Derivate – (I)

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Definizione: punto interno

Sia I intervallo non vuoto. Diciamo che $x_0 \in I$ è interno ad I se esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$.

Definizione: rapporto incrementale

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno ad I. Dato $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, chiamiamo rapporto incrementale di f relativo a x_0 e all'incremento h il quoziente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione: derivata

Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, e x_0 **un punto interno** ad I.

Se esiste (finito o no) in $\overline{\mathbb{R}}$ il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso viene chiamato *derivata* di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0.

- **Notazione alternative per $f'(x_0)$:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0).$$

- **Esempio:** data $f(x) = x^2 + 3$, calcoliamo $f'(1)$.

Definizione: funzione derivata

Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, tale che

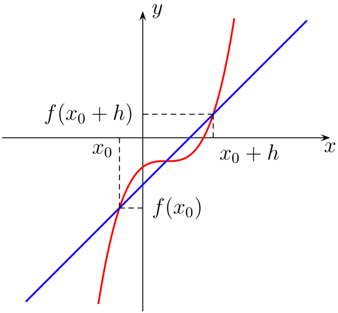
$$I' = \{x \in I : \quad f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset.$$

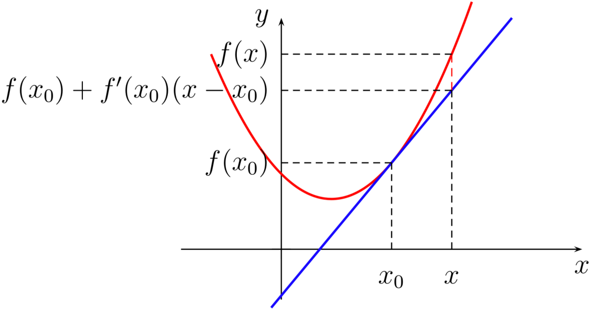
Notare: $I' \subseteq I$ e in generale $I' \neq I$.
Chiamiamo *funzione derivata di* f la funzione

$$\begin{array}{cccc} f': & I' & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

- **Esempio:** data $f(x) = x^2 + 3$

Significato geometrico della derivata




y
$f(x)$
$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$f(x_0)$
x_0
x
x

Derivate delle funzioni elementari

Derivata della funzione costante

Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{f(x) = c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.}$$

Allora

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.}$$

Derivata della funzione modulo

Derivata della funzione potenza

$$\text{Sia} \quad \boxed{f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.}$$

Allora

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Derivata della funzione reciproco

Sia $$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Allora

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Derivata della funzione esponenziale

Sia $\boxed{f(x) = a^x, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.}$

Allora $\boxed{f'(x) = a^x \log_e a \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.}$

Derivata della funzione seno

$$\text{Sia} \quad \boxed{f(x) = \sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

$$\text{Allora} \ \boxed{f'(x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.}$$

Derivate destra e sinistra

Definizione

Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 **un punto interno ad** I.

(i) Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(cioè, il limite SINISTRO del rapporto incrementale), esso viene detto **derivata sinistra** di f in x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

(ii) Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(cioè, il limite DESTRO del rapporto incrementale), esso viene detto **derivata destra** di f in x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

Teorema: legame fra la derivata e le derivate unilatere

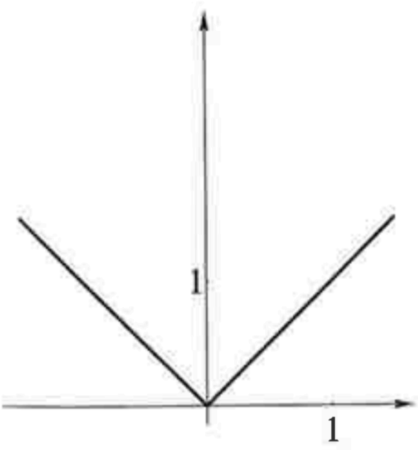
Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 **un punto interno ad** I. Allora

$$\exists\, f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$$

se e solo se

$$\exists\, f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}},\ \exists\, f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Rivediamo la funzione modulo



