Proprietà globali delle funzioni derivabili - 2

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Premessa

Teorema di Rolle

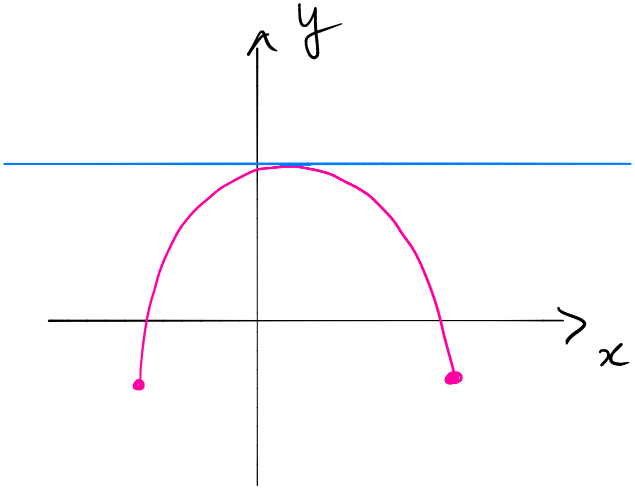
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. continua in $[a, b]$,
2. derivabile in $]a, b[$,
3. tale che $f(a) = f(b)$.

Allora **esiste almeno un punto**

$$\xi \in]a, b[\text{ tale che } f'(\xi) = 0$$

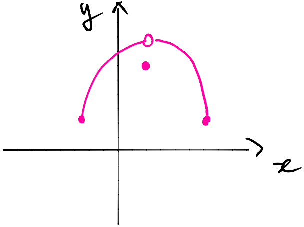
Illustrazione grafica



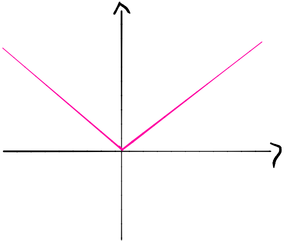
Dimostrazione

Nessuna delle ipotesi può essere eliminata/indebolita

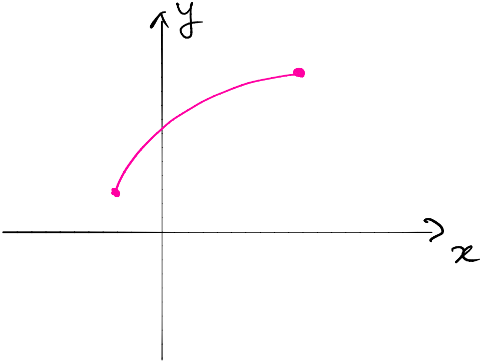
1. Non si può indebolire l'ipotesi di continuità in $[a, b]$.



2. Non si può indebolire l'ipotesi di derivabilità in (a, b)



3. Non si può eliminare l'ipotesi $f(a) = f(b)$.



Teorema del valor medio, o di Lagrange

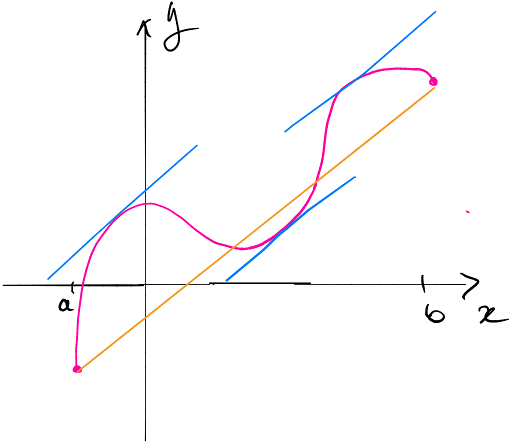
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. continua in $[a, b]$,
2. derivabile in $]a, b[$.

Allora **esiste almeno un punto**

$$\xi \in]a, b[\text{ tale che } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretazione geometrica

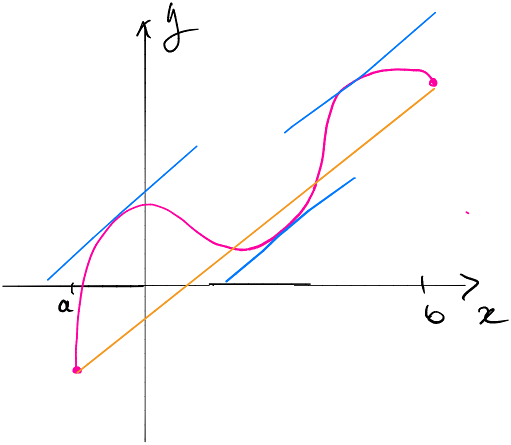


Dimostrazione

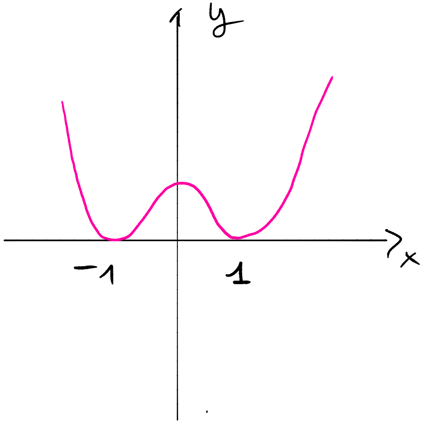
Si applica il Teorema di Rolle alla funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il Teorema di Lagrange garantisce solo l'esistenza, non l'unicità del punto ξ..



Il Teorema di Lagrange garantisce solo l'esistenza, non l'unicità del punto ξ..



Teorema di Cauchy

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. continue in $[a, b]$,
2. derivabili in $]a, b[$.

Allora **esiste almeno un punto**

$$\xi \in]a, b[\text{ tale che } f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Dimostrazione

Si applica il teorema di Rolle a

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

Legami fra Rolle, Lagrange, Cauchy