# Insiemi numerici: i numeri complessi

Riccarda Rossi

Università di Brescia

**Analisi I**

# Introduzione

Storicamente:

- si è passati da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ perché la sottrazione di due numeri naturali non è operazione interna a $\mathbb{N}$;
- da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ perché il quoziente di due numeri interi non è operazione interna a $\mathbb{Z}$;
- da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ perché l'estrazione di radice non è interna a $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ non è razionale!)

- da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ per....
  *"estrarre radici di numeri strettamente negativi"*

- I numeri complessi vengono introdotti perché tutte le equazioni algebriche abbiano soluzione: per es.

$$x^2 + 1 = 0 \text{ non ha soluzioni } x \in \mathbb{R}$$

Le sue soluzioni sono i numeri complessi "$\pm\sqrt{-1}$".

- Storicamente, l'introduzione dei numeri complessi è legata alle **formule risolutive per equazioni di terzo grado** ($\sim$ 500): per le soluzioni di

$$x^3 - 3px - 2q = 0,$$

si ha la formula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Essa perde significato quando $q^2 - p^3 < 0 \rightsquigarrow$ radice quadrata di un numero strettamente negativo!!!

Introduciamo l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come il "più piccolo" insieme (campo) che contenga

- $\mathbb{R}$
- $\sqrt{-1} =: i$

... $\mathbb{C}$ sarà dato dalle combinazioni lineari di numeri reali e di $i$

## Definizioni

- Chiamiamo unità immaginaria il numero (complesso) $i$ tale che
$$i^2 = -1.$$

- Chiamiamo numero complesso $z$ un oggetto che si scrive nella forma
$$z = a + ib, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

  - Il numero reale $a$ è detto parte reale di $z$. Scriviamo $a = \mathrm{Re}(z)$ (a volte si scrive $a = \mathrm{Re}(z)$)
  - Il numero reale $b$ è detto parte immaginaria di $z$; si scrive $b = \mathrm{Im}(z)$ (a volte anche $b = \mathrm{Im}(z)$)

N.B.

## Forma algebrica di un numero complesso

- L'espressione $z = a + ib$ è detta forma algebrica del numero complesso $z$. Si scrive anche $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$.
- Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \ : \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}\}.$$

- I numeri complessi $z$ con $\mathrm{Re}(z) = 0$ vengono detti *puramente immaginari*.

## Osservazioni

1. 
$$\text{Un numero } z = a + ib \in \mathbb{C} \text{ è reale se e solo se}$$

2. Dati due numeri complessi $z_1 = \mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1)$ e $z_2 = \mathrm{Re}(z_2) + i\mathrm{Im}(z_2)$, si ha che

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow$$

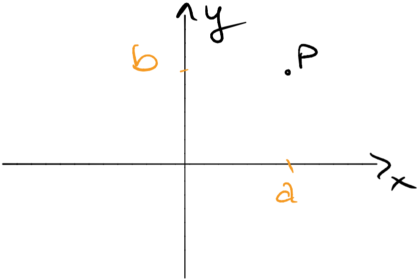
## Identificazione fra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$

Ogni numero complesso $z = a + ib$ si può identificare con la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: scriviamo

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

Infatti:

- $\mathbb{C}$ si rappresenta nel piano di Gauss: a ogni complesso $z = a + ib$ si associa il punto $P = (a, b)$




- viceversa, a ogni $P$ di coordinate cartesiane $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, si associa il numero complesso $z = a + ib$.

## Operazioni sui numeri complessi

- **somma:**

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

- **prodotto:**

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Infatti, formalmente

- L'insieme $\mathbb{C}$, con le operazioni $+$ e $\cdot$, è un campo:

- l'elemento neutro di $+$ è $0 = 0 + i0$:

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + i0) = a + ib = z = 0 + z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

- per ogni $z = a + ib$, l'opposto è l'elemento $-z = (-a) + i(-b)$.
- l'elemento neutro di $\cdot$ è: $z = 1 = 1 + i0$:

$$z \cdot 1 = (a + ib) \cdot (1 + i0) = a + ib = z = 1 \cdot z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

- ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha inverso rispetto al prodotto dato da

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

- $+$ e $\cdot$ godono della proprietà commutativa, associativa e vale la proprietà distributiva.

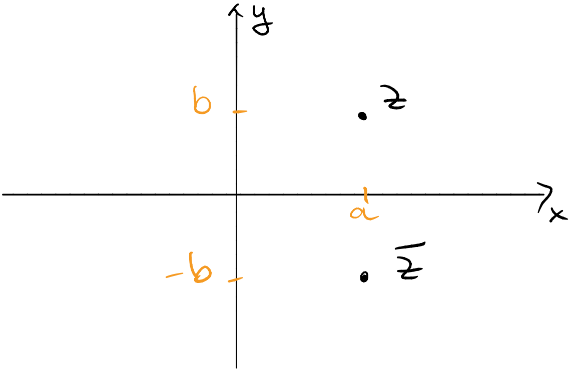
$\mathbb{C}$ è un campo, ma **NON** è un campo ordinato

