Integrazione per parti e per sostituzione

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Formula di integrazione per parti

Integrazione per parti

Si applica all'integrazione di prodotti di funzioni

Proposizione: formula di integrazione per parti

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua (cioè f, $g \in \mathrm{C}^1(I)$).
Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Dimostrazione è basata sulla formula di derivazione del prodotto di funzioni:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

integro entrambi i membri fra a e b

$$\underbrace{\int_a^b \frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right)dx}_{\overset{\parallel}{2^\circ \text{ T.F.C.}}} = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\left[f(x)\,g(x)\right]_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b$$

$\boxtimes$

Osservazioni

$$\int f'(x) g(x)\, dx = - \int f(x) g'(x)\, dx + f(x) g(x)$$

- la formula vale anche per integrali indefiniti
-
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

  riconduce il calcolo di $\boxed{\int_a^b f'g}$ al calcolo di $\boxed{\int_a^b fg'}$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g).
  L'idea è: passare dall' "integrale difficile" $\int_a^b f'g$ all'integrale "più semplice" $\int_a^b fg'$.

- Operativamente, per applicare l'integrazione per parti al calcolo di

$$\int_a^b h(x)k(x)\ dx$$

bisogna scegliere, fra h e k,

  - quale ha il ruolo di f',
  - quale ha il ruolo di g.

è <u>fondamentale</u> scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare.

Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione polinomiale e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x) \sin(\alpha x)\; dx \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x) \cos(\alpha x)\; dx\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x) & (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cos(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio***.*

Esempio

$$I = \int_0^1 x\cos(2x)\ dx$$

Può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente...

Esempio

$$I = \int_1^2 x^3 \sin(x)\ dx$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* *__polinomiale__* *e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int P(x)e^{\alpha x}\, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio**.

Esempio

$$I = \int_0^2 x e^{2x}\, dx$$

Prodotto di un polinomio per una funzione iperbolica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$*:*

$$\int_a^b P(x)\sinh(\alpha x)\ dx \quad \left(\text{oppure } \int_a^b P(x)\cosh(\alpha x)\ dx\right)$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sinh(\alpha x) \quad (\text{oppure } f' \leftrightarrow \cosh(\alpha x)) \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè **integriamo la funzione iperbolica e deriviamo il polinomio***.*

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$*. Siano* $\boxed{0 < a < b}$*:*

$$\int_a^b P(x) \ln(\alpha x) \, dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica***.*

Esempio

$$I = \int_1^3 x \ln(2x)\ dx$$

Esempio

$$I = \int \ln(x)\ dx$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* <u>*polinomiale*</u> *e sia* $\alpha \neq 0$.

$$\int_a^b P(x) \arctan(\alpha x)\ dx.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

cioè **integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente**.

Esempio

$$I = \int_0^1 x \arctan(x)\ dx$$

Integrazione per sostituzione

Esempio

Come integrare

$$\int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t)\, dt??$$

Intuitivamente: ponendo

$$x = \sin(t), \quad \text{cioè} \quad t = \arcsin(x),$$

ottengo il termine $\boxed{x^2 \arctan(x)}$, che so come trattare (integrando per parti).

- Come diventa il termine $\cos(t)\, dt$?
- come diventano gli estremi di integrazione?

La formula di integrazione per sostituzione ci dice come si trasforma l'integrale dopo il cambiamento di variabile

$$x = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(x)$$

tramite una φ invertibile.

Formula di integrazione per sostituzione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\boxed{x = \varphi(t)}$ un cambiamento di variabile tale che

$\varphi : I \to \mathbb{R}$ è invertibile e derivabile con φ' continua: $\varphi \in \mathrm{C}^1(I)$.

Allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.}$$

- Vi è anche una versione per gli integrali indefiniti.

Dimostrazione: Sia F una primitiva di f. Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Per l'ipotesi la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))'\,dt \\ &= F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

♣ **Osservazione:**

- integrazione per parti $\sim$ integrazione di un prodotto di funzioni $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per <u>parti</u> è basata su formula per la derivata del <u>prodotto</u> di funzioni
- integrazione per sostituzione $\sim$ integrazione tramite cambiamento di variabile $\rightsquigarrow$ la dimostrazione della formula di integ. per <u>sostituzione</u> è basata su formula per la derivata della <u>composizione</u> di funzioni

Struttura di

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \rightsquigarrow & f(\varphi(t)) \\ dx & \rightsquigarrow & \varphi'(t)\,dt \\ \int_a^b & \rightsquigarrow & \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \end{array}$$

Esempio iniziale

$$I = \int_0^1 \sin^2(t) \arctan(\sin(t)) \cos(t)\, dt$$

Strategia per integrare funzioni che contengono termini con radicali: effettuare la sostituzione in modo da *eliminare* il radicale.

Esempio 1

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$$

Esempio 2

$$I = \int_0^1 s^3 e^{s^2}\, ds.$$