Sviluppi di Taylor

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Introduzione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.

Problemi:

come approssimare f nell'intorno di x_0 con un polinomio?

come stimare l'ordine di infinitesimo della differenza fra la funzione e il polinomio approssimante?

La risposta a questi problemi è legata a

$$\boxed{\text{proprietà di regolarità di } f} \sim \boxed{\text{ordine di derivabilità di } f}$$

Osservazione 1

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia continua in x_0.

Osservazione 2

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia <u>derivabile</u> in x_0.

Ci aspettiamo che con l'aumentare dell'ordine di derivabilità di f in x_0

- aumenti il grado del polinomio che approssima f nell'intorno di x_0

- aumenti l'ordine di infinitesimo, per $x \to x_0$, dell'errore che si commette sostituendo a f il suo polinomio approssimante nell'intorno di x_0

Generalizzeremo queste formule

a funzioni n volte derivabili:

1. troveremo un polinomio P_n di grado $\boxed{\leq}$ n tale che **valga lo sviluppo**

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0,$$

2. esprimeremo P_n mediante le derivate di f in x_0 fino all'ordine n.

Teorema: lo sviluppo di Taylor con il resto di Peano

Siano $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e supponiamo che una f sia derivabile $\boxed{n}$ volte in x_0, con $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico polinomio P_n di grado $\leq \boxed{n}$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0, \text{ e vale}$$
$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per } k = 0, \ldots, n,$$

quindi P_n è dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

P_n viene detto polinomio di Taylor di f di ordine n e di centro x_0 e indicato con

$$T^n_{x_0} f.$$

Se $x_0 = 0$, P_n è detto *polinomio di Mac Laurin di* f *di ordine* n *e di centro* 0 e indicato con $T^n f$.

Conseguenza

Da

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

si ricava la formula di Taylor con il resto di Peano:

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x \,-\, x_0)^k \,+\, o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0.$$

Attenzione!!!!!! a non confondere i due concetti

- *ordine* del polinomio di Taylor

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

  è l'indice n fino al quale sommo
- *grado* del polinomio di Taylor: è il grado effettivo del polinomio, è $\leq$ dell'ordine, e può essere $<$ dell'ordine.

Casi particolari della formula di Taylor con resto di Peano:

(0) Si ha

$$T^0_{x_0} f = P_0(x) =$$

(1) Si ha

$$T^1_{x_0} f = P_1(x) =$$

(2) Si ha

$$T^2_{x_0} f = P_2(x) =$$

(3) Si ha

$$T^3_{x_0} f = P_3(x) =$$

Programma

- calcolo di polinomi di Taylor e quindi di sviluppi di Taylor
- applicazione degli sviluppi di Taylor a limiti di funzioni (a esercitazione: anche limiti di successioni e convergenza di serie)
- applicazione degli sviluppi di Taylor allo studio del grafico qualitativo di funzioni: $\rightsquigarrow$ criterio della derivata n-esima

Esempio (I): sviluppi di Taylor di funzioni polinomiali per $x \to 0$

Sia

$$f(x) = 3x + 2x^2 - 3x^4 + 5x^7 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

- Polinomio di Mac Laurin di f di ordine 2??

- Polinomio di Mac Laurin di f di ordine 3?? È

$$T_0^3(f) = T_0^2(f) = 3x + 2x^2$$

N.B.: qui $T_0^3(f)$ ha grado $2 < 3$ (ordine del polinomio di Mac Laurin!)

- Polinomio di Mac Laurin di f di ordine 8?? È

$$T_0^8(f) = T_0^7(f) = 3x + 2x^2 - 3x^4 + 5x^7$$

N.B.: $\forall\, n \geq 8$ si ha che $T_0^n(f) = T_0^7(f)$ quindi il grado di $T_0^n(f)$ è $\boxed{7 < n}$.

Esempio (II): sviluppo di Mac Laurin di $\cos$ per $x \to 0$

Calcoliamo

$$T_0^n(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{\cos^{(k)}(0)}}{k!} x^k$$

Si ha $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} \cos^{(4j)}(x) = \cos x, & \cos^{(4j+1)}(x) = -\sin x, \\ \cos^{(4j+2)}(x) = -\cos x, & \cos^{(4j+3)}(x) = \sin x. \end{array}$$

Quindi

$$\begin{array}{ll} \cos^{(4j)}(0) = & \cos^{(4j+1)}(0) = \\ \cos^{(4j+2)}(0) = & \cos^{(4j+3)}(0) = \end{array}$$

allora nella formula per $T_0^n(\cos)$ “sopravvivono” solo i contributi con indice k PARI!!

Per esempio

$$
\begin{aligned}
T_0^1(\cos)(x) &= \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_0^2(\cos)(x) &= T_0^1(\cos(x)) + \tfrac{\cos''(0)}{2}x^2 \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_0^4(\cos)(x) &= T_0^2(\cos(x)) + \tfrac{\cos^{(3)}(0)}{6}x^3 + \tfrac{\cos^{(4)}(0)}{24}x^4 \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4
\end{aligned}
$$

In forma compatta si scrive

$$T_0^{2n}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Polinomi di Mac Laurin notevoli (di centro $x_0 = 0$)

$$
\begin{aligned}
T^n(e^x) &= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \\
T^n(\ln(1+x)) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}, \quad x \neq -1 \\
T^{2n+1}(\sin x) &= T^{2n+2}(\sin x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
T^{2n}(\cos x) &= T^{2n+1}(\cos x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \\
T^{2n+1}(\sinh x) &= T^{2n+2}(\sinh x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
T^{2n}(\cosh x) &= T^{2n+1}(\cosh x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^n((1+x)^\alpha) \quad & = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \tbinom{\alpha}{n} x^n, \\
& \ \text{per } x > -1,\ \alpha > 0 \\[2ex]
T^n((1-x)^{-1}) \quad & = \textstyle\sum_{k=0}^n x^k, \\
& \text{per } x \neq 1 \\[2ex]
T^{2n+1}(\text{arctan})(x) \quad & = \textstyle\sum_{k=0}^n \tfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)}.
\end{aligned}
$$

Sviluppi di Mac Laurin notevoli

Sulle dispense: elenco **DA MEMORIZZARE**!!