## L'operazione di coniugio

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Il complesso coniugato di $z$ è il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

**Geometricamente:** è la simmetria rispetto all'asse reale.




$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

# Proprietà del coniugio

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z),$$

$$z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z),$$

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$

## Proprietà del coniugio

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{(z^{-1})} = \overline{z}^{-1},$$

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) \quad &= a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \\ &= (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 \geq 0, \end{aligned}$$

## Proprietà del coniugio

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a+ib)}} = \overline{(a-ib)} = a+ib = z,$$

$$\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

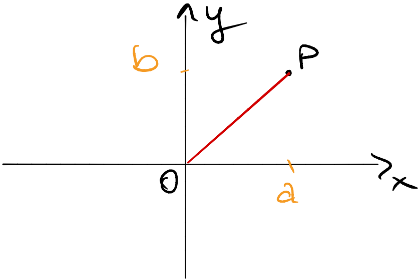
# Un'osservazione utile....

**Modulo**

Dato un numero complesso $z = a + ib$, il suo modulo è il numero reale

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Osservazione:** se $z \in \mathbb{R}$, allora $|z|$ coincide con il suo modulo=valore assoluto.




$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} =$

$= \overline{OP}$

= lunghezza del segmento OP

**Interpretazione geometrica:**

$$|z| = \text{ distanza di } P = (a, b) \text{ da } O = (0, 0)$$

## Proprietà del modulo

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|,$$

$$|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|,$$

## Proprietà del modulo

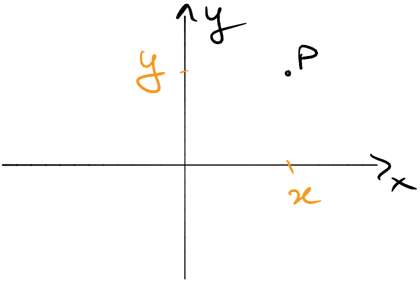
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$|\bar{z}| = |z|,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

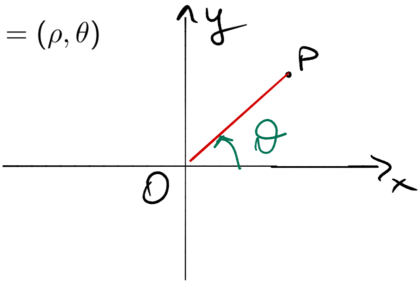
$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$: $z = x + iy$ è identificato a $P = (x, y)$



## Coordinate polari e forma trigonometrica di un numero complesso

- Il punto $z \cong P \in \mathbb{R}^2$ può essere rappresentato in *coordinate polari*

$$z = (\rho, \theta)$$




$\rho = \overline{OP}$

con

- $\rho$ : **distanza** di $z$ dall'origine $O$:

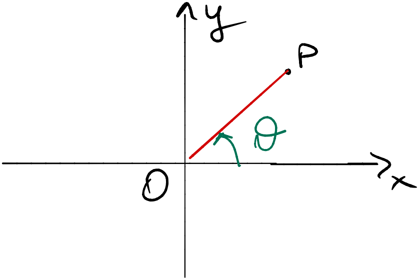
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|;$$

- $\theta$ è l'angolo (in radianti, verso antiorario), compreso fra l'asse delle $x$ e la retta congiungente O a $z$: è detto argomento di $z$

## Coordinate polari e forma trigonometrica di un numero complesso

Si ha

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta.$$




Si passa dalla forma algebrica $z = x + iy$ alla sua forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

- Date le coordinate $(\rho, \theta)$, il numero $z = x + iy$ risulta univocamente determinato dalle formule

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta.$$

- Viceversa, dato $z = x + iy$, determino $(\rho, \theta)$:
  - $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$;
  - $\theta$ è angolo che verifica

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \qquad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}.$$

Queste relazioni **NON** determinano **UNIVOCAMENTE** angolo $\theta$ (le funzioni cos, sin sono periodiche di periodo $2\pi$, quindi: se $\theta$ le verifica, anche $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, le verifica).

A ogni $z \in \mathbb{C}$ vengono associati **infiniti argomenti** $\theta$.
Introduciamo il loro insieme

$$\mathrm{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))\}$$

- $z = 0$:

$$\arg(0) = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 = |0|(\cos\theta + i\sin\theta)\} = \mathbb{R}.$$

Per 0 la seconda coordinata polare è indeterminata.

