Asintoti orizzontali

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siano $\pm\infty$ di accumulazione per A, allora:

- Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora la retta $\underline{y = l \text{ è asintoto orizzontale a } +\infty}$.
- Se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora la retta $\underline{y = l \text{ è asintoto orizzontale a } -\infty}$.
- Se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $\underline{y = l \text{ è asintoto orizzontale completo}}$.

Asintoti verticali

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia x_0 di accumulazione per A, allora:

- Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ allora
  $\underline{x = x_0 \text{ è asintoto verticale in } x_0^-}$.

- Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ allora
  $\underline{x = x_0 \text{ è asintoto verticale in } x_0^+}$.

- Se $x = x_0$ è asintoto verticale
  sia in x_0^- che in x_0^+, allora
  $\underline{x = x_0 \text{ è asintoto verticale completo}}$.

Asintoti obliqui

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siano $\pm\infty$ di accumulazione per A, allora:

- $$y = mx + q$$

  è asintoto obliquo a $+\infty$ se e solo se

  1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \in \{+\infty, -\infty\}$,
  2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$,
  3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$.

- $$y = mx + q$$

  è asintoto obliquo a $-\infty$ se e solo se le condizioni 1,2,3 sono verificate per $x \to -\infty$.

- $$y = mx + q$$

  è asintoto obliquo completo se e solo se è asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$.

Continuità

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$, allora:

- f è continua in x_0 se e solo se
  - $x_0 \in A$ è un punto isolato di A.
  - se $x_0 \in A$ è un punto di accumulazione per A, f è cont. in x_0 se e se solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f è continua in $B \subset A$ se e solo se f è continua in tutti i punti di B
- f è continua se e solo se f è continua in tutti i punti del suo dominio A.

Osservazione:

- Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.
- La composizione di funzioni continue è continua nel suo dominio (in particolare è continua nel suo dominio la somma, la differenza, il prodotto e il quoziente di funzioni continue).
- Per le funzioni definite a tratti è importante verificare la continuità nei punti di raccordo.

Discontinuità

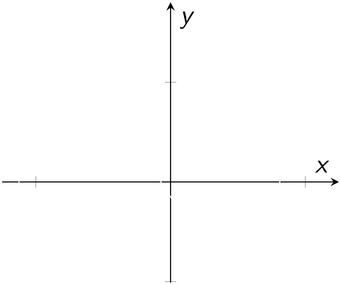
Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$. Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ oppure $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ diciamo che x_0 è un punto di discontinuità.

- Se
$$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \textit{oppure} \quad \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
allora $\underline{x_0 \in A \text{ è un punto di discontinuità di seconda specie}}$
- Se
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \overline{\mathbb{R}}$$
allora:
  - Se $L^- = L^+ \neq f(x_0)$, x_0 è un punto di discontinuità eliminabile.
  - Se $L^- \neq L^+$ ed essi sono <u>entrambi finiti</u>, x_0 è un punto di salto.
  - Se $L^- = \pm\infty$ oppure $L^+ = \pm\infty$, x_0 è un punto di infinito.

Grafici nell'intorno di una discontinuità

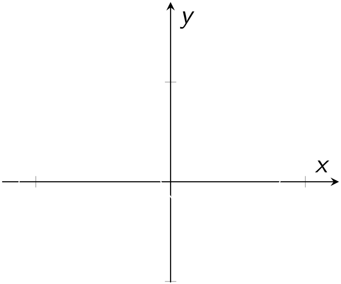
Discontinuità di seconda specie:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$



Discontinuità eliminabile:

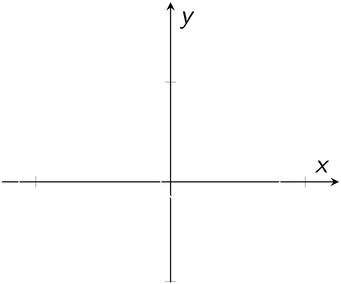
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$



Grafici nell'intorno di una discontinuità

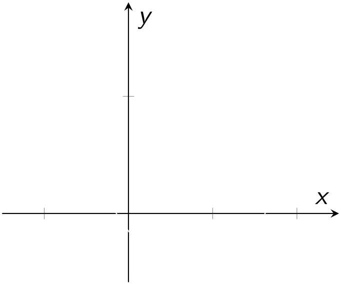
Punto di salto:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0, \\ \cos x & x < 0, \\ 2 & x = 0. \end{cases}$$



Punto d'infinito:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & x > 0, \\ \cos x & x \leq 0. \end{cases}$$



Studiare la continuità e determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \sin x \left[\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x+1})\right]$
2. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x}$
3. $f(x) = \frac{2e^x+x-1}{1-e^x}$
4. $f(x) = \frac{\sin(\pi x)-2x^4}{x^3-1}$
5. $f(x) = \log \frac{x^2}{|x+2|}$
6. $f(x) = x + 4\arctan\sqrt{|x-1|}$
7. $f(x) = x^2 + \sqrt{-\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|}$

Studiare la continuità e determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{\log 2x}{\log 3x} & x > 0, x \neq \frac{1}{3}, \\ x \cos x & x \leq 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-7)^4}{x^2}(1 - e^x) \log |x - 7| & x \neq 0, 7, \\ 0 & x = 0, 7 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 7 \cos \frac{\pi}{x-2} + 8 \frac{\sin(x-1)}{x-1} & x \neq 1, 2, \\ 1 & x = 1, 2. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0, \\ e^{-x} & x \leq 0. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} (x - 1) \sin \frac{1}{x^2-1} & x \neq \pm 1, \\ 0 & x = \pm 1. \end{cases}$

Studiare la continuità e determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{|\log(x+2)|}{x+2} & x > -2, \\ 1 & x \leq -2 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 7\cos\frac{\pi}{x-1} + e^{-\frac{1}{(x-2)^2}} & x \neq 1, 2, \\ -7 & x = 1, 2 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0, \frac{1}{\log 2}, \\ 0 & x = 0, \frac{1}{\log 2}. \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+2} & x \leq -2 \vee x \geq 2, \\ \cos\frac{\pi}{x-2} + (x^2-4)^2 & -2 < x < 2. \end{cases}$

Studiare la continuità e determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

17. $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}} & x \neq 2, \\ 0 & x = 2. \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|e^x}{2x} & 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Studiare la continuità e determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni al variare dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$

20. $f(x) = \begin{cases} \log_3(1+x) & -1 < x \leq 0, \\ a\sin x + b\cos x & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{x}{x-1} \log x & x > 1, \\ a - 7 & x = 1, \\ \frac{(e^{x-1}-1)tan^2(x-1)}{1-\cos(x-1)} & x < 1. \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(3x-6)}{\arctan(x-2)} & x < 2, \\ 3 & x = 2, \\ \frac{3\log(x-1)}{\left(e^{\sqrt{x-2}}-1\right)^a} & x > 2. \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^a \left[\cos\frac{1}{x-1} + \frac{4(e^{x-1}-1)}{2x-2}\right] & x > 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$

Studiare la continuità e determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni al variare dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$

24. $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin(x-1)+(x-1)^2}{2(e^{x-1}-1)} & x \neq 1, \\ a-1 & x = 1 \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{e^{x-6}-e} & x > 7, \\ \frac{1}{e} & x = 7, \\ a\cos\frac{1}{x-7} & x < 7. \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0, \\ 3a & x = 0, \\ 3\arctan\frac{1}{x} & x < 0. \end{cases}$