Serie numeriche

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Sommatoria

Siano

I :	insieme finito di indici
$(a_i)_{i\in I}$	famiglia finita di numeri, al variare di i in I

Con il simbolo

$$\sum_{i\in I} a_i$$

indichiamo la somma di tutti i numeri a_i, al variare di i in I.

Definizione

Sia data $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

- Costruiamo una nuova successione $\{s_n\}$ in questo modo

$$
\begin{aligned}
&s_0 := a_0, \\
&s_1 := a_0 + a_1, \\
&s_2 := a_0 + a_1 + a_2, \\
&\dots \\
&s_n = a_0 + \cdots + a_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

- Supponiamo che $\{s_n\}$ non oscilli. Chiamiamo il $\lim_{n\to\infty} s_n$ *somma della serie* e lo denotiamo con i simboli

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_n a_n$$

Definizione

Sia data $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

- La successione $\{s_n\}$ è detta successione delle somme parziali o ridotte della serie.
- Si dice che
  - la serie *converge* se $\{s_n\}$ converge;
  - la serie *diverge* (a $+\infty$ o a $-\infty$) se $\{s_n\}$ diverge (a $+\infty$ o a $-\infty$): scriveremo anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$$

  - la serie *oscilla* se $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
- La proprietà di essere convergente, divergente o oscillante si dice anche *carattere* della serie.

Attenzione alla notazione

N.B.: non confondere

$$\{a_n\} \text{ con } \{s_n\} : \; s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Osservazione: Una serie $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è una successione di Cauchy.

Esempio 1

Consideriamo

$$a_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esempio 2

Consideriamo

$$a_n = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esempio 3: la serie geometrica

Sia $\boxed{q \in \mathbb{R}}$. Consideriamo

$$a_n = q^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Chiamiamo *serie geometrica di ragione* q la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots$$

(con la convenzione $0^0 = 1$ se $q = 0$). Calcoliamo le ridotte della serie:

Calcolo della somma di una serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Calcoliamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Calcoliamo

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

In generale: se modifichiamo l'indice a partire dal quale sommo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=\bar{k}}^{\infty} a_n$$

il carattere della serie non cambia. CAMBIA il valore della SOMMA.

In generale: se modifichiamo i primi m termini di $\{a_n\}$, il carattere della serie $\sum_n a_n$ non cambia. CAMBIA il valore della SOMMA.

Serie telescopiche

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice telescopica, se esiste $\{b_n\}$ tale che

$$\boxed{a_n = b_n - b_{n+1}}.$$

Allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1})$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n$$

$\Rightarrow$ determino immediat. carattere serie (dipende da $\lim_{n\to+\infty} b_n$)

$\Rightarrow$ calcolo la somma della serie $= b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n$

Esempio: la serie di Mengoli

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Notare che

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Ora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Quindi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Dalla teoria dei limiti di successioni, otteniamo risultati su legami fra serie e operazioni.

Teorema di linearità

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Se le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono convergenti, allora anche $\sum_n (a_n + b_n)$ e $\sum_n c a_n$ lo sono e si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c a_n = c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Vale anche per serie divergenti, pur di non avere forme indeterminate.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione:

Se $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0}$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\boxed{\text{non converge.}}$

Che la successione sia infinitesima è solo una **condizione necessaria**, e non sufficiente!!! Per esempio: la *serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, ma $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

La serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si ha che

- per $\boxed{\alpha > 1}$ la serie **CONVERGE**

- per $\boxed{\alpha \leq 1}$ la serie **DIVERGE**

Serie a termini non negativi

Per *serie a termini non negativi* intendiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \text{ tale che } \ a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Osservazione fondamentale: in questo caso, la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è crescente: infatti

Allora la serie **NON È OSCILLANTE!!**

In particolare,

- $\sum_n a_n$ **converge** se $\{s_n\}$ è limitata (cioè se $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n < +\infty$)

- $\sum_n a_n$ **diverge** se $\{s_n\}$ non è limitata (cioè se $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = +\infty$)

Teorema

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora:

1. la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente;
2. la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non oscilla e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Osservazione La tesi continua a valere se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie termini definitivamente non negativi, cioè

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad a_n \geq 0.$$

- Cosa succede se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie **a termini (definitivamente) non positivi**???

Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \text{con } a_n \geq \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ (oppure } \forall\, n \geq n_0)$$

converge oppure diverge.

$\Rightarrow$ criteri per stabilire il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. Criterio del confronto

Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ a termini non negativi, tali che

$$\exists\, m \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq m \;\; 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Allora,

1. se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n a_n$ converge.
2. se $\sum_n a_n$ diverge, anche $\sum_n b_n$ diverge.

