CORREZIONE del

TEST del

13/11/2019

ESERCIZIO 1

$$A = \left\{ (1+\cos(n\pi))\left(\arctan(n^3)+\tfrac{1}{3}\right) + (1-\cos(n\pi))\exp(5-2n^7) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Uso che

$$1+\cos(n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ DISPARI} \\ 2 & n \text{ PARI} \end{cases}$$

$$1-\cos(n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ 2 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

e quindi $A = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$c_n = \begin{cases} 2\underbrace{\left[\arctan(n^3)+\tfrac{1}{3}\right]}_{a_n} & \text{per } n \text{ PARI } (n \geq 0) \\ \underbrace{2\exp(5-2n^7)}_{b_n} & \text{per } n \text{ DISPARI } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\sup_n \{c_n\} = \max\left\{ \sup_{\substack{n \\ n \text{ PARI} \\ n\geq 0}} \{a_n\}, \sup_{\substack{n \\ n \text{ DISPARI} \\ n\geq 1}} \{b_n\} \right\}$$

$$\inf_n \{c_n\} = \min\left\{ \inf_{\substack{n \\ n \text{ PARI} \\ n\geq 0}} \{a_n\}, \inf_{\substack{n \\ n \text{ DISPARI} \\ n\geq 1}} \{b_n\} \right\}$$

La successione $\{a_n\}$ è strettam. crescente (composizione di successioni crescenti)

e quindi

$$\inf_{\substack{n \\ \text{PARI} \\ n\geq 0}} \{a_n\} = \inf_{k\geq 0} \{a_{2k}\} = a_0 = \frac{2}{3}$$

ed è MIN

$$\sup_{\substack{n \\ \text{PARI} \\ n\geq 0}} \{a_n\} = \sup_{k\geq 0} \{a_{2k}\} = \lim_{k\to\infty} a_{2k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n = 2\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right]$$

$$= \pi + \frac{2}{3}$$

è sup ma non max

La successione $\{b_n\}$ è strettam. decrescente (composizione di $n \mapsto 5-2n^7$, decrescente, con $2\cdot\exp(\cdot)$, crescente).

Quindi

$$\inf_{\substack{n \text{ DISPARI} \\ n\geq 1}} \{b_n\} = \inf_{k\geq 0} \{b_{2k+1}\} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} b_{2k+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} b_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\exp(5-2n^7)$$

$$= 0$$ → è inf, non MIN

$$\sup_{\substack{n \text{ DISPARI} \\ n \geq 1}} \{b_n\} = b_1 = 2\exp(5-2)$$

$$= 2\exp(3)$$

$$= 2e^3$$

↳ è max

allora

$$\sup_n \{c_n\} = \max\left\{2e^3, \pi + \frac{2}{3}\right\} = 2e^3$$ ed è max

$$\inf_n \{c_n\} = \min\left\{0, \frac{2}{3}\right\} = 0$$ ed è solo inf, non min.

ESERCIZIO 2

$$\frac{z^2+\bar{z}^2+4[\mathrm{Im}(z)]^2-e^{2\pi i}+ie^{i\pi/2}}{z^4+e^{3\pi i}}=0$$

Condizione di esistenza:

$$z^4 \neq -e^{3\pi i} = -e^{\pi i} = -(-1) = 1$$

cioè $z^4 \neq 1$ cioè

$$z \neq \underbrace{z_0, z_1, z_2}_{\text{radici quarte di } 1}, z_3$$

Si calcola immediatamente

$$z_0 = 1, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i$$

Scrivo i termini al numeratore

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,i$$

$$\bar{z}^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xy\,i$$

$$4[\mathrm{Im}(z)]^2 = 4y^2$$

$$-e^{2\pi i} = -1$$

$$i e^{i\pi/2} = i \cdot i = i^2 = -1$$

Ora, dopo aver posto il denominatore $\neq 0$, oss. che la frazione $= 0 \iff$ il numeratore si annulla, da cui

$$z^2 + \bar{z}^2 + 4[\mathrm{Im}(z)]^2 - e^{2\pi i} + i e^{i\pi/2} = 0$$

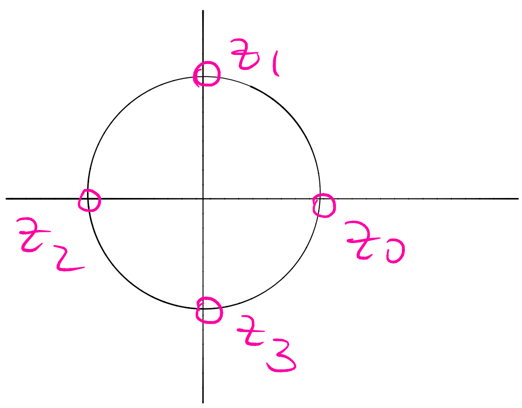
Sostituendo,

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 - y^2 - 2xyi + 4y^2 - 1 - 1 = 0$$

