Integrazione per parti e per sostituzione

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Formula di integrazione per parti

Integrazione per parti

Si applica all'integrazione di <u>prodotti di funzioni</u>

Proposizione: formula di integrazione per parti

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni <u>derivabili con derivata continua</u> (cioè f, $g \in \mathrm{C}^1(I)$).
Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Dimostrazione è basata sulla formula di derivazione del prodotto di funzioni:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\,g(x)\big) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

integro entrambi i membri fra a e b

$$\underbrace{\int_a^b \frac{d}{dx}\big(f(x)\,g(x)\big)\,dx}_{\overset{2^\circ\,\text{T.F.C.}}{=}\ \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b} = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b$$

$\boxtimes$

Osservazioni

$$\int f'(x)g(x)\,dx = -\int f(x)g'(x)\,dx + f(x)g(x)$$

- la formula vale anche per integrali indefiniti
-
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

  riconduce il calcolo di $\boxed{\int_a^b f'g}$ al calcolo di $\boxed{\int_a^b fg'}$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g).
  L'idea è: passare dall' "integrale difficile" $\int_a^b f'g$ all'integrale "più semplice" $\int_a^b fg'$.

- Operativamente, per applicare l'integrazione per parti al calcolo di

$$\int_a^b h(x)k(x)\ dx$$

bisogna scegliere, fra h e k,

  - quale ha il ruolo di f',
  - quale ha il ruolo di g.

è <u>fondamentale</u> scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare.

Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione polinomiale e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x) \sin(\alpha x)\, dx \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x) \cos(\alpha x)\, dx\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x) \quad (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cos(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio***.*

Esempio

$$I = \int_0^1 x\cos(2x)\ dx$$

Può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente...

Esempio

$$I = \int_1^2 x^3 \sin(x)\ dx$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* *<u>polinomiale</u>* *e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int P(x)e^{\alpha x}\ dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio**.

Esempio

$$I = \int_0^2 xe^{2x}\ dx$$

Prodotto di un polinomio per una funzione iperbolica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* *polinomiale* *e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x) \sinh(\alpha x) \, dx \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x) \cosh(\alpha x) \, dx \right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sinh(\alpha x) \quad (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cosh(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione iperbolica e deriviamo il polinomio**.

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$*. Siano* $\boxed{0 < a < b}$*:*

$$\int_a^b P(x) \ln(\alpha x)\, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica***.*

Esempio

$$I = \int_1^3 x \ln(2x)\ dx$$

Esempio

$$I = \int \ln(x)\ dx$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int_a^b P(x) \arctan(\alpha x)\ dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente**.

Esempio

$$I = \int_0^1 x \arctan(x)\ dx$$

Integrazione per sostituzione

Esempio

Come integrare

$$\int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t)\, dt??$$

Intuitivamente: ponendo

$$x = \sin(t), \quad \text{cioè} \quad t = \arcsin(x),$$

ottengo il termine $\boxed{x^2 \arctan(x)}$, che so come trattare (integrando per parti).

- Come diventa il termine $\cos(t)\, dt$?
- come diventano gli estremi di integrazione?

La formula di integrazione per sostituzione ci dice come si trasforma l'integrale dopo il cambiamento di variabile

dalla variabile x alla variabile t che è legata a x da

$$\underline{x = \varphi(t) \;\Leftrightarrow\; t = \varphi^{-1}(x)}$$

tramite una φ invertibile.

$t = \varphi^{-1}(x)$

$\Updownarrow$

Formula di integrazione per sostituzione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\boxed{x = \varphi(t)}$ un cambiamento di variabile tale che

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \text{ è invertibile e derivabile con } \varphi' \text{ continua: } \varphi \in \mathrm{C}^1(I).$$

Allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

- Vi è anche una versione per gli integrali indefiniti.

Dimostrazione: Sia F una primitiva di f. Quindi $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Per l'ipotesi la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

formula di derivazione della fz. composta

Dunque

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))'\,dt = \left[(F\circ\varphi)\right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

$$= F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a)))$$

2° teorema fondamentale calcolo

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

♣ **Osservazione:**

- integrazione per parti $\sim$ integrazione di un prodotto di funzioni $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per parti è basata su formula per la derivata del prodotto di funzioni
- integrazione per sostituzione $\sim$ integrazione tramite cambiamento di variabile $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per sostituzione è basata su formula per la derivata della composizione di funzioni

$x = \varphi(t)$

Struttura di

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \rightsquigarrow & f(\varphi(t)) \\ dx & \rightsquigarrow & \varphi'(t)\,dt \\ \int_a^b & \rightsquigarrow & \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \end{array}$$

$dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,dt$

$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x)$

$a \le x \le b \Rightarrow \varphi^{-1}(a) \le t \le \varphi^{-1}(b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Esempio iniziale

$$I = \int_0^1 \sin^2(t)\arctan(\sin(t))\cos(t)\,dt$$

È naturale fare il cambiamento di variabile

$$x = \varphi(t) = \sin(t)$$

e passo dall'integrale in t all'integrale in x (leggo la formula da DS a SN)

$$\sin^2(t)\arctan(\sin(t)) \rightsquigarrow x^2\arctan(x)$$

$$\cos(t)\,dt \longrightarrow dx = \left(d(\sin(t)) = \cos(t)\,dt\right)$$

$0 \le t \le 1$, $\quad X = \sin(t) \rightsquigarrow \underbrace{\sin(0)}_{=0} \le X \le \sin(1)$

L'integrale dunque diventa

$$\int_0^1 \sin^2(t)\,\arctan(\sin(t))\,\cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\sin(1)} \underbrace{x^2}_{\text{polinomio}} \overbrace{\arctan(x)}^{\text{arctan}}\,dx =$$

integro il polinomio

derivo l'arcotang

$$\left[\ \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b\right.$$

$$\begin{cases} g(x) = \arctan(x) \\ f'(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ f(x) = x^3/3 \end{cases}$$

$$= -\int_0^{\sin(1)} \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx + \left[\frac{x^3}{3}\cdot\arctan(x)\right]_0^{\sin(1)}$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3(1) \arctan(\sin(1))$$

$$\Gamma \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$\downarrow$

per dividere il numeratore con il denominatore, evidenzio al numeratore il prodotto del denominatore con un polinomio

$$x^3 = x \cdot x^2 = x\,(x^2 + 1 - 1) = x\,(1+x^2) - x$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x\,(1+x^2) - x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^{\sin(1)} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sin(1)} \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\sin(1)} x\,dx - \frac{1}{3}\int_0^{\sin(1)} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sin(1)} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^{\sin(1)}$$

$$h(x) = x^2+1 > 0$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(|h(x)|)$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\int_0^{\sin(1)} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{6}\sin^2(1) - \frac{1}{6}\log\left(1+\sin^2(1)\right)}_{\text{immetto qs. quantità nella formula precedente (con il giusto segno!)}} + \cancelto{0}{\frac{1}{6}\log(1+0)}$$

Strategia per integrare funzioni che contengono termini con radicali: effettuare la sostituzione in modo da *eliminare* il radicale.

Esempio 1

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Per eliminare la radice passo dalla variabile x alla variabile $\boxed{z = \sqrt{x+1}} = \varphi(x)$

La formula in generale mi darà

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$$

$$z=\sqrt{x+1} \Longrightarrow dz = \varphi'(x)\,dx =$$

$$= \left(\sqrt{x+1}\right)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$$

EVIDENZIO IL "FUTURO"

dz

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^2 2x\,\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \int_0^2 2x\,\underbrace{\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}}_{dz}$$

$$z=\sqrt{x+1} \Rightarrow x = z^2-1$$

$$0\le x\le 2 \Rightarrow z=\sqrt{x+1}\in\left[\sqrt{0+1},\sqrt{2+1}\right]=\left[1,\sqrt{3}\right]$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} 2(z^2-1)\, dz$$

$$= 2\left[\frac{z^3}{3} - z\right]_{1}^{\sqrt{3}} = \dots\dots\dots$$

NB è una fz. polinomiale in z! non ci sono radicali

Esempio 2

$$I = \int_0^1 s^3 e^{s^2}\, ds.$$

non posso integrare direttamente per parti:

la strategia $\int P(x) e^x dx$ si applica a

e^x, non a e^{x^2}!!

Passo da s a $x = s^2$

la formula generale (sulla x integrale indef.)

$$\int f(\varphi(s))\, \underline{\varphi'(s)\, ds} \longrightarrow \int f(x)\, \underline{dx}$$

$$\int_0^1 s^3 e^{s^2}\, ds =$$

$\hookrightarrow x = s^2$

$dx = d(s^2)\, ds =$

$= 2s\, ds$

$s^3 = s^2 \cdot s$

PER PARTI

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{s^2 \; e^{s^2}}_{x e^{x}} \; \underbrace{2 s\, ds}_{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 x e^{x}\, dx = \frac{1}{2}$$

$0 \le s \le 1 \Rightarrow x = s^2 \in [0, 1]$