Esempi:

1. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n} \quad \text{CONVERGE.}$$

2. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^{1/2}} \quad \text{DIVERGE.}$$

3. La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} \text{ DIVERGE.}$$

Più in generale, la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n|\ln(n)|^{\lambda}}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- per $\boxed{\lambda > 1}$ **CONVERGE**

- per $\boxed{\lambda \leq 1}$ **DIVERGE**

2. Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie a termini non negativi, con

$$b_n > 0 \quad \forall\, n \geq m,$$

e tali che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty].$$

Allora

1. se $\boxed{L \in]0, +\infty[}$, $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_n b_n$ converge;
2. se $\boxed{L = 0}$ e $\sum_n b_n$ converge, allora $\sum_n a_n$ converge;
3. se $\boxed{L = +\infty}$ e $\sum_n b_n$ diverge, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Esempi:

1. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^{1/3}} \quad \text{DIVERGE.}$$

2. La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5 + 3n^3 + 5n}{n^6 + n^7 + n^2 + 3} \quad \text{CONVERGE.}$$
Verifico la **condizione necessaria:**

Applico il criterio del confronto asintotico

3. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{CONVERGE.}$$

4. La serie

$$\sum_{n=2} \frac{1}{|\log(n)|^6} \quad \text{DIVERGE}$$

E se l'avessimo confrontata con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \text{ (CONVERGENTE)}$$

????

3. Criterio asintotico del rapporto

Sia $\{a_n\}$ una successione (definitivamente) strettamente positiva, cioè

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\text{o per } n \geq n_0).$$

Inoltre,

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty].$$

Allora

1. se $\boxed{L < 1}$, la serie $\sum_n a_n$ $\boxed{\text{converge}}$;
2. se $\boxed{L > 1}$, allora la serie $\sum_n a_n$ $\boxed{\text{diverge}}$;
3. se $\boxed{L = 1}$, allora il criterio è $\boxed{\text{inefficace}}$.

Esempi:

1. Sia $c > 0$. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^n}{n!} \quad \text{CONVERGE.}$$

2. Sia $q > 0$. Consideriamo

$$\sum_{n \to \infty} \frac{q^n}{n^\beta}, \qquad \text{con } \beta > 0.$$

Osserviamo che, per ogni $\beta > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Quindi

- per $q < 1$, la serie converge per ogni $\beta > 0$.
- per $q > 1$, la serie diverge per ogni $\beta > 0$.

Per $q = 1$, ci riduciamo alla serie armonica generalizzata

$$\sum_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\beta}}, \qquad \text{con } \beta > 0.$$

SE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

il criterio NON DICE NULLA. La serie $\sum_n a_n$ può convergere o divergere.

Infatti,

- la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ DIVERGE}$$

  e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ DIVERGE}$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

4. Criterio asintotico della radice

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione (definitivamente) non negativa, cioè

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\text{o per } n \geq n_0).$$

Inoltre,

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty].$$

Allora

1. se $\boxed{L < 1}$, allora la serie $\sum_n a_n$ $\boxed{\text{converge}}$;
2. se $\boxed{L > 1}$, allora la serie $\sum_n a_n$ $\boxed{\text{diverge}}$;
3. se $\boxed{L = 1}$, allora il criterio è $\boxed{\text{inefficace}}$.

Esempi:

1. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n n^{-n} \quad \text{CONVERGE} \qquad \forall\, x > 0.$$

2. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}.$$

Quindi

- converge se $\frac{1}{x} < 1 \iff x > 1$
- diverge se $\frac{1}{x} > 1 \iff x < 1$

Se $x = 1$, ritrovo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$, divergente.

Proposizione

Sia $a_n > 0$ per ogni $n > 0$ (o definitivamente).
Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

allora anche

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

In particolare se il criterio del rapporto risulta inefficace ($L = 1$), allora lo è anche quello della radice.

Per esempio, nel caso della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- per $\boxed{\alpha > 1}$ la serie **CONVERGE**

- per $\boxed{\alpha \leq 1}$ la serie **DIVERGE**

5. Criterio di condensazione di Cauchy

Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente e non negativa (definitivamente). Allora le due serie

$$\sum_n a_n \text{ converge SE E SOLO SE}$$

$$\sum_n 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

Applicazione per stabilire il carattere di $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$

Esaminiamo le serie con **termini di segno variabile**

$\rightsquigarrow$ criteri di convergenza????

Un primo **risultato generale** è

Teorema

Data $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, supponiamo che

$$\text{la serie } \sum_n |a_n| \text{ sia convergente.}$$

Allora:

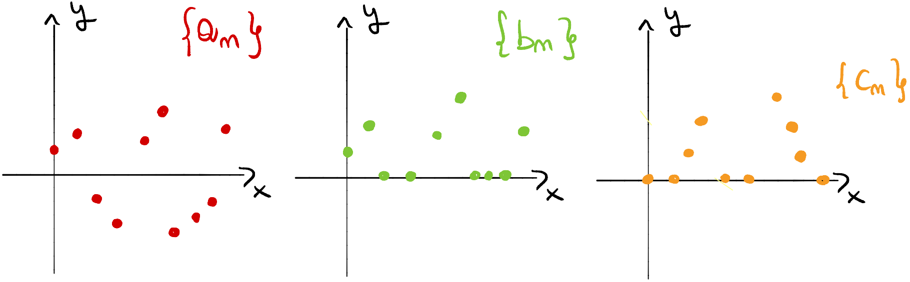
1. anche $\sum_n a_n$ è convergente
2. $|\sum_n a_n| \leq \sum_n |a_n|$.