cioè

$$2x^2 + 2y^2 - 2 = 0$$

che è l'equazione della circonferenza $x^2+y^2=1$, da cui devo togliere i 4 punti corrispondenti a $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$



Una circonf. privata di 4 punti

ESERCIZIO 3

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\log(n+2)-\log(n)\right)(n!+n^2)}{(n-1)!+n^5}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{2n}$$

tratto separatamente i vari fattori

- $\log(n+2)-\log(n) = \log\left(\frac{n+2}{n}\right) = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ per $n\to\infty$

(ricordando il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$)

- $n!+n^2 = n!\left(1+\frac{n^2}{n!}\right) \sim n!$ per $n\to\infty$ perché $\frac{n^2}{n!} \to 0$

- $(n-1)!+n^5 = (n-1)!\left(1+\frac{n^5}{(n-1)!}\right) \sim (n-1)!$ per $n\to\infty$

- $\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{2n} = \exp\left(2n\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)$

$$\sim \exp\left(2n\cdot\frac{2}{n^2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{4}{n}\right) \xrightarrow[\text{per } n\to\infty]{} 1$$

e quindi

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n!}^{(n-1)!}}{(n-1)!} \exp\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \exp\left(\frac{4}{n}\right) = 2$$

ESERCIZIO 4

$\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha n} + \sin(e^{2n})\right) \cdot \left(2n! + \log(n^3) + n^7\right) \cdot \arctan\left(\frac{1}{n^{7n}}\right)$$

è una serie a termini positivi

infatti $\sin(e^{2n}) \geq -1$ e quindi

$n^{\alpha n} + \sin(e^{2n}) \geq n^{\alpha n} - 1 \geq 0$
$\forall n \geq 1$

Osservo che

$\left(n^{\alpha n} + \sin(e^{2n})\right) \sim n^{\alpha n}$

$\left(2n! + \log(n^3) + n^7\right) \sim 2n!$ (gerarchia degli infiniti)

$\arctan\left(\frac{1}{n^{7n}}\right) \sim \frac{1}{n^{7n}}$ (limite notevole di arctan)

e quindi confronto asintoticamente la serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha n}\, 2n!}{n^{7n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^{(\alpha-7)n}\, 2n!}_{b_n}$$

che conviene studiare con il criterio asintotico del rapporto, essendoci un termine fattoriale

(il criterio asintotico della radice con il fattoriale richiederebbe l'uso della formula di De Moivre-Stirling, che non è stata vista)

Quindi studio $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2}\,(n+1)!\,(n+1)^{(\alpha-7)(n+1)}}{\cancel{2}\,n!\;n^{(\alpha-7)n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)\,\frac{(n+1)^{(\alpha-7)n}\cdot(n+1)^{\alpha-7}}{n^{(\alpha-7)n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\alpha-6}\,\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(\alpha-7)n}}_{\downarrow\ e^{\alpha-7}} =: L$$

$$L = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>6 \\ e^{-1} & \text{se } \alpha=6 \\ 0 & \text{se } \alpha<6 \end{cases}$$

Quindi $L<1 \iff \alpha\le 6$. Per tali valori converge la serie di partenza

ESERCIZIO 5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{2x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \dfrac{e^{\alpha x^2} - \cos(x) + \sin(x^3)}{3x^2} & x < 0 \end{cases}$$

Condizione affinché $x_0 = 0$ sia punto di discontinuità eliminabile:

$$L_+ = \lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{deve coincidere con}$$

$$L_- = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$(\text{e } L_+ = L_- \neq f(0))$$

$$L_+ = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$L_- = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos(x) + \sin(x^3)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\alpha x^2} - 1 + 1 - \cos(x) + \sin(x^3)}{3x^2}$$

ricordo

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha x^2}{3x^2} = \frac{\alpha}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

$\sin(x^3) \sim x^3$ e quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{3x^2} = 0$

allora $L = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6}$

Ponendo $\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ricavo.

$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3} \iff \alpha = 1$