Proposizione: derivabilità implica continuità

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 **un punto interno ad** I. Allora

$$f \text{ derivabile in } x_0 \;\Rightarrow\; f \text{ continua in } x_0.$$

- **NOTA BENE:** NON VALE

$$f \text{ continua in } x_0 \;\Rightarrow\; f \text{ derivabile in } x_0.$$

Esempio

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

f è continua in $x_0 = 0$, ma f NON è derivabile: $\boxed{\exists\, f'(0) = +\infty}$.

Regole di derivazione

Teorema di linearità

Sia I intervallo e x_0 **punto interno a** I. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0, allora

- $\forall\, c \in \mathbb{R}$ la funzione $c \cdot f$ è derivabile in x_0, con

$$(cf)'(x_0) = c(f'(x_0)),$$

- la funzione $f + g$ è derivabile in x_0, con

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh(x) = \cosh(x)}.$$

Teorema: derivata del prodotto (Criterio di Leibniz)

Sia I intervallo e x_0 **punto interno a** I. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili in x_0, allora anche $f \cdot g$ è derivabile in x_0, e si ha

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Teorema: derivata della composizione di funzioni

Siano I e J intervalli $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$,

x_0 un **punto interno a** I tale che
$f(x_0)$ **è interno a** J.

Se

- f è derivabile in x_0
- g è derivabile in $f(x_0)$

allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Verifichiamo che

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \neq 0}$$

Conseguenze del teorema sulla derivata della composizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora:

1. se $f(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, allora

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f^2(x)}\, f'(x) \quad \forall\, x \in I.}$$

2. $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^f) = e^f\, f'}$.
3. $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin f) = \cos f\, f'}$.
4. $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos f) = -\sin f\, f'}$.
5. se $f > 0$, allora $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log(f)) = \dfrac{1}{f}\, f'}$.

Calcoliamo la derivata di

$$\boxed{f(x) = x^\alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ in } \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)}$$

Più in generale, date

$$f, g : I \to \mathbb{R} \quad \text{derivabili tali che } f(x) > 0 \; \forall x \in I,$$

Teorema: derivata del quoziente

Sia I intervallo e x_0 **punto interno a** I. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$. Allora

$$\frac{f}{g} \text{ è derivabile in } x_0,$$

e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Esempio

$$f(x) = \tan(x)$$

Derivazione della funzione inversa

Teorema
Sia I intervallo,

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ continua e } \underline{\text{invertibile}} \text{ in } I.$$

Sia x_0 **interno ad** I.
Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha

$$\frac{d}{dy}\left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{cioè} \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Osservazioni:

1. La formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0) = \pm\infty$

2. Se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} **è derivabile in** $f(x_0)$.

Esempio:

Verifichiamo che, per $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, si ha

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a(x) = \frac{1}{x \log_e(a)}}$$

Esempio:

Verifichiamo che

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{for } x \in]-1,1[, \\ +\infty & \text{for } x = \pm 1. \end{cases}}$$

In particolare, notare che $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è derivabile solo su $]-1,1[$.

• Usando il teorema sulla derivata della funzione inversa, si verifica che

- $$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in]-1,1[}$$

  mentre $\arccos'(x) = -\infty$ per $x = \pm 1$.

- $$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.}$$

Esercizio 1

Dominio e derivata di

$$f(x) = (\ln x)^{\arctan(x)}$$

Esercizio 2

Siano

$$f(x) = \exp(8 - 8x) - 8\ln(x) - x^5 \qquad \text{con } \mathrm{dom}(f) =$$

e $g = f^{-1}$. Calcolare $\frac{1}{g'(0)}$.

Esercizio 3

Calcolare $(f^{-1})'(-4)$, con

$$f(x) = \exp(4\arctan(x+1)) + 4x^5 + x\,.$$