- $z = 4i$

- $z = 1 + i$

- **Attenzione!!** Le relazioni
  - $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$;
  - $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho}$ & $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho}$

e

  - $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$;
  - $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

**NON SONO EQUIVALENTI!!**

## Problema

Definire

$$e^z \in \mathbb{C}, \boxed{z \in \mathbb{C}}$$

### Definizione

$$e^z := e^{\mathrm{Re}(z)} \left[\cos(\mathrm{Im}(z)) + i \sin(\mathrm{Im}(z))\right] \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

In questo modo è definita la funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Quindi, se $z = x + i\,y$, allora

**Esempi:**

$$e^{(3+2i)} =$$

$$e^{2i\pi} =$$

$$e^{i\pi} =$$

quindi

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

# Proprietà dell'esponenziale complesso

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

# Proprietà dell'esponenziale complesso

$$e^z e^{-z} = 1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

# Proprietà dell'esponenziale complesso

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

# La formula di Eulero e le sue conseguenze

## Formula di Eulero

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ vale

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

# La formula di Eulero e le sue conseguenze

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **non** è iniettiva

## $\sin$ **e** $\cos$ **in** $\mathbb{C}$

Sono definite estendendo

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}} \quad \forall\,\theta\in\mathbb{R}$$

ad un qualsiasi $\underline{z\in\mathbb{C}}$.
<u>Definiamo</u>:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}.$$

In questo modo, otteniamo due funzioni

$$\sin:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}, \qquad \cos:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}.$$

## Forma esponenziale di un numero complesso

Dalla forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

e dalla formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

segue la *forma esponenziale*

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}}.$$

La forma esponenziale rende molto agevoli i conti in cui compaiono prodotti, quozienti, e potenze di numeri complessi. Per es., se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, allora $z_1 z_2$

# Interpretazione geometrica

Se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, allora $\frac{z_1}{z_2}$

**Esercizio:**
calcolare
$$(1 - i)^7.$$

## Radice $n$-esima di un numero complesso

Dato $z \in \mathbb{C}$, chiamiamo radice $n$-esima (complessa) di $z$ ogni numero $w \in \mathbb{C}$ verificante

$$w^n = z.$$

**Osservazione:** Dato $z = \rho e^{i\theta}$, al variare di $k = 0, \dots, n-1$ gli **n** numeri complessi $w_0$, $w_1, \dots,$ $w_{n-1}$

$$w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

sono *radici n-esime di z*.

Infatti

**Teorema**

Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ha esattamente $n$ radici n-esime distinte $w_0$, $w_1$,..., $w_{n-1}$.

**Rappresentazione grafica delle radici $n$-esime**: Le $n$ radici

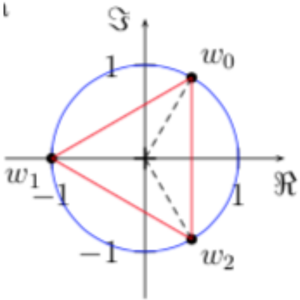
$$w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

sono i vertici di un poligono regolare di $n$ lati, inscritto nel cerchio di centro 0 e raggio $r$. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{2\pi i/n}$, cioè con una rotazione, in senso antiorario, di $2\pi/n$.

**Esercizio** 1

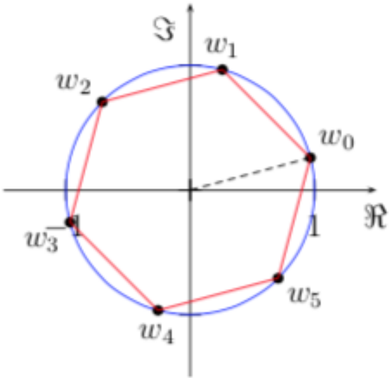
Determiniamo le tre radici cubiche di $-1$.

$$w_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad w_1 = -1, \qquad w_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$



**Esercizio** 2

Determiniamo le sei radici seste di $i$.


$\Im$
$w_1$
$w_2$
$w_0$
$\Re$
$-1$
$1$
$w_3$
$w_5$
$w_4$

## Polinomi in campo complesso

Chiamiamo polinomio in una variabile complessa la funzione $\boxed{P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}}$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numeri complessi assegnati, detti *coefficienti* del polinomio.

- Se $a_n \neq 0$, si dice che il polinomio è di grado $n$.
- Si chiama radice di $P$ ogni numero complesso $w$ tale che $P(w) = 0$.

## Principio di identità dei polinomi

Siano $P$ e $Q$ due polinomi: essi sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.

**Teorema fondamentale dell'Algebra**

Siano $n \geq 1$, $P$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado $n$ e $a_n$ il coefficiente di $z^n$ in $P(z)$. Allora $P$ ha $n$ radici $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ e $P$ si fattorizza nel prodotto

$$P(z) = a_n(z - z_n)(z - z_{n-1}) \cdots (z - z_1)\,.$$

## Molteplicità

Le radici possono non essere tutte distinte.
Chiamiamo *molteplicità* di una radice $r_j$ (e la denotiamo con $\mu_j$) il numero di radici uguali a $r_j$.
Quindi, se $r_1, r_2, \ldots, r_d$ sono le radici distinte di $P$ di grado $n$, si ha

$$\mu_1 + \cdots + \mu_d = n = \mathrm{grado}(P).$$

## Esempio

1. Consideriamo

$$z^7 - z^3 =$$

# Rivediamo le equazioni di secondo grado....

## Proposizione

Sia $P$ un polinomio a coefficienti reali:

1. Se $w$ è una radice (non reale), anche $\overline{w}$ è una radice, con la stessa molteplicità.
2. In particolare, se il grado del polinomio è dispari, vi è almeno una radice reale.