Proprietà globali delle funzioni derivabili - 3

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Conseguenze del Teorema di Lagrange

1. Teorema della derivata nulla

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile, con

$$f'(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Allora

$$f \text{ è costante su } (a, b).$$

Dimostrazione

La tesi è falsa se $\mathrm{dom}(f)$ NON è un intervallo!!

Esempio

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Conseguenze di Lagrange: 2. Studio della monotonia

2. Teorema su monotonia e segno della derivata

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, **derivabile**. Si ha che

(i)

$$f'(x) \geq 0 \; \forall \, x \in (a, b) \iff f \text{ è monotona non decrescente in } (a, b)$$

(ii)

$$f'(x) \leq 0 \; \forall \, x \in (a, b) \iff f \text{ è monotona non crescente in } (a, b)$$

(iii) Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è <u>strettamente crescente</u> in (a, b)

(iv) Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è <u>strettamente decrescente</u> in (a, b)

♠ NON VALE IL VICEVERSA in (iii) e (iv)!

Dimostrazione

f strettamente crescente in $[a, b]$

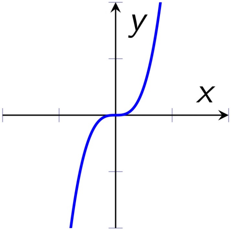
NON IMPLICA

$f'(x) > 0$ per ogni $x \in]a, b[$

(idem per f strettam. decrescente).

Esempio

$$f(x) = x^3$$



“Candidati” a punti di estremo relativo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Per il Teor. di Fermat, i punti “candidati” a essere di estremo relativo ricadono, in queste tre categorie:

1. gli estremi a, b dell’intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Conseguenze di Lagrange: 3. Condizioni sufficienti per massimi/minimi relativi

Teorema

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua su (a,b). Sia $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ oppure $\nexists\, f'(x_0)$.

Allora,

(1) se f è derivabile sugli intervalli (a,x_0) e (x_0,b) e verifica

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,x_0) \quad \text{e} \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (x_0,b)\,,$$

allora x_0 è un punto di massimo relativo per f su (a,b).

(2) se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica

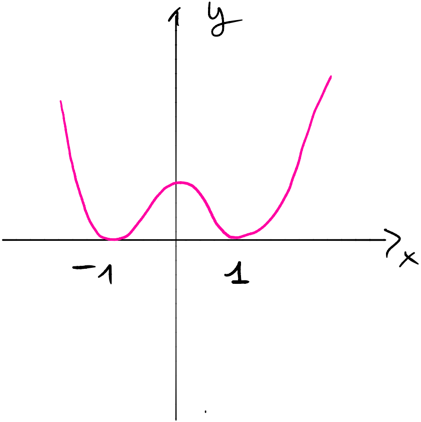
$$f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0) \quad \text{e} \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,,$$

allora x_0 è un punto di <u>minimo relativo</u> per f su (a, b).

Esempio 1

La funzione "doppio pozzo"

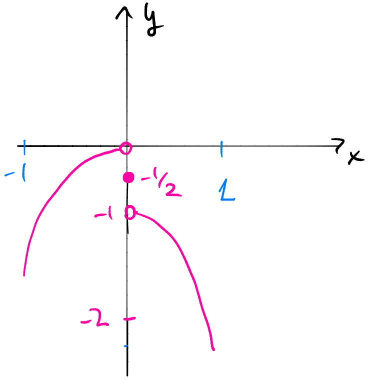
$$W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



Esempio 2

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in (-1,0) \\ -1/2 & x = 0 \\ -x^2-1 & x \in (0,1) \end{cases}$$



Teorema: Criterio della derivata seconda

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in (a, b)$ stazionario per f ($f'(x_0) = 0$). Supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0. Allora,

1. se $f''(x_0) > 0$, allora f ha in x_0 un punto di minimo relativo;
2. se $f''(x_0) < 0$, allora f ha in x_0 un punto di massimo relativo.