Derivate – (III)

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Derivate di ordine successivo

Sia

$$f : I \to \mathbb{R} \quad \text{derivabile su } I.$$

Quindi è ben definita la funzione derivata

$$f' : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

Definizione: derivata seconda

Sia $x_0 \in I$ **punto interno**. Se esiste

$$\text{la derivata di } f' \text{ in } x_0 \in I, \text{ cioè}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = (f')'(x_0),$$

allora essa si chiama *derivata seconda* di f in x_0, e si denota con

$$f''(x_0) \quad \text{o} \quad f^{(2)}(x_0).$$

Diciamo f è *derivabile due volte in* x_0 se $\exists\, f''(x_0) \in \mathbb{R}$.

Esempi:

1. $f(x) = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = x^2 + 4x - 2 + \cos(x) + 3\ln(x), \qquad x \in (0, +\infty)$

Esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) := x|x|$$

Definizione: derivata k-esima

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Le sua derivate di ordine $k \in \mathbb{N}$ si definiscono per induzione:

- *derivata* 0-*ima* di f: si definisce $\boxed{f^{(0)} = f}$;
- per $k \geq 1$, la derivata k-esima $f^{(k)}$ è la derivata (prima) della derivata la $(k-1)$-esima $f^{(k-1)}$:

$$f^{(k)}(x_0) = D(f^{(k-1)})(x_0).$$

L'indice k è detto l'ordine di derivazione.
Diciamo f è *derivabile k volte* in x_0 se $\exists\, f^{(k)}(x_0) \in \mathbb{R}$.

Esempio:

Data $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}^+$, si ha $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = a^x (\ln(a))^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esempio:

Data $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, Allora $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(4k)}(x) = \sin x \qquad f^{(4k+1)}(x) = \cos x$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\sin x \qquad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

Proprietà di regolarità

Funzioni C^k

Sia I intervallo. Per $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con $\mathrm{C}^k(I)$ l'insieme

$$\mathrm{C}^k(I) = \big\{ f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ è derivabile } k \text{ volte su } I \text{, e } \\ f^{(k)} : I \to \mathbb{R} \text{ è continua su } I. \big\}$$

Ogni $f \in \mathrm{C}^k(I)$ è detta *di classe* C^k *su* I.
Quindi:

- $\mathrm{C}^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;
- $\mathrm{C}^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I, con $f' : I \to \mathbb{R}$ continua su I;
- $\mathrm{C}^2(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili due volte su I, con $f'' : I \to \mathbb{R}$ continua su I.....

Si ha $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{C}^k(I) \subset \mathrm{C}^{k-1}(I)$$

L'inclusione $\mathrm{C}^k(I) \subset \mathrm{C}^{k-1}(I)$ è **stretta**

Esempio

Le inclusioni

$$\ldots \subset \mathrm{C}^2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}^0(\mathbb{R}) \text{ sono strette.}$$

Proprietà di struttura degli spazi $\mathrm{C}^k(I)$

Ragionando per induzione, si estende il teorema di linearità alle derivate k-esime. In particolare,

$$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{C}^k(I), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathrm{C}^k(I).$$

Definizione: $\mathrm{C}^\infty(I)$

Sia I intervallo. Per $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con $\mathrm{C}^\infty(I)$

$$\mathrm{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{C}^k(I) = \Big\{ f : I \to \mathbb{R} : \ \boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}} \ f \text{ è derivabile } k \text{ su } I, \text{ e } f^{(k)} : I \to \mathbb{R} \text{ è continua su } I \Big\}$$

- I polinomi, a^x ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), $\sin x$, $\cos x$, appartengono a $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- La funzione $\log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) appartiene a $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$.