

Serie di Mac-Laurin per $x \rightarrow 0$

- ▶ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- ▶ $\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- ▶ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- ▶ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- ▶ $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$
- ▶ $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- ▶ $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$
- ▶ $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- ▶ $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- ▶ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!n!} x^n + o(x^n)$

Esercizi

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(x+1) - 2 \sin x + x^2}{x^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1) + x^2}{\sin^2 x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{\tan x^3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - x} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}{x^2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}}$$

Esercizi

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x^2\sqrt{2})) - x \sin x + x^2}{\frac{x^4}{6}}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^6}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+2x)) - e^{2x} + 1}{\arctan x^2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \sqrt{\cos \frac{1}{x}}\right)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+2^x)}{\log^2 x} \left(1 - \cos \frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x\right)}{x^2 \tan x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4x}{\tan 4x}\right)^{\frac{1}{x \sin 3x}}$$

Esercizi

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sin x}} - e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} \tan(2x)}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sinh x - x(6+x^2)}{x^5}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1) + x^2}{x^4 \cos x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - \log(1+x) - 1}{\cosh 3x - 1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1 + \sin x) - 2 \sinh x + x^2}{x^3 \arctan(2x)}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + e^{x^2} - \cos x}{4 \tan x^2}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{1+x}{e}\right) + e^{-\sin x}}{\sinh x \log(1+x^2)}$$

Esercizi

25. Calcolare il limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^\alpha}$$

26. Calcolare il limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \sin x - \alpha}{x^{\alpha+1}}$$

27. Studiare il limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x} - 1 - \log(1+x)}{x^{\alpha-4} \sinh x}$$

28. Studiare il limite al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+3x) - x}{e^{x^\alpha} - 1 - x}$$

29. Studiare il limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - \sin(\alpha x))^{\log x} - 1}{x^\alpha \log x}$$

Esercizi

30. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e t.c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x - \sin x} = 7$. Disegnare il grafico di f in un intorno di 0.
31. Sia $f(x) = \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$ per $x \neq 0$. Disegnare il grafico di f in un intorno di 0.
32.
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}{7n \sin \frac{1}{n^2} + 2n^3 \tan \frac{1}{n^4}}$$
33.
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \sin \frac{7}{n^2}\right)^{\frac{1}{2 \sinh \frac{1}{n} - \frac{2}{n}}}$$
34.
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\log \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n\right] \frac{e^{\frac{2}{n^3}} - 1}{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}$$
35.
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cosh\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right) - \cos\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)}{1 + \log\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) - \exp\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)}$$

Esercizi

36. Studiare la serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=10}^{\infty} \tanh(n^2 + 1) \sin^{\alpha} \left(\frac{7}{n} \frac{7}{n+1} \right)$$

37. Studiare la serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}} \right)$$

38. Studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \log \left(n \sin \frac{1}{n} \right)$$

39. Studiare la serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\alpha+1} \log^2 n}$$

Esercizi

40. Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

41. Studiare la serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{n^{\alpha+1} \log^2 n}$$

42. Studiare la serie al variare di $\alpha > 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log(n^\alpha + \sqrt{n}) - \log(n^\alpha + 1) \right)$$

43. Studiare la serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \log \left(n \sin \frac{1}{n} \right)$$