Derivate – (II)

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Classificazione dei punti di non derivabilità

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 **un punto interno ad I** tale che

- <u>f è continua in x_0</u>
- <u>f non è derivabile in x_0.</u>

Allora si presentano questi casi

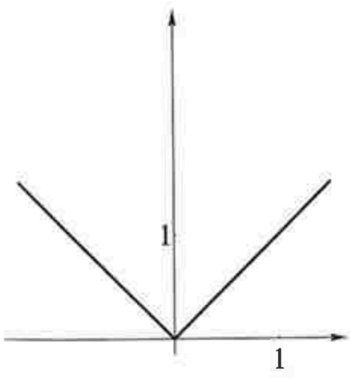
1. **Punto angoloso**;
2. **Punto a tangente verticale**;
3. **Cuspide**

Definizione

Diciamo che x_0 è un punto angoloso se

$$\exists f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad (f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0))$$

e almeno una delle due è finita.

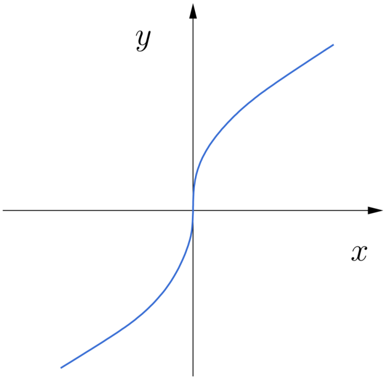


Un altro esempio di punto angoloso

Definizione

Diciamo che x_0 è un punto di flesso a tangente verticale se

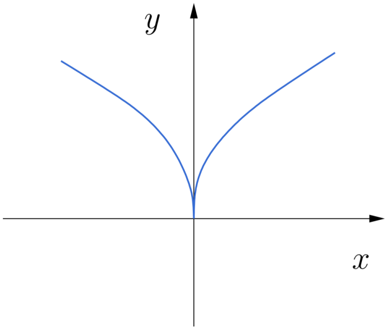
$$\exists f'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$$



Definizione

Diciamo che x_0 è un punto di cuspide se

$$f'_-(x_0),\ f'_+(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}, \quad f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$$



Osservazione: In tutti i casi classificati almeno una, fra derivata destra e derivata sinistra della funzione nel punto, esiste (finita o infinita).
Nel prossimo esempio, f è continua in x_0, ma

$$\nexists\, f'_-(x_0), \quad \nexists\, f'_+(x_0)$$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

1. f è continua in $x_0 = 0$:

2. $\nexists\, f'_+(0)$, infatti

Analogamente si vede che $\nexists\, f'_-(0)$.

Diamo uno strumento per lo studio di forme indeterminate

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

o riconducibili a esse.

Il teorema di de l'Hôpital per le f.i. $\frac{0}{0}$

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funzioni continue su (a, b), e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Supponiamo inoltre che:

1. f, g **derivabili** in $(a, b) \setminus \{x_0\}$;
2. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$;
3. ESISTA il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}$.

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}.$$

Osservazioni:

1. È possibile sostituire $\lim_{x\to x_0}$ con $\lim_{x\to x_0^-}$ o $\lim_{x\to x_0^+}$

2. È possibile sostituire x_0 con a o b (estremi intervallo di definizione)

3. L'ipotesi $f(x_0) = g(x_0) = 0$ può essere sostituita da

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{con } x_0 \text{ pto di accum. per } \mathrm{dom}(f).$$

4. Il Teor. di de l'Hôpital vale anche per
   - $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivabili e per $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$
   - $f, g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ derivabili e per $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Teorema di de l'Hôpital per le f.i. $\frac{\infty}{\infty}$

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funzioni continue su (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo inoltre che:

1. f, g **derivabili** su $(a,b) \setminus \{x_0\}$;
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$;
3. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$;
4. <u>ESISTA</u> il limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}$.

Allora <u>esiste</u> anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}.$$

Vale anche per $\lim_{x \to a^+}$, $\lim_{x \to b^-}$, $\lim_{x \to x_0^+}$, $\lim_{x \to x_0^-}$, e limiti all'infinito.

Applicazione di de l'Hôpital I: limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$(\alpha > 0) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

Applicazione di de l'Hôpital II: forme indeterminate riconducibili a forme $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} x \ln |x| \quad \text{f.i. } (0 \cdot \infty)$$

Esempio:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

(per questo si usa la convenzione $0^0 = 1$).

Esempio:

$$\lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{1/x} \quad \text{f.i.} \ (1^{\infty})$$

A volte è necessario applicare il Teorema di de l'Hôpital più volte...

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x}$$

Notare che l'uguaglianza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

è **condizionata** al fatto che ESISTA il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$!!

Se $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, l'uguaglianza fra i due limiti **può non valere**, e si deve risolvere la f.i. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in altro modo!!

Esempio:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin x.$$

Un'applicazione teorica del Teorema di de L'Hôpital

Il teorema del limite della derivata

Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in a e derivabile in (a, b). Se esiste, finito o no, il limite $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, allora esiste anche $f'_+(a)$ e si ha che

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$