Esempio

Per $\boxed{x \to 0}$ si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Esempio

Per $\boxed{x \to 0}$ si ha

$$\sin(x) =$$

Esempio

Per $\boxed{x \to 0}$ si ha

$$\cos(x) =$$

Esempio

Per $\boxed{x \to 0}$ si ha

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

Calcolo di polinomi di Taylor: esempio

¿ Polinomio di Taylor di ordine 6 e centro 0 di

$$f(x) = e^{x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$T_0^6(f(x)) = \boxed{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}}$$

Applicazioni al calcolo dei limiti: esempio

Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}.$$

♣ **Fino a quale ordine sviluppiamo** sin **e** cos**?**

- ordine 0?

- ordine 1?

- ordine 2?

- ordine 3?

$$\begin{aligned}
\sin x &= T^3(\sin x) + o(x^3) &&= x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3),\\
\cos x &= T^3(\cos x) + o(x^3) &&= T^2(\cos x) + o(x^3)\\
& && = 1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]}{x\left\{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]\right\}} =$$

$\Rightarrow$ È stato sufficiente sviluppare fino all'ordine 3!

Applicazioni al calcolo dei limiti (II)

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \cos x - \ln(1 + x^2)}{7x^2 \tan(x^4)}$$

De l'Hôpital vs. Taylor

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\log(\cos(x^4)))^2}{x^{16}}$$

Esercizi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{e^{x^2} - e^{x^3}} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - \sin(x^2)}{x^2 \log(\cos(x))} \qquad \left[\frac{2}{3}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1+x^8} - \sqrt[3]{1+x^8}} \qquad [-3]$$

Applicazioni allo studio del carattere di una serie

Esempio 1

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

converge assolutamente?

Applicazioni allo studio del carattere di una serie

Esempio 2 [T.E. 22.03.2016]

Per quali valori di $\alpha \geq 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1 - n \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^{2\alpha}$$

converge?

Criterio della derivata n-esima

Sia x_0 un punto stazionario per una funzione f. Preso $x \in I$, intorno di x_0, *studiando il segno di* $f(x) - f(x_0)$ si può stabilire

- se x_0 sia un punto di massimo relativo:

$$f(x) - f(x_0) \leq 0,$$

- se x_0 sia un punto di minimo relativo:

$$f(x) - f(x_0) \geq 0,$$

- se x_0 **NON** sia un punto nè di massimo nè di minimo:

$$f(x) - f(x_0)$$

  cambia il segno.

Criterio della derivata seconda per classificare punto stazionario x_0:
$\rightsquigarrow$ studiare il segno di $f''(x_0)$... E se $f''(x_0) = 0$?? Si può ricorrere al criterio della derivata n-esima...

Teorema: Criterio della derivata n-esima

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, n volte derivabile in $x_0\in(a,b)$, $n\geq 2$, e supponiamo che

$$f'(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Allora si hanno le seguenti alternative:

- se n è <u>pari</u> e

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0)<0, & \text{allora punto di max. rel. per } f \text{ in } x_0; \\ f^{(n)}(x_0)>0, & \text{allora punto di min. rel. per } f \text{ in } x_0; \end{cases}$$

- se n è <u>dispari</u> e

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0)<0, & \text{allora } f \text{ è strett. decresc. in un intorno di } x_0; \\ f^{(n)}(x_0)>0, & \text{allora } f \text{ è strett. cresc. in un intorno di } x_0. \end{cases}$$

Esempi:

$$f(x) = x^4, \qquad x_0 = 0$$

$$f(x) = x^3, \qquad x_0 = 0$$

Idea della dimostrazione

Ricordiamo la formula di Taylor con resto di Peano: per $x \to x_0$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &\ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Siccome

$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

otteniamo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \text{ per } x \to x_0.$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \text{ per } x \to x_0$$

cioè, in un intorno di x_0 il segno di $f(x) - f(x_0)$ coincide con il segno di $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$....... ■

Formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) \text{ per } x \to x_0$$

fornisce un'informazione **qualitativa** sul comportamento di f per $x \to x_0$

Formula di Taylor con resto di Lagrange fornisce un'informazione **quantitativa** sul comportamento di f per $x \to x_0$, con una stima sulla differenza

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Teorema: Formula di Taylor con resto di Lagrange

Siano I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $(n+1)$-volte in I. Allora $\forall\, x_0,\, x \in I$

- con $x > x_0$, esiste $\xi \in (x_0, x)$,
- con $x < x_0$, esiste $\xi \in (x, x_0)$,

tale che

$$f(x) = T^n_{x_0}(f(x)) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

cioè il **resto** della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta **di Lagrange**)

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}.$$

Osservazioni:

Osservazioni:

Questa

è una generalizzazione del Teorema di Lagrange (per es. supp. $x_0 < x$)

$$\exists\, \xi \in (x_0, x) \ : \quad f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Esempio

La formula di Taylor con resto di Lagrange applicata a $f(x) = e^x$ (N.B.: $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$!!) fornisce, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{e^\xi}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \forall\, x_0,\, x \in \mathbb{R} \text{ con } x_0 < x.$$

Scegliendo $x_0 = 0$ e $x = 1$ si ottiene

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(n+1)!}}$$