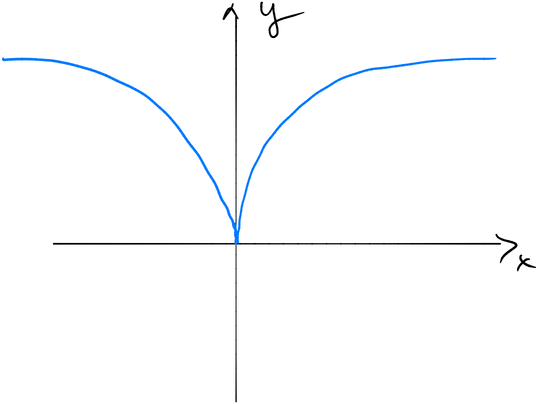
Esempio 3

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



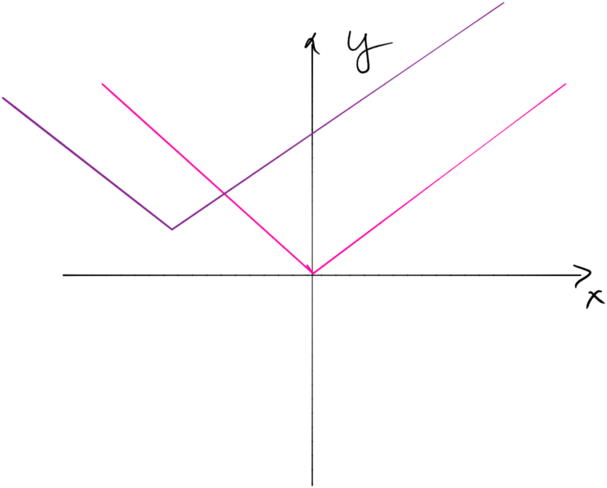
Esempio 4

$$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



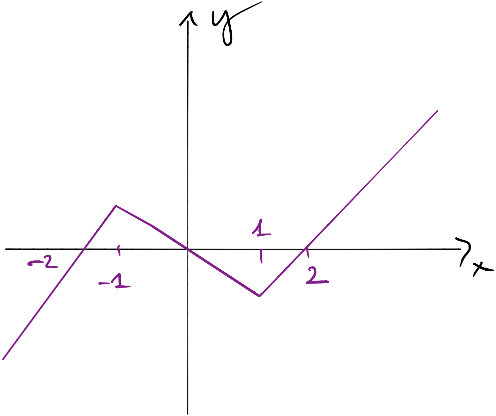
Esempio 5

$$f(x) = \min\{|x|, |x + 2| + 1\}.$$



Esempio 6

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1, \\ -x & \text{se } -1 < x < 1, \\ x-2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$



Punto della situazione

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, consideriamo quattro categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x)$ (finita o infinita), $f'(x) \neq 0$;
4. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 punto interno ad I.
Diciamo che x_0 è **punto STAZIONARIO (o critico)** per f se

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \text{ e}$$
$$f'(x_0) = 0.$$

Teorema di Fermat

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 un **punto interno** a I. Se

$$\exists\, f'(x_0) \text{ e}$$

$$x_0 \text{ è un punto di } \underline{\text{estremo relativo}},$$

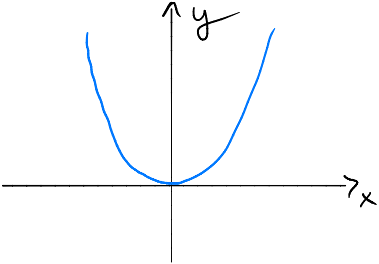
allora

$$x_0 \text{ è un punto stazionario di } f.$$

Quindi, **condizione necessaria** perché x_0, punto di esistenza della derivata, sia punto di estremo relativo, è che x_0 sia un punto stazionario per f.

Esempio

$$f(x) = x^2$$



Dimostrazione

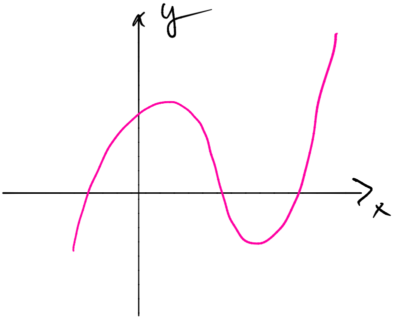
Ragionando come nella dimostrazione del Teor. di Fermat, si vede che

se x_0 è un punto di estremo relativo per f tale che

$$\exists\, f'_-(x_0),\ \exists\, f'_+(x_0),$$

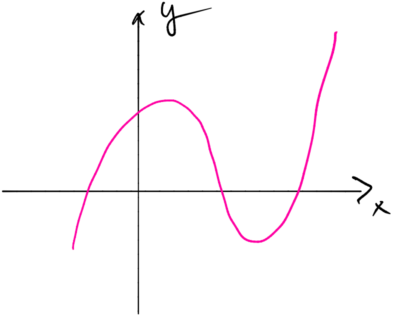
se x_0 punto di massimo relativo allora

$$f'_-(x_0) \geq 0, \quad f'_+(x_0) \leq 0$$



se x_0 è punto di minimo relativo allora

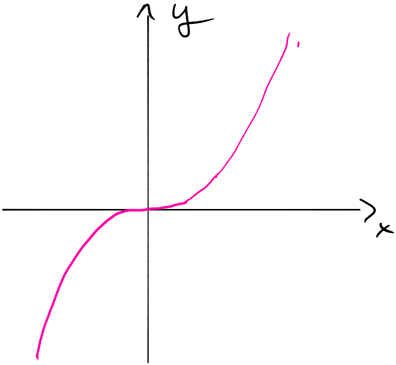
$$f'_-(x_0) \leq 0, \quad f'_+(x_0) \geq 0.$$



Il teorema di Fermat fornisce SOLO una condizione necessaria, NON sufficiente per avere in x_0 un punto di estremo relativo.

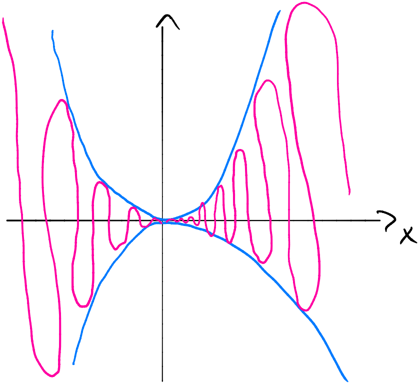
Esempio

$$f(x) = x^3, \quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}.$$



Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



“Candidati” a punti di estremo relativo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Per il Teor. di Fermat, i punti “candidati” a essere di estremo relativo ricadono, in queste tre categorie:

1. gli estremi a, b dell’intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Programma: determinare <u>condizioni sufficienti</u> affinché i punti stazionari interni siano di estremo. Deriveremo queste condizioni <u>a partire</u> dal <u>Teorema di Rolle e di Lagrange</u>, che sono

risultati sul legame fra la derivata f' e
proprietà *globali* di f