Dimostrazione:

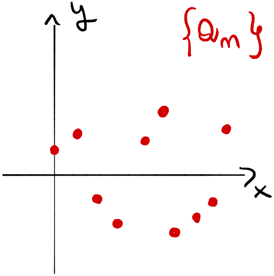
1. Osserviamo che

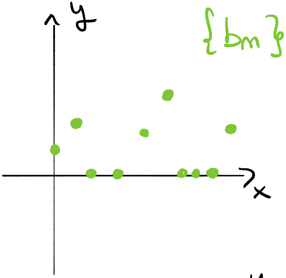
$$a_n = b_n - c_n \quad \text{con}$$

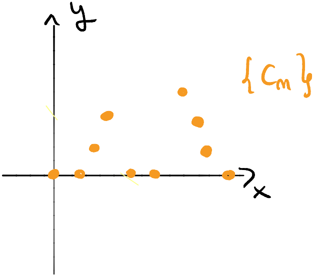
$$b_n = \max(a_n, 0), \quad c_n = \max(-a_n, 0)$$



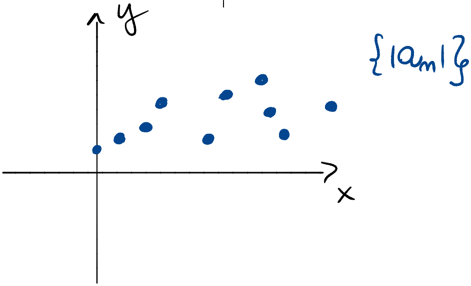
b_n è detta *parte positiva* di a_n e denotata $(a_n)^+$
c_n è detta *parte negativa* di a_n e denotata $(a_n)^-$







$$|a_n| = b_n + c_n$$



Definizione: Convergenza assoluta

Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. La serie $\sum_n a_n$ si dice

- assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_n |a_n|$.
- semplicemente convergente è convergente la serie $\sum_n a_n$ ma **NON** la serie $\sum_n |a_n|$.

Esempio 1

1. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$$ ASSOLUTAMENTE convergente

Esempio 2

2. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$$ SEMPLICEMENTE convergente

Esempio 3

3. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2^{n^2}}$$ ASSOLUTAMENTE convergente

Esempio 4

4. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)^{1/2}}$$ SEMPLICEMENTE convergente

SERIE NOTEVOLI

- ognuna delle serie seguenti **converge assolutamente** per i valori di x specificati
- per ognuna delle serie seguenti è **nota la SOMMA della serie**
- le formule seguenti sono **DA MEMORIZZARE**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(1+x) \quad \forall x \in \mathbb{R} :\ -1 < x \leq 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq x \leq 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Serie di segno alterno

$$\sum_n (-1)^n a_n, \quad \text{dove} \quad a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ (o definitivamente).}$$

Criteri di convergenza??

- convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza della serie, quindi

$$\sum_n a_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_n (-1)^n a_n \text{ converge.}$$

- E se $\sum_n a_n$ diverge???
  Si può dimostrare la convergenza di $\sum_n (-1)^n a_n$ applicando il

Teorema (Criterio di Leibniz)

Si consideri $\sum_n (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ (o definitivamente).
Supponiamo che

1. $\{a_n\}$ sia una successione decrescente;
2. $\{a_n\}$ sia una successione infinitesima, cioè $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Allora la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ è convergente.
Inoltre, detta $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali, si ha che:

(i) $\{s_{2n}\}$ (la successione delle somme parziali con indice pari) è decrescente;

(ii) $\{s_{2n+1}\}$ (la successione delle somme parziali con indice dispari) è crescente;

(iii) vale la seguente stima: $\boxed{\left| s_n - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione (della prima parte).
Passo 1: usiamo il fatto che a_n è decrescente: si ha

(1) $\{s_{2n}\}$, la successione delle somme parziali con indice pari, è decrescente, infatti

(2) $\{s_{2n+1}\}$, la successione delle somme parziali con indice dispari, è crescente. *Si dimostra ragionando esattamente come per* $\{s_{2n}\}$.

Passo 2: $\{s_{2n}\}$ è limitata, infatti:

(1) è superiormente limitata in quanto decrescente: $s_{2n} \leq s_0$;

(2) è inferiormente limitata in quanto

Analogamente si dimostra che $\{s_{2n+1}\}$ è superiormente limitata, quindi limitata.

Passo 3:

(1) $\{s_{2n}\}$ decrescente e limitata $\Rightarrow$ $\{s_{2n}\}$ converge a $L = \inf_n s_{2n}$;

(2) $\{s_{2n+1}\}$ crescente e limitata $\Rightarrow$ $\{s_{2n+1}\}$ converge a $L' = \sup_n s_{2n+1}$;

(3) Siccome

$$s_{2n+1} - s_{2n}$$

e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, concludiamo che

$$0 = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = L' - L.$$

(4) Allora $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n+1}\}$ convergono a stesso limite L

(5) Quindi <u>tutta</u> $\{s_n\}$ converge a L, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente.