Appunti di
Analisi Matematica 1

Riccarda Rossi

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2020/21

Indice

Premessa

Questi appunti intendono

- essere di supporto agli studenti, per la rielaborazione degli appunti presi a lezione;
- integrare, con ulteriori esempi, commenti, e dimostrazioni, il materiale presentato a lezione e ad esercitazione (si vedano le sezioni di *Appunti operativi*).

Lo scopo di queste note è quindi quello di facilitare la comprensione e, al contempo, l'*approfondimento* di quanto appreso dallo studente a lezione.

Tuttavia, si sottolinea che questi appunti non possono e non vogliono sostituire un libro: non hanno sufficienti figure, né abbastanza esempi; non hanno esercizi! Più in generale, non hanno il respiro di un libro.

Pertanto, si consiglia allo studente di perfezionare il proprio studio su un libro di testo: fra quelli proposti, il più vicino all'impostazione del corso è il *Analisi Matematica 1 –Teoria e applicazioni* (autori: A. Marson, P. Baiti, F. Ancona, B. Rubino; casa editrice Carocci, Roma).

Desidero ringraziare i colleghi Davide Catania, Alessandro Giacomini, e in particolar modo Paola Trebeschi, per aver condiviso con me le figure presentate in questo libro, e parte del materiale. Infine, sarò sempre grata al mio primo docente di Analisi Matematica, il Prof. Gianni Gilardi dell'Università di Pavia, per avermi insegnato l'Analisi 1 con infinita competenza, maestria, e passione.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Elementi di logica matematica

Una condizione basilare per poter apprendere la matematica è acquisire correttamente il cosiddetto "linguaggio matematico". In effetti, in matematica la verifica di un'affermazione non avviene sperimentalmente, ma dandone una **dimostrazione**, e dimostrare un'affermazione (in questo contesto si usa anche il termine *tesi*) significa provarne la verità facendola discendere, attraverso una catena di passaggi logici, da un altro asserto (*ipotesi*), di cui si presuppone la verità. Per poter effettuare correttamente questi passaggi (cioè sviluppare il *processo deduttivo*), è necessario impiegare rigorosamente un linguaggio che non ammetta ambiguità. Tale è il linguaggio matematico, basato sulla logica, della quale è opportuno apprendere i primi rudimenti.

Proposizioni e predicati

Gli oggetti basilari della logica sono le proposizioni.

Definizione 1.1.1 (Proposizione)**.** *Chiamiamo* proposizione *una frase di senso compiuto della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Denotiamo la generica proposizione con i simboli* $\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$.

Esempio 1.1.2.
1. $\mathcal{P}_1$: "Quest'aula contiene solo studenti di Ingegneria dell'Automazione Industriale" (VERA);
2. $\mathcal{P}_2$: "Ogni anno, il 17 Settembre a Cremona nevica" (FALSA);
3. $\mathcal{P}_3$: "Che ora è?" (NON È UNA PROPOSIZIONE);
4. $\mathcal{P}_4$: $1 + 1 = 2$ (VERA);
5. $\mathcal{P}_5$: "11 è un numero dispari" (VERA);
6. $\mathcal{P}_6$: "60 è un numero primo[1]" (FALSA)......

Ricordiamo che:

- Una proposizione può essere VERA o FALSA, ma NON, contemporaneamente, vera e falsa.
- Una frase che non dà informazioni NON è una proposizione.

[1] cioè un numero naturale $n > 1$ i cui unici divisori sono 1 e n.

Definizione 1.1.3 (Predicato)**.** *Chiamiamo* predicato *una frase di senso compiuto che contiene una o più variabili libere. Denotiamo con i simboli $\mathcal{P}(x)$ o $\mathcal{Q}(x)$ un predicato dipendente dalla variabile x, (con $\mathcal{P}(x,y)$ o $\mathcal{Q}(x,y)$ un predicato dipendente dalle variabili x, y, con $\mathcal{P}(x,y,z)$ o $\mathcal{Q}(x,y,z)$ un predicato dipendente dalle variabili x, y, z.....)*

Chiaramente, il valore di verità del predicato $\mathcal{P}(x)$ ($\mathcal{P}(x,y)$...., risp.) dipende dal valore assunto dalla variabile x (da x, y...., risp.). Per trasformare un predicato $\mathcal{P}(x)$ in una proposizione $\mathcal{P}$, è quindi sufficiente assegnare un valore alle variabili libere.

Esempio 1.1.4.

1. $\mathcal{P}_1(x)$: "L'aula x contiene solo studenti di Disegno Industriale";
2. $\mathcal{P}_2(x,y)$: "Ogni anno, nel giorno x e nel luogo y nevica";
3. $\mathcal{P}_3(x,y)$: $x+y=2$;
4. $\mathcal{P}_4(x)$: "x è un numero dispari";
5. $\mathcal{P}_5(x)$: "x è un numero primo"......

Quantificatori

Un altro modo per rendere i predicati degli oggetti a cui attribuire in modo inequivocabile un valore di verità/falsità (e cioè, trasformare i predicati in *proposizioni*) è usare i cosiddetti *quantificatori*:

- $\forall$: che si legge *Per ogni* (**quantificatore universale**);
- $\exists$: che si legge *Esiste* (**quantificatore esistenziale**);
- $\exists!$: che si legge *Esiste ed è unico.*

Esempio 1.1.5.

1. Consideriamo il predicato "Per ogni numero naturale n, n è primo". Pur dipendendo da una variabile n, a questo predicato si può attribuire inequivocabilmente il valore VERO/FALSO, e quindi è di fatto una proposizione. In questo caso, ovviamente tale proposizione è FALSA;
2. "Esiste un numero naturale n tale che n è primo" (VERA);
3. "Ogni numero dispari è divisibile per 3" (FALSA).

Osservazione 1.1.6. Si noti che

- $\exists$ significa *Esiste almeno uno*,
- $\exists!$ significa *Esiste ed è unico.*

Osservazione 1.1.7 (Attenzione all'ordine dei quantificatori)**.** In una proposizione/predicato, è essenziale l'ordine con cui compaiono i vari quantificatori. In altri termini, invertire l'ordine di due quantificatori, di diverso tipo, adiacenti, può alterare, anche pesantemente, il senso della frase. Ad esempio:

- *In ogni luogo c'è almeno un giorno all'anno in cui piove*, che si può scrivere più sinteticamente come
$$\forall \text{luogo} \quad \exists \text{giorno all'anno: piove}$$
(e questa proposizione è VERA). Invertendo l'ordine dei quantificatori si ottiene
$$\exists \text{giorno all'anno:} \quad \forall \text{luogo} \quad \text{piove},$$
cioè *C'è almeno un giorno all'anno tale che in ogni luogo piove*, che è FALSA.

- A volte la distinzione è più sottile, anche se comunque significativa:

  In questo libro giallo, per ogni assassinio commesso esiste un unico colpevole,

  da confrontarsi con

  In questo libro giallo, esiste un unico colpevole per ogni assassinio commesso.

- Partiamo da una affermazione FALSA: *Esiste un numero intero più grande di ogni altro numero intero*, cioè
$$\exists\, y \ \text{ numero intero: } \ \forall\, \text{intero } x \quad y > x\,.$$
  Invertendo l'ordine dei quantificatori otteniamo
$$\forall\, \text{intero } x \ \ \exists\, y \ \text{ numero intero: } \qquad y > x\,,$$
  che è VERA.

Connettivi logici

I connettivi logici che ora introduciamo trasformano una o più proposizioni/predicati in altre proposizioni/predicati, **il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza**.

NON (negazione): *questo connettivo trasforma una data proposizione* $\mathcal{P}$ *(predicato* $\mathcal{P}(x)$*) nella proposizione* non($\mathcal{P}$) *(nel predicato* non($\mathcal{P}(x)$)*), che ha contenuto* <u>*contrario*</u> *a* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$*.*
Ad esempio: "Oggi piove" diventa "Oggi non piove".

- <u>Una sola</u> fra $\mathcal{P}$ e non($\mathcal{P}$) è vera: vale cioè il principio del terzo escluso[2]
- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide, cioè
$$\text{non}(\text{non}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}\,.$$
  Ad esempio: "Non è vero che Bin Laden non sia un criminale"= "Bin Laden è un criminale".

E (congiunzione): *date due proposizioni* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$*, (due predicati* $\mathcal{P}(x)$ *e* $\mathcal{Q}(x)$*),*
$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}$$
è la proposizione nella quale valgono <u>*sia*</u> *la prima,* <u>*sia*</u> *la seconda.*
Quindi, "$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$" è vera se e solo se sia $\mathcal{P}$ sia $\mathcal{Q}$ sono vere.
Ad esempio: "Oggi piove e fa freddo".

O (disgiunzione): *date due proposizioni* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$*, (due predicati* $\mathcal{P}(x)$ *e* $\mathcal{Q}(x)$*),*
$$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}$$
è la proposizione nella quale vale <u>*almeno*</u> *delle due.*
Quindi, "$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$" è vera se e solo almeno una fra $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è vera.
Si noti che, scrivendo $\mathcal{P}$o$\mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe: in ogni caso, almeno una delle due lo è. Per esempio: se dico che "Ogni mio cugino gioca o a tennis o a basket", non escludo di avere un cugino molto sportivo che gioca sia a tennis, sia a basket.

$\Longrightarrow$ (implicazione): *date due proposizioni* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$*, (due predicati* $\mathcal{P}(x)$ *e* $\mathcal{Q}(x)$*), il connettivo implicazione crea la nuova proposizione* $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$*, che si legge*

[2]che caratterizza la cosiddetta logica bivalente, alla base dei calcolatori elettronici.

- "$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$",
- "se $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{Q}$".

e che ha il seguente significato: se $\mathcal{P}$ è vera, anche $\mathcal{Q}$ è vera.
Ad esempio:

- "Se l'acqua viene portata alla temperatura di 0 gradi celsius, allora si ghiaccia."
- "Se un numero naturale n è divisibile per 4, allora n è pari."
- "Se una figura piana è un quadrato, allora le sue diagonali sono perpendicolari."
- $3x + 5 = 17 \implies x = 4$.

Un **esempio matematico** (che ritroveremo più tardi): Data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$,

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Si usano anche le seguenti locuzioni per esprimere $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$:

- "$\mathcal{P}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{Q}$"[3],
- "$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$"[4].

Ad esempio, la proposizione
"Se fa freddo, accendo il riscaldamento."
si riesprime come
"Condizione sufficiente affinché io accenda il riscaldamento è che faccia freddo."

Non si confonda mai "condizione sufficiente" con "condizione necessaria": per esempio, la proposizione "se passo l'esame di Analisi Matematica domani, ti porto al cinema" equivale a "condizione sufficiente per portarti al cinema è che domani io passi l'esame di Analisi Matematica", ed equivale anche a "portarti al cinema è condizione necessaria per la mia promozione all'esame di Analisi Matematica domani." Ha <u>tutt'altro significato</u> la proposizione "Portarti al cinema è una condizione sufficiente affinché io passi l'esame di Analisi Matematica domani"!!!!

$\Longleftrightarrow$ (doppia implicazione): *date due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, (due predicati $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$), il connettivo doppia implicazione crea la nuova proposizione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$, che equivale a*

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q} \Longleftarrow \mathcal{P}$$

e che si legge "$\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{Q}$". In altri termini, la proposizione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ **è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ hanno lo stesso valore di verità** (cioè sono entrambe vere o entrambe false). Altre locuzioni sono

- "$\mathcal{P}$ è condizione necessaria e sufficiente per $\mathcal{Q}$",
- "$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$".

Ad esempio:

- "Condizione necessaria e sufficiente affinché il Brescia vinca contro l'Atalanta è che il Brescia segni un numero di gol strettamente maggiore dell'Atalanta";
- Dati due numeri reali a e b, si ha

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ o } b = 0.$$

[3]in altri termini, è sufficiente che valga $\mathcal{P}$ affinché valga anche $\mathcal{Q}$.
[4]in altri termini, se vale $\mathcal{P}$, necessariamente deve valere anche $\mathcal{Q}$.

Negazione di proposizioni con quantificatori e connettivi

Apprendiamo alcune regole **fondamentali** per

Negare proposizioni/predicati contenenti quantificatori:

NON $(\forall)$ = $\exists$ **NON**

cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\forall\, x \;\; \mathcal{P}(x)) &\iff \text{“non è vero che } \mathcal{P}(x) \text{ è sempre vera”} \\ &\iff \text{“c'è almeno un } x \text{ per il quale } \mathcal{P}(x) \text{ è falsa”} \\ &\iff \exists\, x : \;\; \text{non}(\mathcal{P}(x))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio:

- “Non è vero che ogni ragazzo di questa classe è senza gli occhiali”, cioè “Esiste un ragazzo in questa classe che porta gli occhiali”;
- la negazione di “In Irlanda tutti i giorni dell'anno piove” è la proposizione “C'è almeno un giorno all'anno in Irlanda in cui non piove”.
  Quindi, **per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata:** si parla allora di un controesempio.

NON $(\exists)$ = $\forall$ **NON**

cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\exists\, x \;\; \mathcal{P}(x)) &\iff \text{“non è vero che esiste un } x \text{ per cui } \mathcal{P}(x) \text{ è vera”} \\ &\iff \text{“per ogni } x \; \mathcal{P}(x) \text{ è falsa”} \\ &\iff \forall\, x : \;\; \text{non}(\mathcal{P}(x))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio:

- “Non esiste nessuno stato europeo il cui nome inizi per *z*”, cioè “Tutti gli stati europei hanno nomi che iniziano per lettere diverse da *z*”;
- La negazione di “$\exists\, x > 2 \;\; : x^2 \leq 4$” (FALSA) è “$\forall\, x > 2, \;\; x^2 \geq 4$” (VERA).

NON $(\forall + \exists)$ = $\exists + \forall$ **NON**

cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\forall\, x \;\; \exists\, y \;\; : \;\; \mathcal{P}(x,y)) &\iff \text{“non è vero che per ogni } x \text{ esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x,y) \text{ è vera”} \\ &\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale è falso che [esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x,y) \text{ è vera]”} \\ &\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale per ogni } y \; \mathcal{P}(x,y) \text{ è falsa”} \\ &\iff \exists\, x \;\; : \forall\, y \;\; \text{non}(\mathcal{P}(x,y))\,. \end{aligned}$$

Ad esempio: “È falso che ogni padre bresciano abbia almeno una figlia bionda” equivale a “esiste un padre bresciano tale che tutte le sue figlie non sono bionde”..

NON $(\exists + \forall)$ = $\forall + \exists$ **NON**

Ad esempio, la proposizione (che esprime la cosiddetta Proprietà di Archimede dei numeri naturali, si veda la (4.2.2))

“Non (esiste un numero naturale x tale che per ogni naturale y si abbia $y \leq x$)”

è equivalente a

“per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che si abbia $y > x$”.

Negare proposizioni/predicati contenenti connettivi:

non($\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$) = [non($\mathcal{P}$) o non($\mathcal{Q}$)]
Per esempio: "Non è vero che entrambe le figlie del medico sono alte" equivale a "Almeno una delle due figlie del medico non è alta".

non($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$) = [non($\mathcal{P}$) e non($\mathcal{Q}$)]
Per esempio: "Non è vero che mio fratello, a cena, mangia carne o pesce" equivale a "A cena, mio fratello non mangia né carne, né pesce".

non($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) = [$\mathcal{P}$ e non($\mathcal{Q}$)]
Ad esempio: "È falso che Lucia, se prende correnti d'aria fredda, si ammala" equivale a "Lucia prende correnti d'aria fredda e non si ammala".

Infine, osserviamo che

$$\boxed{\text{l'implicazione } \mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \text{ è equivalente a } [\text{non}(\mathcal{Q}) \implies \text{non}(\mathcal{P})]} \tag{1.1.1}$$

In altri termini, dire $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, cioè "$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$", è equivalente a dire "se non vale $\mathcal{Q}$, non può valere neppure $\mathcal{P}$".

La dimostrazione per assurdo

L'equivalenza (1.1.1) è alla base della cosiddetta *dimostrazione per assurdo.*

Vogliamo dimostrare che, se assumiamo come vera una data ipotesi $\mathcal{P}$, allora vale la tesi $\mathcal{Q}$, cioè che $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Ciò è equivalente a dimostrare che non($\mathcal{Q}$) $\implies$ non($\mathcal{P}$). Allora, nella dimostrazione per assurdo si procede così: si parte dall'ipotesi $\mathcal{P}$, e si nega la tesi che si vuole dimostrare, cioè non($\mathcal{Q}$). Dopodiché si sviluppa un ragionamento che porterà a dedurre da non($\mathcal{Q}$) che vale non($\mathcal{P}$)[5]. Ma $\mathcal{P}$ e non($\mathcal{P}$) non possono sussistere contemporaneamente. Quindi non($\mathcal{P}$) è FALSA. Abbiamo quindi provato che, assumendo non($\mathcal{Q}$), si è giunti a non($\mathcal{P}$) (FALSA). Ma allora anche non($\mathcal{Q}$) è FALSA, quindi $\mathcal{Q}$ è VERA.

Per esempio, dimostriamo il seguente

Teorema 1.1.8. Ipotesi: *a e b sono due numeri naturali strettamente positivi, il cui prodotto è un numero dispari.*
Tesi: *Sia a sia b sono numeri dispari.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che valga l'ipotesi e neghiamo la tesi: quindi

$$a \cdot b \text{ è un numero dispari e almeno uno fra } a \text{ o } b \text{ non è dispari.}$$

Per esempio supponiamo che a sia pari (procederemmo analogamente se supponessimo b pari). Naturalmente, a pari significa che $a = 2p$, ove p è un numero naturale strettamente positivo. Ma allora $a \cdot b = 2p \cdot b$, quindi $a \cdot b$ è un intero pari, contro la nostra ipotesi. Assurdo, quindi vale la tesi. □

1.2 Elementi di teoria degli insiemi

Chiamiamo *insieme* una certa entità composta di oggetti elementari. Sinonimi di *insieme* sono i termini: *collezione*, *famiglia*, *classe*. Gli oggetti che costituiscono un insieme sono detti *elementi.*

[5] o a dedurre che vale un'altra affermazione $\mathcal{R}$ che sappiamo essere FALSA.

Notazioni. Useremo:

- una lettera maiuscola (ad es.: A, B, $C\ldots$) per denotare un dato insieme,
- lettere minuscole (ad es.: a, b, c, $x\ldots$) per denotare gli elementi di insieme.

Dati x ed E,

- $x \in E$ significa "x appartiene ad E",
- $x \notin E$ significa "x non appartiene ad E".

Il simbolo $\emptyset$ denota l'insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto*.
Chiamiamo *cardinalità* di un insieme il numero dei suoi elementi.

Descrizione degli insiemi. È possibile descrivere un generico insieme in due modi:

1. elencandone tutti gli elementi, con ciascun elemento indicato <u>una sola volta</u>, ad es. $A = \{-1, 1\}$. Si noti che l'ordine con cui si elencano gli elementi è inessenziale, pertanto
$$A = \{-1, 1\} = \{1, -1\}.$$
Si noti che A ha cardinalità 2.
Ulteriori esempi sono i seguenti insiemi numerici:
   (a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$: l'insieme dei *numeri naturali*;
   (b) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$: l'insieme dei *numeri interi*;
   (c) $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$: l'insieme dei *numeri naturali pari*.

   Si noti che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e P hanno infiniti elementi: in tal caso si dice che hanno *cardinalità infinita*.
2. Oppure si può descrivere un insieme come la famiglia di tutti gli elementi verificanti una certa proprietà (o predicato). In altri termini, dato un insieme ambiente $\mathcal{U}$ e una proprietà $\mathscr{P}$, possiamo definire un insieme $\mathcal{A}$ come la famiglia di tutti gli elementi $x \in \mathcal{U}$ che rendono vera la proprietà $\mathscr{P}$, cioè gli x per i quali vale $\mathscr{P}(x)$:
$$\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{U} : \ \mathscr{P}(x)\}$$
(quando si definisce un insieme $\mathcal{A}$, si usa la notazione $\mathcal{A} := \ldots$; il simbolo $:=$ viene in generale usato nelle definizioni). Ad esempio,
   - $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{N} : \ x < 3\} = \{0, 1, 2\}$;
   - $\mathcal{A}_2 = \big\{x \in \mathbb{Z} : \ x^2 = 1\big\} = \{-1, 1\}$.

L'inclusione. Siamo I, E due insiemi. Diciamo che $E \subset I$ (cioè E *è un sottoinsieme di* I, o anche E *è incluso in* I) se
$$\text{per ogni } x \in E \text{ si ha che } x \in I$$
(in simboli: $x \in E \implies x \in I$). Chiaramente, se $E = I$ si ha in particolare che $E \subset I$ e $I \subset E$. Di fatto, si ha che
$$E = I \iff E \subset I \text{ e } I \subset E\,.$$
Se $E \subset I$ e $E \neq I$, diciamo che E è un <u>sottoinsieme proprio</u> di I; in simboli, questo si traduce con
$$\forall\, x \in E\,, x \in I \quad \text{e} \quad \exists\, y \in I : \ y \notin E$$
(la prima proposizione afferma che E è incluso in I, e la seconda che I non è incluso in E). Scriveremo $E \subsetneq I$.

Si conviene che, dato un qualsiasi insieme E, si abbia $\emptyset \subset E$ e $E \subset E$ ($\emptyset$ e E vengono detti *sottoinsiemi impropri* di E).

Operazioni fra insiemi. Dati A e B (sottoinsiemi di un certo insieme ambiente che non specifichiamo), possiamo definire i seguenti insiemi:

l'*insieme unione*
$$A \cup B := \{x : \quad x \in A \text{ o } x \in B\};$$

l'*insieme intersezione*
$$A \cap B := \{x : \quad x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(se $A \cap B = \emptyset$, si dice che A e B sono disgiunti);

l'*insieme differenza* (di A e B)
$$A \setminus B := \{x : \quad x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Se A e X sono due insiemi con $A \subset X$, allora l'insieme $X \setminus A$ viene detto *insieme complementare* di A in X (e denotato anche con il simbolo A^c).

Si noti che, mentre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (cioè vale la proprietà commutativa), in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$.
Ad esempio, consideriamo

1. l'insieme dei numeri naturali pari P e l'insieme $D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dei numeri naturali dispari. In questo caso,
$$P \cap D = \emptyset, \qquad P \cup D = \mathbb{N}, \qquad P \setminus D = P, \qquad D \setminus P = D.$$

2. l'insieme dei numeri naturali pari P e l'insieme M dei multipli naturali di 4 (cioè $M = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 4n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora
$$M \subset P, \qquad P \cap M = M, \qquad P \cup M = P, \qquad M \setminus P = \emptyset.$$

Infine, ricordiamo che, dato un certo insieme A, l'insieme dei sottoinsiemi di A viene detto *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di A, e denotato con il simbolo 2^A. Ad esempio
$$A = \{0, 1, 2\} \quad \Longrightarrow \quad 2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}. \tag{1.2.1}$$

Il prodotto cartesiano. Dati due insiemi A e B, non necessariamente distinti, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B l'insieme delle coppie ordinate (a, b), al variare di $a \in A$ e di $b \in B$, cioè
$$A \times B := \{(a, b) : \quad a \in A, \ b \in B\}.$$

"Coppie ordinate" significa che l'ordine con cui appare ciascun elemento della coppia è essenziale. Due coppie ordinate (a, b) e (a', b') sono uguali se hanno uguali ordinatamente primo e secondo elemento, cioè se $a = a'$ e $b = b'$.

Quindi, dati A e B, in generale si ha $A \times B \neq B \times A$. Si provi a verificare ciò descrivendo i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$, con $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$.

Se $A = B$, useremo la notazione A^2 per $A \times A$.

Si può estendere l'operazione di prodotto cartesiano a una n-upla di insiemi A_1, A_2, ..., A_n, con $n \geq 2$, definendo
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, \ \ldots, \ a_n \in A_n\}$$

cioè l'insieme delle *n-uple ordinate* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, al variare di $a_1 \in A_1$, .. $a_n \in A_n$. Anche in questo caso, se $A_i \equiv A$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, si usa la notazione $A \times A \times \ldots \times A = A^n$.

Il concetto di relazione. Dati due insiemi non vuoti A e B, una *relazione* $\mathcal{R}$ di A in B è per definizione un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$ (se $A = B$, un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset A^2$ viene chiamato relazione in A). Diciamo che un elemento $a \in A$ è in relazione con un elemento $b \in B$ (e scriviamo $a\,\mathcal{R}\,b$) se $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.2.1. 1. Se $A = B$, l'*insieme diagonale* $D = \{(a, b) \in A^2 : \; a = b\}$ corrisponde alla relazione di uguaglianza: in effetti,

$$(a, b) \in D \iff a = b.$$

2. La relazione "$\leq$ " nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{N}$ si identifica con l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$.

Definizione 1.2.2. *Diciamo che una relazione $\mathcal{R}$ di un insieme A in sé è una* relazione d'ordine *se gode delle seguenti proprietà:*

riflessività $\forall\, x \in A \quad x\,\mathcal{R}\,x$

antisimmetria $\forall\, x,\, y \in A \quad [x\,\mathcal{R}\,y \text{ e } y\,\mathcal{R}\,x] \implies x = y$

transitività $\forall\, x,\, y,\, z \in A \quad [x\,\mathcal{R}\,y \text{ e } y\,\mathcal{R}\,z] \implies x\,\mathcal{R}\,z.$

Inoltre, se una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ gode anche della proprietà

$$\forall\, x,\, y \in A \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{o} \quad y\,\mathcal{R}\,x \qquad \textbf{(dicotomia)}$$

allora la relazione d'ordine si dice *totale* e A viene detto un insieme totalmente ordinato.

Esempio 1.2.3. Osserviamo che:

- Si verifica facilmente (esercizio!) che la relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine totale;
- la relazione $<$ NON è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$ (verificare!)
- dato un qualsiasi insieme $A \neq \emptyset$, la relazione $\subset$ in 2^A è una relazione d'ordine (esercizio!). In generale, $\subset$ non è una relazione d'ordine totale (ad es., si veda l'insieme A in (1.2.1)).

Capitolo 2

Prime proprietà delle funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione 2.1.1. *Siano A e B due insiemi non vuoti. Una* funzione f *definita su A e a valori in B ($f : A \to B$) è una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa* uno e un solo *elemento $f(x) \in B$. In questo contesto, l'insieme A è detto il* dominio *di f e B il* codominio *di f.*

Si noti che il codominio non è univocamente definito: se $f : A \to B$, allora ogni insieme C tale che $B \subset C$ è un codominio per f. Denoteremo il dominio di f (detto anche *insieme di definizione* di f) con i simboli

$$\mathrm{dom}(f), \qquad D_f.$$

Inoltre, useremo la notazione

$$x \in \mathrm{dom}(f) \mapsto f(x)$$

per denotare la legge che alla *variabile indipendente* x associa la sua *immagine* $f(x)$.

Definizione 2.1.2. *Data una funzione $f : A \to B$ (quindi $A = \mathrm{dom}(f)$), chiamiamo:*

1. insieme immagine *di f l'insieme*

$$\mathrm{im}(f) := \{y \in B \,:\, y = f(x),\ x \in A\}$$

(useremo anche la notazione $f(A)$);

2. grafico *di f l'insieme*

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B \,: x \in A,\ y = f(x)\}\ .$$

Osservazione 2.1.3 (Codominio e insieme immagine)**.** Data $f : A \to B$,

- il codominio B è un oggetto poco significativo: solo un "contenitore" dei valori assunti da f. Ribadiamo che il codominio non è univocamente determinato:

  se C è insieme C tale che $B \subset C$
  allora C è un codominio per f

- l'oggetto più significativo è l'**insieme immagine**

$$\mathrm{im}(f) = \{y \in B \,:\, \exists\, x \in A, \quad y = f(x)\} = f(A)$$

  cioè l'insieme dei **valori assunti** da f.

In generale, $\mathrm{im}(f) \subset B$

Esempio 2.1.4. 1. Consideriamo la funzione f che a ogni numero reale non negativo r associa l'area del cerchio di raggio r, cioè $f(r) := \pi r^2$ per ogni $r \geq 0$. In questo caso $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+$ (cioè l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a 0), $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^+$, e $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^2$.

2. Sia L una lamina piana (quindi L può essere identificata con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) e consideriamo la funzione T che al generico punto $(x, y) \in L$ associa la temperatura della lamina in tale punto. In questo caso $\mathrm{dom}(f) = L \subset \mathbb{R}^2$, mentre $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}^+$, e $\mathrm{graf}(f) \subset \mathbb{R}^3$.

3. La legge $f : \{-1, 1\} \to \{a, b, c\}$ definita da

$$f(-1) = a, \quad f(1) = c, \quad f(-1) = b$$

NON È una funzione: ribadiamo che ad ogni elemento del dominio deve essere associato **uno e un solo** elemento del codominio.

Nel seguito considereremo solo funzioni a valori reali, di una sola variabile reale, cioè funzioni della forma

$$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}, \quad \text{ove } \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

Anticipiamo che, nel caso in cui $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N}$, la funzione f viene detta *successione*. Si noti che, nel caso della (2.1.1) si ha che

$$\mathrm{graf}(f) \subset \mathrm{dom}(f) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Osservazione 2.1.5. Segue dalla definizione di funzione che è proibito che, dato un certo $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$, esistano $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, con $y_1 \neq y_2$, tali che $(\bar{x}, y_1)$ e $(\bar{x}, y_2) \in \mathrm{graf}(f)$: se così fosse, si avrebbe infatti $f(\bar{x}) = y_1$ e $f(\bar{x}) = y_2$, cioè a $\bar{x}$ verrebbero associati due diversi elementi y_1 e y_2.

Infatti, **condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ sia il grafico di una funzione è che ogni retta parallela all'asse delle y intersechi tale sottoinsieme in al massimo un punto.**

Esempio 2.1.6. Dati

$$\begin{aligned} &A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \leq x \leq 1\}, \\ &B = \mathbb{R} \end{aligned}$$

consideriamo la circonferenza $\subseteq A \times B$

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Si osservi che γ **NON** è il grafico di una funzione da A in B: infatti,

$$\text{al punto } x_0 = 0 \text{ corrispondono } \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \quad \text{con } \begin{cases} (x_0, y_1) \in \gamma \\ (x_0, y_2) \in \gamma \end{cases}$$

Invece

$$\gamma \cap \{(x, y) \,:\, x \in A \ \ y \geq 0\} \textbf{ è un grafico.}$$

Ribadiamo che una funzione si considera ben definita quando vengono forniti:

- sia la formula che definisce f,
- sia il dominio di f.

Quindi, due funzioni f_1 e f_2 coincidono se e solo se

$$\mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2) \ \text{ e } \ f_1(x) = f_2(x) \qquad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2).$$

Ad esempio, le funzioni $f_1(x) = x^2\ \forall\, x \geq 0$ e $f_2(x) = x^2\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ **non coincidono**, cosa che si può vedere anche dal confronto fra i rispettivi grafici: il grafico di f_2 è la parabola $y = x^2$, mentre il grafico di f_1 è il ramo della parabola $y = x^2$ contenuto nel primo quadrante.

Il dominio naturale di definizione. Quando una funzione di variabile reale e a valori reali è data senza che ne venga specificato il dominio, si sottintende che il suo dominio sia l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali il valore $f(x)$ ha senso ed è un numero reale.

Esempio 2.1.7. 1.
$$f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 1}\,.$$
In questo caso, $\mathrm{dom}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \pm 1\}$.

2.
$$f_2(x) := \sqrt{4 - x^2}\,.$$
In questo caso, $\mathrm{dom}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 4 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -2 \leq x \leq 2\}$.

2.2 Funzioni suriettive e iniettive

Preliminarmente, diamo la seguente

Definizione 2.2.1. *Sia $f : A \to B$. Dato $y \in B$, un elemento $x \in A$ si chiama* controimmagine *di y tramite f se esso verifica*
$$f(x) = y.$$
Denotiamo con $f^{-1}(\{y\})$ l'insieme (eventualmente vuoto) delle controimmagini di y tramite f.

È chiaro che
$$y \in \mathrm{im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\,. \tag{2.2.1}$$

Osservazione 2.2.2 (Interpretazione grafica della controimmagine nel caso di funzioni reali di variabile reale)**.** Data $f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato un valore $\bar{y} \in \mathbb{R}$, si può individuare graficamente l'insieme controimmagine di $\bar{y}$, cioè l'insieme $f^{-1}(\{\bar{y}\})$, in questo modo: si considera la retta orizzontale $y = \bar{y}$ e se ne cercano intersezioni con $\mathrm{graf}(f)$:

- se $y = \bar{y}$ non interseca $\mathrm{graf}(f)$ in alcun punto, allora $f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \emptyset$;
- viceversa, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{graf}(f)$ (chiaramente $(x, \bar{y})$ appartiene alla retta $y = \bar{y}$), si ha che $\bar{x} \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$.

Suriettività.

Ricordando la Definizione 2.1.2 di insieme immagine, diamo la seguente:

Definizione 2.2.3. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* suriettiva *se* $\mathrm{im}(f) = B$ *(cioè quando l'insieme immagine di f coincide con il codominio).*

Osservazione 2.2.4. Si osservi che se consideriamo una funzione $f : A \to B$ come a valori nell'insieme immagine di f, cioè $f : A \to \mathrm{im}(f)$ (questo è possibile: anche $\mathrm{im}(f)$ è un codominio ammissibile), allora
$$f : A \to \mathrm{im}(f) \quad \text{è suriettiva.}$$
Questo mostra che la suriettività di una funzione dipende dalla scelta del codominio.

Osservazione 2.2.5 (Importante). *Nel caso di una funzione reale di variabile reale, cioè*
$$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}, \quad \textit{ove } \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R},$$
considereremo sempre come codominio l'insieme $\mathbb{R}$*. Quindi*
$$f \textit{ è suriettiva se } \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}.$$

Osservazione 2.2.6 (Interpretazione grafica di suriettività per funzioni reali di variabile reale)**.** Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Segue da (2.2.1) e dalla discussione sviluppata nell'Osservazione 2.2.2 che un numero reale $\bar{y}$ appartiene all'insieme immagine di f se, considerando la retta parallela all'asse x e passante per il punto $y = \bar{y}$ (cioè la retta $y = \bar{y}$), tale retta interseca il graf(f) in almeno un punto. Quindi:

- f è suriettiva se, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$ interseca graf(f) in **almeno** un punto.

Esempio 2.2.7. Si ha che

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ è suriettiva;
2. la funzione
$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{definita per } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
non è suriettiva, infatti
$$\nexists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \; : \; 2 = \frac{2x+1}{x-1}$$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, perché
$$\nexists x \in \mathbb{R} \; : \; -1 = x^2 \, .$$
Infatti, $\mathrm{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \; : \; y \geq 0\} \subset \mathbb{R}$.

Iniettività.

Definizione 2.2.8. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* iniettiva *se*
$$\forall \, x_1, \, x_2 \in A, \qquad f(x_1) = f(x_2) \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = x_2 \, , \tag{2.2.2}$$
o, equivalentemente,
$$\forall \, x_1, \, x_2 \in A, \qquad x_1 \neq x_2 \;\; \Rightarrow \;\; f(x_1) \neq f(x_2) \, .$$

Osservazione 2.2.9. N.B.: non confondere l'ordine in cui è scritta la (2.2.2): infatti la proprietà
$$\forall \, x_1, x_2 \in A, \;\; [(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2)]$$
è verificata da ogni funzione.

Si noti che con la (2.2.2) si richiede che
$$\text{ogni elemento } y \in B \text{ abbia al più una controimmagine;} \tag{2.2.3}$$
cioè, se $y \in B \setminus \mathrm{im}(f)$, si avrà $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, mentre se $y \in \mathrm{im}(f)$, l'insieme $f^{-1}(\{y\})$ consisterà di un solo elemento (gli insiemi costituiti da un unico elemento vengono detti *singoletti*). In altri termini, a ogni elemento $y \in \mathrm{im}(f)$ viene associata una e una sola controimmagine $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Osservazione 2.2.10 (Interpretazione grafica di iniettività per funzioni reali di variabile reale)**.** Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Segue da (2.2.3) e dalla discussione sviluppata nell'Osservazione 2.2.2 che

- f è iniettiva se, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$ interseca graf(f) in **al più** (cioè uno solo oppure nessuno) un punto.

Esempio 2.2.11. Si ha che

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ **è iniettiva**;

2. la funzione
$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{definita per } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
è iniettiva;

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è iniettiva.

Osservazione 2.2.12. Iniettività e suriettività sono nozioni indipendenti: per esempio vi sono

funzioni iniettive ma non suriettive	$\rightsquigarrow$	$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$
funzioni sia iniettive che suriettive	$\rightsquigarrow$	$f(x) = x$
funzioni né iniettive né suriettive	$\rightsquigarrow$	$f(x) = x^2$

Concludiamo con la seguente definizione.

Definizione 2.2.13. *Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è* biiettiva *se*

- *f è suriettiva,*
- *f è iniettiva.*

Ricordando l'Osservazione 2.2.4, notiamo che, se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora, prendendo come codominio di f il più piccolo insieme possibile (cioè $\mathrm{im}(f)$), si ha che $f : A \to \mathrm{im}(f)$ è chiaramente biiettiva. Questo evidenzia che la biettività di una funzione dipende dalla scelta del codominio.

2.3 Invertibilità

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, ove $D_f \subset \mathbb{R}$, una funzione <u>iniettiva</u>. Segue da (2.2.3) che
$$\forall\, y \in \mathrm{im}(f) \quad \exists!\, x \in D_f \;:\; f(x) = y\,. \tag{2.3.1}$$
Possiamo quindi considerare la funzione che a ogni $y \in \mathrm{im}(f)$ associa l'<u>unico</u> $x \in D_f$ verificante $f(x) = y$. Tale funzione avrà quindi come dominio l'insieme immagine di f, e come codominio il dominio di f.

Definizione 2.3.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione <u>iniettiva</u>. Chiamiamo* funzione inversa *di f la funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to D_f$ definita da*
$$\forall\, y \in \mathrm{im}(f), \quad f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)\,. \tag{2.3.2}$$
Sottolineiamo che **la sola iniettività è sufficiente a garantire l'invertibilità.**

Proprietà della funzione inversa.

1. $$\boxed{\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)\,, \qquad \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)\,.}$$
   La prima uguaglianza viene dalla definizione di funzione inversa, mentre con
   $$\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$$
   affermiamo che non solo $\mathrm{dom}(f)$ è il codominio di f^{-1}, ma coincide l'insieme immagine di f^{-1}.

   Verifichiamo ciò: fissato $x \in \mathrm{dom}(f)$, bisogna trovare una controimmagine di x tramite f^{-1}, cioè un $y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ tale che $f^{-1}(y) = x$, cioè, per la definizione di f^{-1}, $y = f(x)$. Ma allora dato $x \in \mathrm{dom}(f)$, prendiamo come sua controimmagine tramite f^{-1} proprio $f(x)$.

   In questo modo concludiamo che $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{im}(f^{-1})$.

   L'inclusione opposta $\mathrm{im}(f^{-1}) \subset \mathrm{dom}(f)$ (che ci permette di concludere l'uguaglianza fra i due insiemi) deriva dal fatto che, per definizione di funzione inversa, $\mathrm{dom}(f)$ è (un) codominio per f^{-1}.

2. la funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ è iniettiva. In effetti, siano dati $y_1, y_2 \in \mathrm{im}(f)$ tali che $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$. Chiamiamo x l'elemento $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \in \mathrm{dom}(f)$. Per definizione di f^{-1}, $x = f^{-1}(y_1)$ equivale a $f(x) = y_1$ e analogamente $x = f^{-1}(y_2)$ equivale a $f(x) = y_2$. Ma f è una funzione: quindi a x viene associato uno e un solo elemento tramite f. Necessariamente y_1 e y_2 coincidono, il che prova l'iniettività di f^{-1}.

3. La funzione $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ è biiettiva. Questo è chiaro poiché essa è iniettiva e il suo codominio $\mathrm{dom}(f)$ coincide con il suo insieme immagine $\mathrm{im}(f^{-1})$.

D'ora in poi, useremo indifferentemente la lettera y o la x per denotare la variabile indipendente della funzione inversa f^{-1}.

Esempio 2.3.2. Si ha che

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2x - 1$ è invertibile, con $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. La sua funzione inversa è
$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)\,.$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = e^x$ è iniettiva, con $\mathrm{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0\} = (0, +\infty)$. Allora f è invertibile, con $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da
$$f^{-1}(y) = \log(y) \qquad \forall\, y \in (0, +\infty).$$

Il grafico della funzione inversa. Il grafico di f^{-1} si ottiene considerando la curva simmetrica del $\mathrm{graf}(f)$ rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$.

2.4 *Appunti operativi:* Funzioni pari, dispari, e periodiche

Parità e disparità

Definizione 2.4.1. *Diciamo che un insieme $D \subset \mathbb{R}$ è* simmetrico rispetto all'origine *se gode della seguente proprietà:*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \quad \Leftrightarrow \quad -x \in D\,.$$

Ad esempio, sono insiemi simmetrici rispetto all'origine tutti gli intervalli della forma $(-M, M)$, con $M > 0$. Ma anche l'insieme $I = \{7\} \cup [-5, -3) \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup (3, 5] \cup \{7\}$ è simmetrico rispetto all'origine.

Definizione 2.4.2. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, con $D_f \subset \mathbb{R}$* simmetrico rispetto all'origine. *Diciamo che*

- *f è* pari *se*
$$f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f\,;$$
- *f è* dispari *se*
$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f\,.$$

Si noti che:

- la definizione di funzione pari/dispari ha significato solo su domini simmetrici rispetto all'origine;
- se $D_f \subset \mathbb{R}$ è *simmetrico rispetto all'origine* e $\mathbf{0} \in \mathbf{D_f}$, e se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari, necessariamente $f(0) = 0$ (in quanto, per la disparità, si ha $f(0) = -f(-0) = -f(0)$: l'unica possibilità perché valga ciò è che $f(0)$ sia 0).
- Se una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$ è pari o dispari, allora il suo grafico ha la seguente notevole proprietà:

– se f è pari, allora graf(f) è **simmetrico rispetto all'asse** y;

– se f è dispari, allora graf(f) è **simmetrico rispetto all'origine degli assi**.

Quindi, per disegnare il grafico qualitativo di una funzione pari o dispari, è sufficiente conoscerne l'andamento solo per $x \geq 0$: il grafico completo si otterrà facendo l'opportuna simmetria.

Periodicità

Definizione 2.4.3. *Sia $T > 0$ e $D \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto con la proprietà che*

$$\forall x \in D, \qquad x + T \in D\,. \tag{2.4.1}$$

Diciamo che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T *(brevemente, T*-periodica*), se si ha*

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in D\,. \tag{2.4.2}$$

Godono della proprietà (2.4.1) per esempio gli insiemi $D = \mathbb{R}$, per ogni $T > 0$, e $D = \mathrm{dom}(\tan)$, per $T = \pi$, (si denota tan la funzione tangente, che verrà definita nella Sezione 2.5.
Si noti che se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione T-periodica, f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il minimo $T' > 0$ per il quale f è periodica di periodo T', se esiste, viene chiamato *periodo minimo.*
Nel seguito presentiamo alcuni notevoli esempi di funzioni periodiche.

2.5 *Appunti operativi:* Funzioni elementari

Vengono comunemente definite *funzioni elementari* le

- le funzioni potenza a esponente naturale, intero, razionale, e reale;
- le funzioni esponenziali di base $a > 0$;
- le funzioni logaritmiche di base $a > 0$, con $a \neq 1$;
- le funzioni trigonometriche sin, cos, tan, cot [1];
- le funzioni trigonometriche inverse arcsin, arccos, arctan.

Nel seguito, ricordiamo brevemente alcune proprietà delle funzioni elementari.

Le funzioni potenza a esponente naturale

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

1. Per $n = 0$, otteniamo la <u>funzione costante</u>

$$f(x) = x^0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Si ha che $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di tale funzione è la retta $y = 1$. Chiaramente $\mathrm{im}(f) = \{1\}$, quindi f non è né suriettiva, né iniettiva; f è pari; f è periodica con periodo $T > 0$ **per ogni** $T > 0$ (quindi f non ha periodo minimo). **Le considerazioni appena sviluppate valgono anche per la generica funzione costante $\mathbf{f(x) \equiv c}$**, con $c \in \mathbb{R}$.

[1] non tratteremo le funzioni *secante* sec e *cosecante* csc..

2. Per $n = 1$, otteniamo la funzione identità
$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$
Il suo grafico è la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$. È immediato vedere che f è iniettiva e che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre f è dispari.

   - più in generale, consideriamo la funzione lineare
   $$f(x) = ax + b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$
   Il suo grafico è la retta $y = ax+b$. f è iniettiva e $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre, f è dispari se e solo se $b = 0$.
   - A partire dalla funzione identità definiamo la funzione modulo
   $$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$
   Si vede subito che l'insieme immagine della funzione modulo è la semiretta positiva $[0, +\infty)$, quindi $|\cdot|$ non è suriettiva. Essendo
   $$|x| = |-x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
   (in virtù della definizione di modulo), si ha che la funzione modulo $|\cdot|$ è pari, e quindi non è neppure iniettiva.

3. Per $n = 2$, otteniamo la funzione quadratica
$$f(x) = x^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$
Il suo grafico è la parabola $y = x^2$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$ (quindi f non è suriettiva). Inoltre f è pari, quindi non è iniettiva. Notiamo tuttavia che le funzioni
$$\left.\begin{array}{ll} f|_{[0,+\infty)} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } [0, +\infty), \\ f|_{(-\infty,0]} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } (-\infty, 0], \end{array}\right. \qquad \text{sono iniettive.}$$

4. Per $n = 3$, otteniamo la funzione cubica
$$f(x) = x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$
Il suo grafico è la curva cubica $y = x^3$. Si vede che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è suriettiva. Inoltre f è iniettiva. Si verifica immediatamente che f è dispari.

5. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale pari**
$$f(x) = x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$
hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^2$.

6. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale dispari**
$$f(x) = x^{2k+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$
hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^3$.

Definizione 2.5.1. *Chiamiamo* funzione polinomiale *una funzione $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma*
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
ove i coefficienti a_i, $i = 1, \ldots, n$, sono numeri reali, con $a_n \neq 0$, e il numero $n \in \mathbb{N}$ viene detto grado del polinomio*.*

Le funzioni potenza a esponente intero negativo

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad n > 0, \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

1. Per $n = 1$, otteniamo la funzione reciproco

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

   Il suo grafico è l'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi f non è suriettiva. f è iniettiva e dispari.

2. Per $n = 2$, otteniamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

   Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. Inoltre, f è pari, quindi non è iniettiva.

3. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo pari**

$$f(x) = x^{-2k} := \frac{1}{x^{2k}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

   hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-2}$.

4. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo dispari**

$$f(x) = x^{-(2k+1)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

   hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-3}$.

Definizione 2.5.2. *Chiamiamo* funzione razionale fratta *una funzione data dal quoziente di due polinomi, cioè della forma*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad \begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, n, \quad a_n \neq 0 \\ b_j \in \mathbb{R}, \; j = 1, \ldots, m, \quad b_m \neq 0 \end{cases} .$$

Il dominio di f è allora $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

Inverse delle funzioni potenza a esponente naturale (strettamente positivo)

- La funzione identità $f(x) = x$ è iniettiva su $\mathbb{R}$, quindi invertibile. Poichè $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, la funzione inversa f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$. Si vede immediatamente che $f(x) = x$ coincide con la sua inversa.

- Più in generale, la funzione lineare $f(x) = ax+b$, con $a \neq 0$, è invertibile. Essendo $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, si ha che f^{-1} è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si verifica immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Prima di introdurre le inverse delle funzioni potenza $f(x) = x^n$, con $n \geq 2$, diamo la seguente

Definizione 2.5.3. *Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $x \in [0, +\infty)$. Chiamiamo* radice n-esima di x *l'unico numero $y \in [0, +\infty)$ verificante $y^n = x$. Useremo la notazione $y = \sqrt[n]{x}$.*

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $n \geq 2$, n **pari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari, quindi non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. **Si conviene di considerare la restrizione di f alla semiretta** $[0, +\infty)$. Tale restrizione ha ancora come insieme immagine la semiretta $[0, +\infty)$ ed è una funzione iniettiva, quindi invertibile. La funzione inversa avrà quindi come dominio la semiretta $[0, +\infty)$, e come insieme immagine il dominio della restrizione di x^n a $[0, +\infty)$. Allora l'insieme immagine della funzione inversa è $[0, +\infty)$. Si vede immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)$$

(useremo la notazione $\sqrt{\cdot}$ per $\sqrt[2]{\cdot}$).

Ricordiamo la seguente **fondamentale identità**:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

(ove $|\cdot|$ denota la funzione modulo, si veda la Sez. 4.1).

2. $n \geq 2$, n **dispari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è iniettiva, quindi è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Il suo insieme immagine è $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$, con $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Si ha

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,. \end{cases}$$

In generale, useremo la notazione $x^{1/n}$ per la funzione inversa di x^n. Si hanno quindi le formule

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ PARI},$$

$$x^{1/n} = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ DISPARI}.$$

Le funzioni potenza a esponente razionale e reale

Funzioni potenza a esponente razionale. Vogliamo ora definire le funzioni $f(x) = x^q$, con $q \in \mathbb{Q}$. Distingueremo il caso $q > 0$ dal caso $q < 0$[2].

- $q > 0$: allora $q = \frac{m}{n}$, con $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $m,\, n \neq 0$, e concordi. Non è limitativo supporre che m e n siano entrambi strettamente positivi. Allora definiamo

$$x^q = x^{m/n} := (x^{1/n})^m \qquad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari}, \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

- caso $q < 0$. Non è limitativo supporre che $q = -\frac{m}{n}$, con $m,\, n \in \mathbb{N}$, $m,\, n > 0$. Allora definiamo

$$x^q = x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}} \qquad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = (0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari}, \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Osserviamo quindi che **il dominio naturale della generica funzione x^q è $(0, +\infty)$.**

[2] abbiamo già studiato il caso $q = 0$!

Funzioni potenza a esponente reale. Dato $r \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione potenza $x \mapsto x^r$ sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (che vedremo nel Capitolo 4). Quest'ultima proprietà assicura infatti che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists q \in \mathbb{Q} : \quad |r - q| < \varepsilon,$$

cioè che il numero reale $r \in \mathbb{R}$ può essere approssimato "arbitrariamente bene" da numeri razionali $q \in \mathbb{Q}$. Allora si può definire x^r tramite approssimazione[3] con le potenze x^q, $q \in \mathbb{Q}$, che abbiamo testè definito. Poiché il dominio naturale della generica potenza x^q è $(0, +\infty)$, abbiamo che

per ogni $r \in \mathbb{R}$, il dominio naturale della funzione $x \mapsto x^r$ è $(0, +\infty)$.

Le funzioni esponenziali

Sia a un numero reale strettamente positivo e consideriamo la funzione esponenziale di base a

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x, \qquad \text{con dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

Si osservi che, per dare senso alla potenza a^x con esponente reale x, il numero a deve essere strettamente positivo!

Proprietà delle funzioni esponenziali. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$ le seguenti proprietà:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
5. $(ab)^x = a^x b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $b > 0$.

Abbiamo tre tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni esponenziali:

1. $a = 1$. In questo caso $f(x) = 1^x \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè ritroviamo la funzione costantemente uguale a 1.
2. $a > 1$. In questo caso $\operatorname{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva. Un caso notevole si ha per

   $a = \mathrm{e} = 2,7218......$ la costante di Nepero (o costante di Eulero), cf. la (3.3.2).

   Nel caso $a = e$ si usa

   la notazione alternativa $\mathrm{e}^x \equiv \exp(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $0 < a < 1$. In questo caso $\operatorname{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva.

Si noti la relazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0\,,$$

che permette di passare dal caso 2. al caso 3. e viceversa.

[3] lo sviluppo rigoroso di questo procedimento di approssimazione si basa sulla nozione di *limite di una successione*, che vedremo nel Capitolo 6.

Le funzioni logaritmiche

Le funzioni esponenziali $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ sono iniettive (quindi invertibili) per $a \neq 1$ e, in tal caso, hanno come insieme immagine $(0, +\infty)$.

Definizione 2.5.4. *Sia* $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. *Chiamiamo* funzione logaritmica in base a *(o* logaritmo in base a*) la funzione inversa dell'esponenziale* $x \mapsto a^x$*, e usiamo la notazione* $\log_a$*. Nel caso particolare in cui* $a = \mathrm{e}$*, useremo la notazione* ln *(o semplicemente* log*) invece di* $\log_{\mathrm{e}}$ *e ci riferiremo alla funzione* ln *con il nome* logaritmo naturale*.*

- Per definizione di funzione inversa, la funzione $\log_a$ è data dalla formula

$$\forall\, x > 0 \quad \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

  cioè *il logaritmo in base a di un numero strettamente positivo x è quel numero reale y tale che a elevato alla y sia uguale a x.*

- In particolare, segue dal fatto che $a^0 = 1$ che

$$\log_a(1) = 0 \qquad \forall\, a \in (0, +\infty),\ a \neq 1.$$

- Per costruzione si che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

$$\mathrm{dom}(\log_a) = (0, +\infty), \qquad \mathrm{im}(\log_a) = \mathbb{R}, \qquad \log_a \text{ è iniettiva.}$$

Abbiamo due tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni logaritmiche (si noti che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. il grafico di $\log_a$ passa per il punto $(1, 0)$):

1. $a > 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $a > 1$.

2. $0 < a < 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $0 < a < 1$.

Proprietà delle funzioni logaritmiche. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ le seguenti proprietà:

$$\log_a(1) = 0, \tag{2.5.1}$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{per ogni } x, y > 0, \tag{2.5.2}$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \qquad \text{per ogni } x > 0, \tag{2.5.3}$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \qquad \text{per ogni } x \in (0, +\infty) \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}, \tag{2.5.4}$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \text{per ogni } x > 0 \text{ e per ogni } b \in (0, +\infty),\ b \neq 1. \tag{2.5.5}$$

Da (2.5.2) e (2.5.3) segue che

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall\, x,\, y > 0.$$

Dimostriamo alcune di queste proprietà a partire dalle proprietà delle funzioni esponenziali, usando la relazione di inversione

$$y = \log_a(x) \;\Leftrightarrow\; a^y = x\,.$$

- Per dimostrare la (2.5.2), poniamo
$$z = \log_a(xy), \quad t = \log_a(x), \quad w = \log_a(y).$$
Per definizione, si ha quindi
$$xy = a^z, \quad x = a^t, \quad y = a^w,$$
da cui
$$xy = (a^t)(a^w) = a^{t+w}$$
ove l'ultima relazione segue dalle proprietà delle funzioni esponenziali. Quindi
$$xy = a^{t+w} \quad \Rightarrow t + w = \log_a(xy) = z,$$
che è la relazione che volevamo dimostrare.
- Per dimostrare la (2.5.3) osserviamo che
$$w = \log_a(x), \quad t = \log_a\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^t = \frac{1}{x} = x^{-1} = (a^w)^{-1} = a^{-w}.$$
Allora da $a^t = a^{-w}$ e dall'iniettività della funzione esponenziale in base a concludiamo che
$$t = -w \quad \Rightarrow \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x).$$

Esercizio. Ragionando in modo completamente analogo, dimostrare la (2.5.4) e la (2.5.5).

Le funzioni trigometriche e le loro inverse

Definizione di seno e coseno mediante la circonferenza goniometrica. Si consideri un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$, percorrendola in senso antiorario, a partire dal punto $(1, 0)$. Sia $t > 0$ la lunghezza dell'arco di circonferenza compreso fra il punto $(1, 0)$ e il punto P. Si noti che t è la misura in radianti dell'angolo compreso fra il segmento congiungente $O = (0, 0)$ e $(1, 0)$, e il raggio OP.

D'altra parte, ogni valore $t \in [0, 2\pi]$ individua uno e un solo punto P sulla circonferenza trigonometrica, tale che l'arco orientato da $(1, 0)$ a P abbia lunghezza t (il punto corrispondente a $t = 0$ e $t = 2\pi$ è il punto $(1, 0)$). Possiamo quindi considerare il punto $P = P_t$ come in funzione del parametro t e definire le quantità *seno di t* e *coseno di t*.

$$\text{Fissato } t \in [0, 2\pi], \text{ definiamo} \quad \begin{cases} \cos(t) := \text{ascissa di } P_t, \\ \sin(t) := \text{ordinata di } P_t. \end{cases}$$

Estensione di seno e coseno a valori di $\mathbb{R}$. Le funzioni sin e cos si estendono a $\mathbb{R}$ e verificano le relazioni
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2.5.6}$$
e
$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5.7}$$
Ricordiamo l'*identità fondamentale della trigonometria*
$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.} \tag{2.5.8}$$

Valori fondamentali di sin **e** cos**, e formule di addizione.** Si ricava dalla definizione di sin e cos che

$$-1 \le \cos(x) \le 1, \qquad -1 \le \sin(x) \le 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.5.9}$$

Inoltre si possono calcolare i seguenti valori fondamentali:

$$\begin{array}{lll}
t = 0 & \sin(0) = 0 & \cos(0) = 1 \\
t = \frac{\pi}{6} & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
t = \frac{\pi}{4} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
t = \frac{\pi}{3} & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
t = \frac{\pi}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0
\end{array}$$

Usando le formule di addizione per sin e cos

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x) && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x) && \forall\, x,\, y \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

si ricavano a partire dai valori fondamentali altri valori di sin e cos su $[0, 2\pi]$. Per esempio,

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{4}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenendo conto di (2.5.6) e (2.5.7), ricaviamo infiniti altri valori fondamentali di sin e cos.

Le funzioni sin**,** cos**, e** tan**.** Richiamiamo alcune delle proprietà fondamentali delle funzioni trigonometriche.

- La funzione *seno*:
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
è dispari (si veda (2.5.7)), 2π-periodica (si veda (2.5.6)), e ha come insieme immagine $[-1, 1]$ (come si ricava da (2.5.9)).

- La funzione *coseno*:
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
è pari (si veda (2.5.7)), 2π-periodica (si veda (2.5.6)), e ha come insieme immagine $[-1, 1]$ (come si ricava da (2.5.9)). Inoltre, dalle formule di addizione per il seno si ottiene che
$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Quindi (cf. la discussione sulle traslazioni di grafici nella Sezione 2.6), *il grafico di* cos *si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di* sin *di* $\frac{\pi}{2}$*, nella direzione negativa dell'asse* x*.*

- La funzione *tangente* è definita dall'espressione
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\cos(x) \neq 0$. Poiché

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

concludiamo che

$$\mathrm{dom}(\tan) = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

La funzione tangente è dispari su dom(tan) (in quanto è quoziente di sin, dispari, e di cos, pari), π-periodica, ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

- La funzione *cotangente* è definita dall'espressione

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\sin(x) \neq 0$. Poiché

$$\cos(k\pi) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

concludiamo che

$$\mathrm{dom}(\cot) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq k\pi \ \forall\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

La funzione cotangente è dispari su dom(tan) (in quanto è quoziente di cos, pari, e di sin, dispari), π-periodica, ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

Funzioni trigonometriche inverse. Le funzioni sin, cos, e tan, essendo periodiche sui loro domini, sono ben lontane dall'essere iniettive (e quindi invertibili) sui rispettivi domini. Tuttavia, esistono dei sottoinsiemi di tali domini, dette *regioni fondamentali*, con la proprietà che le restrizioni di sin, cos e tan a questi sottoinsiemi sono iniettive (e quindi invertibili).

- Si conviene di considerare la restrizione di sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si verifica che

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \ \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1, 1].$$

Chiamiamo *arcoseno* la funzione inversa della restrizione di sin a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi $\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ ha come dominio $[-1, 1]$ e come insieme immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cioè

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

ed è definito da

$$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = x$$

(cioè l'arcoseno di x è l'arco y il cui seno è x), e ha come insieme immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del seno, ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arcsin è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di cos all'intervallo $[0, \pi]$. Si verifica che

$$\cos|_{[0,\pi]} \ \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1, 1].$$

Chiamiamo *arcocoseno* la funzione inversa della restrizione di cos a $[0, \pi]$, cioè $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$. Quindi

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

è definito da

$$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x$$

(cioè l'arcocoseno di x è l'arco y il cui coseno è x), e ha come insieme immagine $[0, \pi]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del coseno, ristretto a $[0, \pi]$, rispetto alla retta $y = x$.

- Si conviene di considerare la restrizione di tan all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si verifica che

  $$\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \quad \text{è iniettiva, e ha come insieme immagine } \mathbb{R}.$$

  Chiamiamo *arcotangente* la funzione inversa della restrizione di tan a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè $\arctan = \left(\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$. Quindi

  $$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

  è definita da

  $$\arctan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x$$

  (cioè l'arcotangente di x è l'arco y la cui tangente è x), e ha come insieme immagine $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico della tangente, ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arctan è dispari.

Le funzioni iperboliche sinh, cosh, e tanh

Le funzioni trigonometriche sin e cos (e, per estensione, le funzioni tan e cot) vengono anche dette circolari perché l'identità fondametale della trigonometria $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ assicura che il punto $(u, v) = (\cos(x), \sin(x))$ descrive al variare di $x \in \mathbb{R}$ la circonferenza $u^2 + v^2 = 1$ di centro $(0, 0)$ e raggio 1. Introduciamo ora le funzioni *iperboliche*: *seno iperbolico*, *coseno iperbolico*, *tangente iperbolica*, *cotangente iperbolica*:

$$\begin{aligned}
&\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad && \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad && \forall\, x \in \mathbb{R}, \\
&\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad && \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad && \forall\, x \in \mathbb{R}, \\
&\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad && \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad && \forall\, x \in \mathbb{R}, \\
&\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad && \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad && \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Si noti infatti che

$$\sinh(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

quindi il dominio naturale di coth è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre

$$\cosh(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

quindi il dominio naturale di tanh è $\mathbb{R}$.

È di facile dimostrazione l'identità

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{2.5.11}$$

da cu si desume che il punto (u, v) di coordinate $u = \cosh(x)$ e $v = \sinh(x)$) giace sull'iperbole equilatera $u^2 - v^2 = 1$. Infine, si deduce facilmente dalla loro definizione che la funzione cosh è pari, mentre sinh, tanh e coth sono dispari.

Tabella di formule di funzioni circolari e iperboliche

Concludiamo questa sezione con una raccolta (incompleta) delle formule per le funzioni circolari e iperboliche di uso più frequente. Le formule seguenti sono valide per tutti i valori x e y dei domini delle funzioni di volta in volta considerate.

$$
\begin{aligned}
&\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\
&\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\\
&\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\\
&\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)\\
&\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}\\
&\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1\\
&\qquad\quad = 1 - 2\sin^2(x)\\
&\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
&\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}\\
&\sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}\\
&\sin(x)\cos(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}
\end{aligned}
$$

ponendo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
&\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\\
&\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\\
&\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\\
&\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)\\
&\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)\\
&\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \sinh(y)\cosh(x)\\
&\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}\\
&\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1\\
&\qquad\quad = 1 + 2\sinh^2(x)\\
&\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)\\
&\cosh^2(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(x)}\\
&\cosh^2(x) = \frac{\tanh^2(x)}{1-\tanh^2(x)}\\
&\sinh(x)\cosh(x) = \frac{\tanh(x)}{1-\tanh^2(x)}
\end{aligned}
$$

ponendo $\tau = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
&\cosh(x) = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\\
&\sinh(x) = \frac{2\tau}{1-\tau^2}\\
&\tanh(x) = \frac{2\tau}{1+\tau^2}\,.
\end{aligned}
$$

2.6 Operazioni su funzioni

Restrizione di funzioni.

Definizione 2.6.1. *Dati $f : D_f \to \mathbb{R}$ ed $E \subseteq D_f$, si dice restrizione di f ad E la funzione*

$$f|_E : E \to \mathbb{R} \text{ data da } f|_E(x) = f(x) \quad \forall\, x \in E.$$

Esempio 2.6.2. Sia $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2$. Ricordiamo che f non è iniettiva e non è invertibile.

Tuttavia, la restrizione $f|_{[0,+\infty)}$ risulta iniettiva, con $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$. Allora è invertibile, con inversa

$$(f|_{[0,+\infty)})^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \forall\, y \geq 0$$

Quindi, una funzione che non è iniettiva si può rendere iniettiva semplicemente considerandone opportune restrizioni.

Composizione di funzioni. Consideriamo due funzioni

$$
\begin{aligned}
g : D_g \to \mathbb{R}\,, &\quad \text{data da } \ y = g(x) \ \ \forall\, x \in D_g\,,\\
f : D_f \to \mathbb{R}\,, &\quad \text{data da } \ z = f(y) \ \ \forall\, y \in D_f\,.
\end{aligned}
$$

Dato $x \in D_g$, vogliamo ora considerare il valore $f(g(x))$ (cioè applicare f a $g(x)$). Quest'operazione ha senso per tutti gli $x \in D_g$ tali che $g(x) \in D_f$. Per poterla effettuare, quindi, dobbiamo almeno richiedere che esistano degli $x \in D_g$ tali che $g(x) \in D_f$, cioè che $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$. Se questo vale, si ha che l'insieme $\mathcal{D} := \{x \in D_g \;:\; g(x) \in D_f\}$ non è vuoto. Per costruzione, per ogni $x \in \mathcal{D}$ ha senso considerare il valore $f(g(x))$. In questo modo, otteniamo una nuova funzione.

Definizione 2.6.3 (Funzione composta)**.** *Siano* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *e* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset \,, \tag{2.6.1}$$

e sia

$$\mathcal{D} := \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\}. \tag{2.6.2}$$

Chiamiamo composizione di f con g *(o* funzione composta di f con g*) la funzione* $f \circ g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D};$$

in questo contesto, g *si chiama* funzione interna *e* f funzione esterna*.*

Osservazione 2.6.4. Si noti che, per costruzione, $\mathcal{D} \subset D_g$. Inoltre, se $\mathrm{im}(g) \subset D_f$, allora chiaramente per ogni $x \in D_g$ si ha che $g(x) \in D_f$, e quindi $\mathcal{D} = D_g$. Vogliamo però ribadire che la composizione $f \circ g$ ha senso non appena vale la (2.6.1). Allora, il dominio $D_{f \circ g}$ è dato dalla (2.6.2).

Possiamo anche considerare la composizione $g \circ f$, nell'ipotesi che $\mathrm{im}(f) \cap D_g \neq \emptyset$. In questo caso, il dominio di $g \circ f$ sarà $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}$. Osserviamo che, in generale,

$$f \circ g \neq g \circ f \text{ !!!!!}$$

come dimostra il prossimo esempio.

Esempio 2.6.5. 1. Consideriamo le funzioni

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x) := x^2 - 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) := \sqrt[4]{x} \ \ \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

Disegnando il grafico della parabola $y = x^2 - 1$, si vede subito che $\mathrm{im}(g) = [-1, +\infty)$. Allora $\mathrm{im}(g) \cap D_f = [0, +\infty)$ e quindi $f \circ g$ è ben definita sull'insieme $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, e si ha

$$f(g(x)) = \sqrt[4]{x^2 - 1} \qquad \forall\, x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\,.$$

D'altra parte, $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty) \subset D_g$, quindi, ricordando l'Osservazione 2.6.4, si ha che $D_{g \circ f} = D_f = [0, +\infty)$, e

$$g(f(x)) = (\sqrt[4]{x})^2 - 1 = \sqrt{x} - 1 \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

2. Consideriamo le funzioni

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x) := \sqrt{x} \ \ \forall\, x \in [0, +\infty)\,,$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) := -x^2 - 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che $\mathrm{im}(g) = [0, +\infty) \subset D_f$, quindi $D_{f \circ g} = D_g = [0, +\infty)$, e si ha

$$f(g(x)) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1 \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

D'altra parte, $\mathrm{im}(f) = (-\infty, -1]$ ha intersezione vuota con D_g, quindi non è possibile considerare la composizione $g \circ f$!!!!

Funzioni inverse e composizione. Infine, sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Possiamo quindi considerarne l'inversa f^{-1}. Usando l'operazione di composizione fra funzioni, precisiamo le relazioni fra f e f^{-1}. Si ha

$$\begin{aligned} \forall\, y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,, \\ \forall\, x \in \mathrm{im}(f^{-1}) \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x\,. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Verifichiamo per esempio la seconda (**esercizio:** verificare la prima): chiaramente, dato $x \in \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$, $f(x) \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$. Per definizione di f^{-1}, $f^{-1}(f(x)) = z$ se e solo se $f(z) = f(x)$. Poiché f è iniettiva, necessariamente $z = x$.

Esempio 2.6.6. Applicando (2.6.3) alla coppia $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln(x)$, si trovano le relazioni

$$\begin{aligned} (\exp \circ \ln)(y) = \exp(\ln(y)) = y \quad \forall\, y \in (0, +\infty), \\ (\ln \circ \exp) = \ln(\exp(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Applichiamo la prima relazione e, anche usando le proprietà di logaritmi e potenze, troviamo che

$$x^x = (\exp \circ \ln)(x^x) = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln(x))$$

da cui si vede che

$$\text{il dominio naturale della funzione } \ x \mapsto x^x \ \text{ è } (0, +\infty).$$

Operazioni algebriche su funzioni.

Definizione 2.6.7. *Date $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$; chiamiamo:*

- somma *di f e g la funzione $(f + g) : D \to \mathbb{R}$ definita da $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ per ogni $x \in D$;*
- prodotto *di f e g la funzione $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ definita da $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in D$;*
- quoziente *di f e g la funzione $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ definita da $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni x appartenente all'insieme $D' := D \setminus \{x \in D \,:\, g(x) = 0\}$.*
- potenza *di f e g la funzione $f^g : D'' \to \mathbb{R}$ definita da $f^g(x) := f(x)^{g(x)}$ per ogni x appartenente all'insieme $D'' := D \cap \{x \in D_f \,:\, f(x) > 0\}$. Infatti, **la base di una potenza a esponente reale deve essere strettamente positiva**. Ecco perché $f(x)^{g(x)}$ è ben definita laddove $f(x) > 0$.*

In particolare, data $f : D_f \to \mathbb{R}$, chiamiamo *funzione reciproco* di f il quoziente $\frac{1}{f}$, con dominio $D_f \setminus \{x \in D_f \,:\, f(x) = 0\}$.

Esempio 2.6.8. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \sqrt{x+1} \qquad \forall\, x \in D_f = [-1, +\infty)\,, \qquad\qquad g(x) := \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Allora $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$, e

$$\forall\, x \in D \qquad (f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}\,, \quad (f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,, \quad \frac{f}{g}(x) = x \cdot \sqrt{x+1}\,.$$

Si noti che, di fatto, il dominio naturale della funzione $\frac{f}{g}$ coincide con $D_f = [-1, +\infty)$.

Osservazione 2.6.9 (Relazione fra parità/disparità e operazioni sulle funzioni)**.** Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$ due funzioni, e supponiamo che D sia simmetrico rispetto all'origine. Allora

- *se f e g sono entrambe pari, anche le funzioni $f + g$, $f \cdot g$, e f/g sono pari.* Verifichiamo per esempio che $f \cdot g$ sia pari (si ragiona allo stesso modo per f/g): per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$.

- *se f e g sono entrambe dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono pari, mentre la funzione $f + g$ è dispari.* In effetti, per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$, mentre $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$.

- *se f è pari e g è dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono dispari.* In effetti, per ogni $x \in D$ vale $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(f \cdot g)(x)$. Non si può concludere nulla sulla funzione somma $f + g$. Ad esempio, la funzione $x \mapsto x^2 + x^3$ non è né pari né dispari.

Ordinamento delle funzioni reali.

Definizione 2.6.10. *Consideriamo due funzioni $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Diciamo che*

- *$f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in D$;*

- *$f < g$ se $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in D$.*

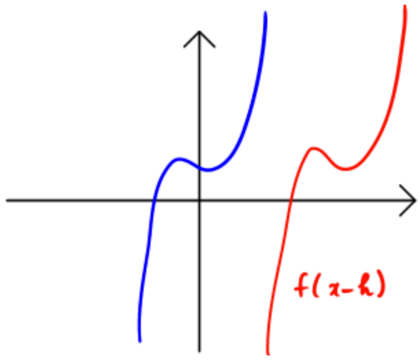
Osserviamo che la relazione d'ordine così introdotta <u>non è totale</u> (cioè non sempre due funzioni sono confrontabili): per esempio, considerate le funzioni $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) := 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è falso sia che $f \leq g$ su $D = \mathbb{R}$, sia che $g \leq f$ su $D = \mathbb{R}$.

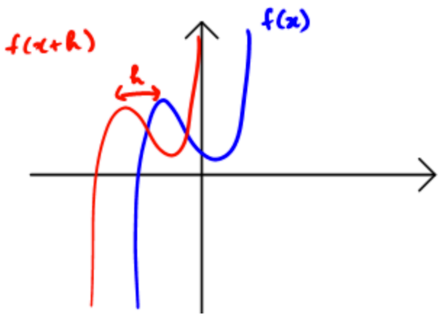
2.7 *Appunti operativi:* traslazioni e omotetie di grafici

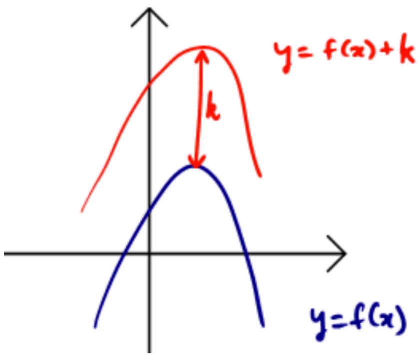
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e siano h, $k > 0$. Introduciamo le seguenti traslate di f:

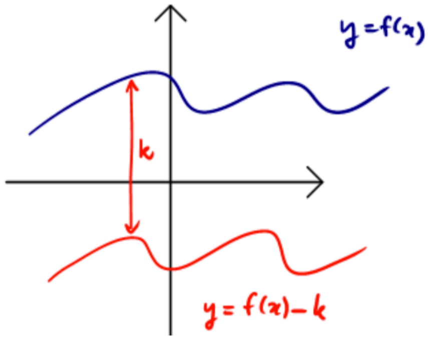
$$\begin{cases} g(x) := f(x-h) & \forall\, x \in D_g = \{x \in \mathbb{R} \, : x - h \in D_f\}\,, \\ j(x) := f(x+h) & \forall\, x \in D_j = \{x \in \mathbb{R} \, : x + h \in D_f\}\,, \\ h(x) := f(x) + k & \forall\, x \in D_h = D_f\,, \\ \ell(x) := f(x) - k & \forall\, x \in D_\ell = D_f\,. \end{cases}$$

Allora:
- il grafico di $g(x) = f(x - h)$ si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di h nella direzione positiva dell'asse delle x;
- il graf. di $j(x) = f(x + h)$: traslando orizzontalmente il grafico di f di h nella direzione negativa dell'asse x;
- il grafico di $h(x) = f(x) + k$: traslando verticalmente il grafico di f di k nella direzione positiva dell'asse delle y;
- il grafico di $\ell(x) = f(x) - k$: traslando verticalmente il grafico di f di k nella direzione negativa dell'asse y.





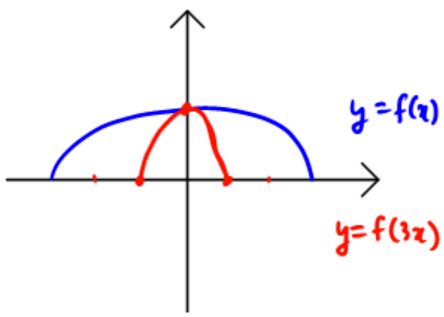


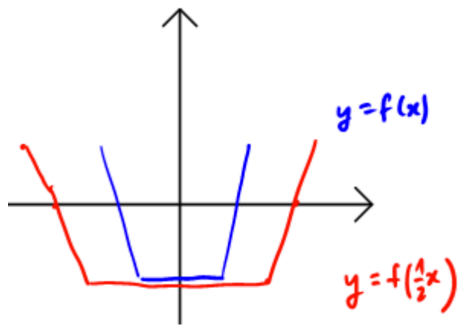


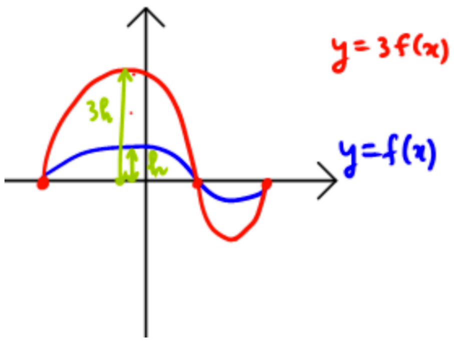
Infine, sempre a partire da una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, introduciamo le seguenti funzioni, il cui grafico è una dilazione/contrazione del grafico di f (cioè, si ottiene per *omotetia* dal grafico di f):

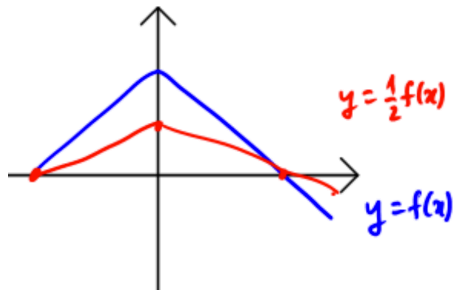
$$\begin{cases} \text{dato } A > 1, & g(x) := f(Ax) \ \ \forall\, x \in D_g = \{x \in \mathbb{R} \, : Ax \in D_f\}\,, \\ \text{dato } 0 < a < 1, & j(x) := f(ax) \ \ \forall\, x \in D_j = \{x \in \mathbb{R} \, : ax \in D_f\}\,, \\ \text{dato } B > 1, & h(x) := Bf(x) \ \ \forall\, x \in D_h = D_f\,, \\ \text{dato } 0 < b < 1, & \ell(x) := bf(x) \ \ \forall\, x \in D_\ell = D_f\,. \end{cases}$$

Allora:
- il grafico di $g(x) = f(Ax)$ si ottiene contraendo orizzontalmente i grafico di f del fattore A;
- il grafico di $j(x) = f(ax)$ si ottiene dilatando orizzontalmente i grafico di f del fattore $\frac{1}{a}$;
- il grafico di $h(x) = Bf(x)$ si ottiene dilatando verticalmente i grafico di f del fattore B;
- il grafico di $h(x) = bf(x)$ si ottiene contraendo verticalmente i grafico di f del fattore b.









2.8 *Appunti operativi:* i grafici qualitativi delle funzioni elementari

Concludiamo questo capitolo con una tabella[4] che raccoglie i grafici qualitativi delle principali funzioni elementari.

I GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI DEVONO ESSERE MEMORIZZATI

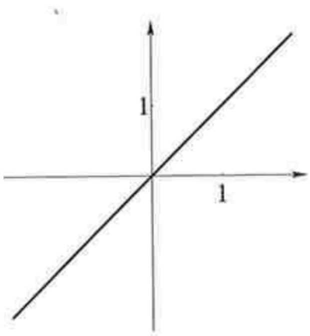


Fig. 1.1 : $y = x$

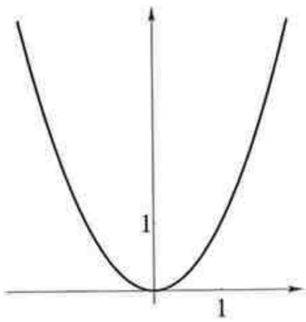


Fig. 1.2 : $y = x^2$

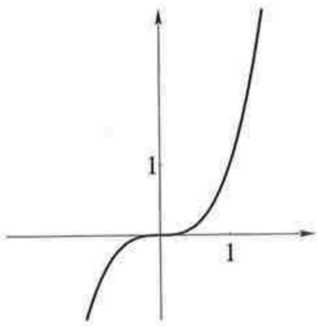


Fig. 1.3 : $y = x^3$

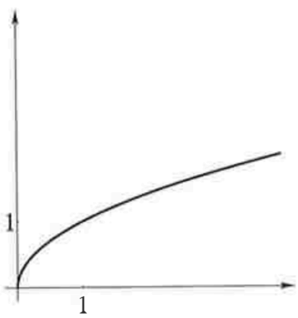


Fig. 1.4 : $y = \sqrt{x}$

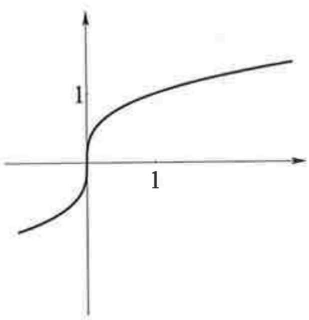


Fig. 1.5 : $y = \sqrt[3]{x}$

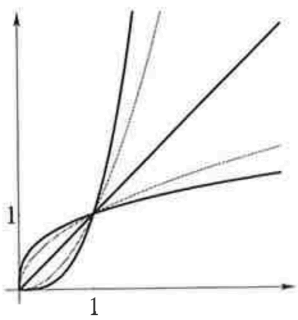


Fig. 1.6 : $y = x^3, x^2, x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$

[4] tratta dal testo *Primo Corso di Analisi Matematica* di E. Acerbi, G. Buttazzo.

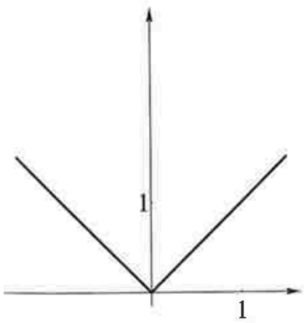


Fig. 1.7 : $y = |x|$

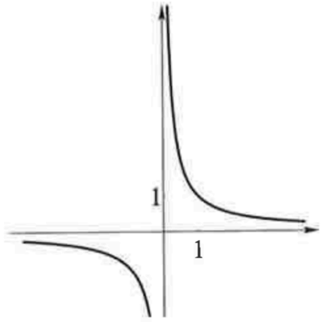


Fig. 1.8 : $y = 1/x$

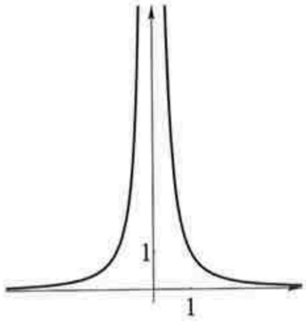


Fig. 1.9 : $y = 1/x^2$

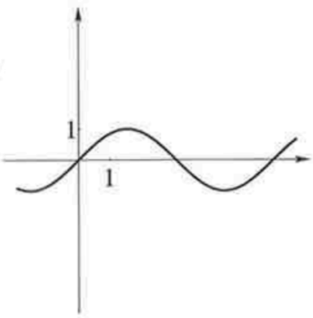


Fig. 1.10 : $y = \operatorname{sen} x$

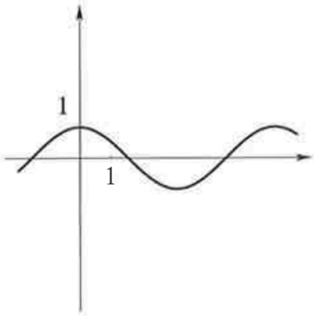


Fig. 1.11 : $y = \cos x$

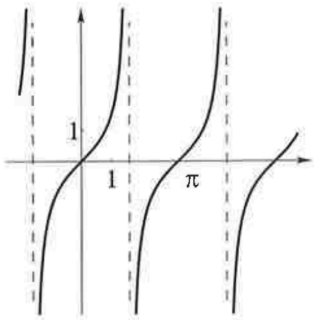


Fig. 1.12 : $y = \tan x$

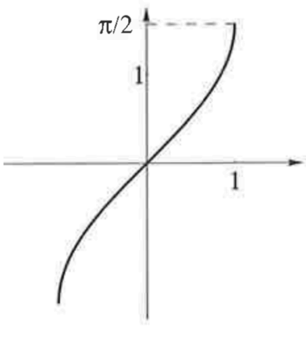


Fig. 1.13 : $y = \operatorname{arcsen} x$

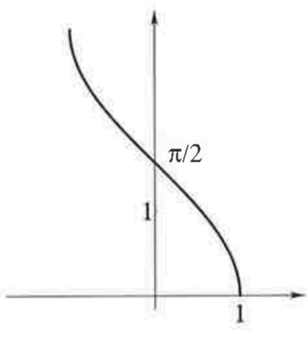


Fig. 1.14 : $y = \arccos x$

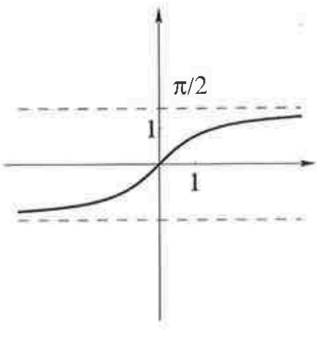


Fig. 1.15 : $y = \arctan x$

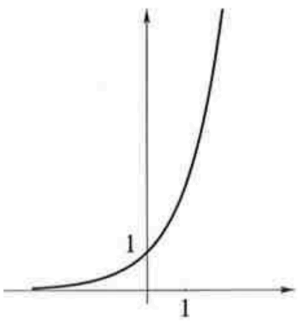


Fig. 1.16 : $y = \mathrm{e}^x$

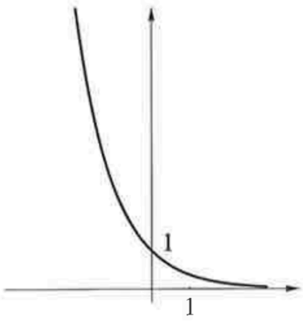


Fig. 1.17 : $y = \mathrm{e}^{-x}$

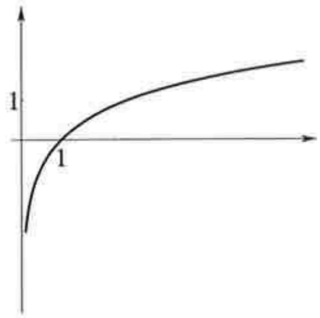


Fig. 1.18 : $y = \log x$

Capitolo 3

Insiemi numerici: da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$

3.1 I numeri naturali

Rivediamo brevemente alcuni fatti elementari sull'insieme dei numeri naturali:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

- 0 è un numero naturale!!!!!
- Possiamo rappresentare geometricamente $\mathbb{N}$ su una retta, fissando su di essa un punto origine O, a cui viene associato lo 0, e un secondo punto $U \neq O$, a cui si associa il valore 1. Si considera "verso di percorrenza positivo" della retta il verso di percorrenza da O a U. La lunghezza del segmento OU individua un'unità di misura. Riportando il multiplo n di OU sulla retta nel verso positivo, si individua il punto associato al numero naturale n.
- La relazione $\leq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N}$.
- Ogni numero naturale n ha come divisori 1 e n. Se questi sono i suoi unici divisori, n viene detto *primo*.

Operazioni in $\mathbb{N}$

In $\mathbb{N}$ sono definite operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$, **interne** a $\mathbb{N}$. Somma e prodotto si rappresentano come due funzioni da $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{N}$ (acquisire familiarità con questa rappresentazione sarà utile in vista della Sez. 4.1). Quindi, la somma

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$$

è la funzione che a una coppia di numeri naturali (n_1, n_2) associa la loro somma $n_1 + n_2$, e analogamente il prodotto si rappresenta come

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}.$$

Per le operazioni di somma e prodotto valgono le proprietà

commutativa: $n_1 + n_2 = n_2 + n_1, \quad n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$

associativa: $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$

$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$

distributiva: $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$.

Sommatoria. Abituiamoci ad usare il seguente simbolo:

Definizione 3.1.1. Siano

$I \subset \mathbb{N}$:	insieme <u>finito</u> di indici
$(a_i)_{i\in I}$	famiglia <u>finita</u> di numeri (**reali**), al variare di i in I

Con il simbolo di sommatoria

$$\sum_{i\in I} a_i$$

indichiamo la somma di tutti i numeri a_i, al variare di i in I.

Esempio 3.1.2. Dati

$$I = \{1, 2, 3\} \text{ e } a_i = 2^{2i},$$

allora

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=1}^{3} 2^{2i} = 2^2 + 2^4 + 2^6 = \dots$$

Il principio di induzione e le sue conseguenze

Partiamo da un'osservazione, tanto elementare quanto importante: **Ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ ha in $\mathbb{N}$ il suo successore, cioè il primo (il più piccolo) numero naturale maggiore di n.** Infatti,

$$\begin{array}{lll} 1 & \to & 2 = 1+1 \\ 2 & \to & 3 = 2+1 \\ \dots & & \\ n & \to & n+1 \\ \dots & & \end{array}$$

Non solo: **a partire da 1 si ottengono tutti i numeri naturali tramite somme successive**

$$2 = 1+1, \quad 3 = 2+1 = 1+1+1, \quad \dots$$

La seconda osservazione si formalizza correttamente tramite il
Principio di induzione: *Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:*

1. $0 \in \mathcal{S}$;
2. $\forall\, n \in \mathcal{S} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{S}$.

Allora $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

In altri termini:

- nel linguaggio della logica matematica, il principio di induzione si esprime così:

$$(\mathcal{S} \subset \mathbb{N}) \text{ \textbf{e} } (0 \in \mathcal{S}) \text{ \textbf{e} } (\forall\, n,\ (n \in \mathcal{S} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{S})) \\ \Rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{N}$$

- oppure, possiamo dire che $\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ contenente 0 e tale che

$$(\forall\, n,\ (n \in \mathcal{S} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{S}))$$

Di grande importanza e utilità pratica è, per noi, la seguente
Forma equivalente del principio di induzione: *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato. Supponiamo che valgano le seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{P}(0)$ *è vera;*
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Allora $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Questa forma del principio di induzione viene usata per dimostrare teoremi i cui enunciati consistano di proprietà dipendenti da n, che devono essere valide per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, in virtù del principio di induzione, per dimostrare che un certo predicato $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$, devo

1 verificare che $\mathcal{P}(0)$ è vero *(caso iniziale)*

2 dimostrare che, **se** $\mathcal{P}(n)$ **è vero, allora anche** $\mathcal{P}(n+1)$ **è vero** *(passo induttivo)*

N.B.: si badi bene al fatto che, nel punto 2., non si deve dimostrare che $\mathcal{P}(n+1)$ è vera, ma che

$$\mathcal{P}(n+1) \text{ è deducibile da } \mathcal{P}(n).$$

In altri termini, nel punto 2. si dimostra a sua volta un teorema avente come ipotesi: $\mathcal{P}(n)$ e come tesi: $\mathcal{P}(n+1)$.

Vediamo alcuni esempi di applicazione di questo principio.

Esempio 3.1.3. *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$2^n > n \tag{3.1.1}$$

In virtù del principio di induzione, devo

1. verificare che (3.1.1) valga per $n = 0$. Ora, per $n = 0$ (3.1.1) diventa
$$2^0 > 0$$
che è vero, visto che $2^0 = 1$;
2. dimostrare che se $\mathcal{P}(n)$ è vero, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vero. Supponiamo quindi che valga $\mathcal{P}(n)$, cioè la (3.1.1). Allora, si ha si ha
$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n \overset{(\star)}{>} n+1$$
(dove la disuguaglianza $(\star)$ è dovuta a (3.1.1) e al fatto che $2^n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Abbiamo pertanto dedotto la validità di $\mathcal{P}(n+1)$.

Abbiamo quindi dimostrato (3.1.1) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 3.1.4 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** *Dimostrare che, er ogni* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *si ha*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{3.1.2}$$

In virtù del principio di induzione, devo

1. verificare che (3.1.2) valga per $n = 0$. Ora, per $n = 0$ (3.1.2) diventa
$$(1+x)^0 \geq 1$$
che è vero, visto che $(1+x)^0 = 1$;
2. dimostrare che se $\mathcal{P}(n)$ è vero, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vero. Supponiamo quindi che valga $\mathcal{P}(n)$, cioè la (3.1.2). Allora, si ha
$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \overset{(\star)}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$
(dove la disuguaglianza $(\star)$ è dovuta a (3.1.2)). Abbiamo quindi dedotto la validità di $\mathcal{P}(n+1)$.

Abbiamo quindi dimostrato (3.1.2) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il principio di induzione può anche essere formulato
- partendo da un $n_0 > 0$ al posto di 0
- dimostrando $\mathcal{P}(n)$ per ogni $n \in \{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ anziché per ogni $n \in \mathbb{N}$:

cioè:
Se

1. $\mathcal{P}(n_0)$ *è vera;*

2. $\forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$,

allora $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \geq n_0$.

Questa forma del principio di induzione è utile per dimostrare proprietà, sempre dipendenti da un parametro naturale n, che però hanno significato solo per $n \geq n_0$ per un certo $n_0 > 0$, come nel seguente esempio.

Esempio 3.1.5 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** *Dimostrare che*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \geq n_0 = 1. \tag{3.1.3}$$

In virtù del principio di induzione, devo

1. verificare che (3.1.3) valga per $n = 1$. Ora, per $n = 1$ (3.1.3) diventa
$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1 \cdot 2}{2}$$
che è vero, visto che $\sum_{i=1}^{1} i = 1$;

2. dimostrare che se $\mathcal{P}(n)$ è vero, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vero. Supponiamo quindi che valga $\mathcal{P}(n)$, cioè la (3.1.3). Allora, si ha
$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{(\star)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
(dove l'identità $(\star)$ è dovuta a (3.1.3)). Abbiamo quindi dedotto la validità di $\mathcal{P}(n+1)$.

Abbiamo quindi dimostrato (3.1.3) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Un'ulteriore conseguenza del principio di induzione è il
Principio del minimo intero: *Ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *ha minimo.*[1]
Questa proprietà di $\mathbb{N}$
- viene anche detta "del buon ordinamento" di $\mathbb{N}$
- è FALSA per $\mathbb{R}$: come vedremo, è falso (!!!!) che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ abbia minimo

[1] Formalizzeremo nel Capitolo 4 il concetto di minimo di un insieme che, comunque, il lettore possiede già intuitivamente...

Successioni definite per induzione (o per ricorrenza). Concludiamo questa introduzione al principio di induzione illustrando come esso può essere usato per definire delle successioni, cioè delle funzioni a valori in $\mathbb{R}$ *aventi come dominio un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ (studieremo sistematicamente le successioni nel Capitolo 6). Per definire una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mediante il principio di induzione (si parla anche, in questo caso, di *definizione per ricorrenza*), si definisce direttamente il valore a_0, che possiamo anche chiamare *dato iniziale*, e si fornisce un procedimento grazie al quale risulti automaticamente definito il termine a_{n+1} non appena sia noto il termine a_n.

Diamo alcuni esempi di successioni definite per induzione (o ricorrenza).

Esempio 3.1.6 (Fattoriale di n)**.**

$$\boxed{0! = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1)\cdot n!}$$

Segue da questa definizione che

$$1! = 1\cdot 0! = 1, \quad 2! = 2\cdot 1! = 2, \quad 3! = 3\cdot 2! = 6, \quad 4! = 4\cdot 3! = 24, \cdot$$

Esempio 3.1.7 (Coefficienti binomiali)**.** Siano $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$. Allora, definiamo

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{se } 0 \le k \le n.}$$

Se $k > n$ si pone, per definizione,

$$\boxed{\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{se } k > n.}$$

Segue da questa definizione che

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1, \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n, \qquad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1, \qquad \ldots\ldots$$

• Valgono le seguenti relazioni:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Fattoriali e coefficienti binomiali entrano in gioco nel **calcolo combinatorio**, che studia i modi per raggruppare e/o ordinare, secondo date regole, gli elementi di un insieme finito di oggetti. In questa sede, ci preme sottolineare che i coefficienti binomiali entrano in gioco nella seguente formula, che motiva anche la terminologia *coefficiente binomiale*.

Formula del Binomio di Newton: *Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *la potenza* n*-esima del binomio* $(a+b)$ *è data da*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Usiamo la convenzione che $0^0 = 1$. In particolare, scegliendo $a = 1$ e $b = x$ la formula del binomio diventa

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{3.1.4}$$

3.2 Dagli interi ai razionali

L'insieme dei numeri interi

Osserviamo che, dati due numeri naturali a, $b \in \mathbb{N}$, l'equazione

$$a + x = b$$

ha una (unica) soluzione $\underline{x \in \mathbb{N}}$ se $b \geq a$. Se, invece, $b < a$, non esiste alcun numero naturale x che verifichi $a + x = b$. Questo fatto motiva l'introduzione dei numeri interi, che si ottengono dai numeri naturali nel seguente modo: ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associamo l'elemento x tale che $x + n = 0$. Denotiamo x con il simbolo $-n$ (x è detto l'*opposto* di n) e definiamo

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

- Anche $\mathbb{Z}$ si può rappresentare geometricamente su una retta: riprendendo la retta che rappresenta $\mathbb{N}$, al numero intero $-n$ (con $n \in \mathbb{N}$) viene associato il punto che si ottiene riportando n volte il segmento unitario OU nel verso opposto al verso positivo.
- La relazione $\leq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{Z}$.
- Si ha chiaramente $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- La somma, il prodotto **e la sottrazione** sono operazioni interne a $\mathbb{Z}$.

L'insieme dei numeri razionali

Dati due numeri interi a, $b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, l'equazione

$$ax = b$$

ha una soluzione $\underline{x \in \mathbb{Z}}$ se e solo se b è un multiplo intero di a. In caso contrario, non esiste alcun $x \in \mathbb{Z}$ che la verifichi. Per renderla risolvibile per ogni coppia di interi a, $b \in \mathbb{Z}$ (con $a \neq 0$), ampliamo l'insieme $\mathbb{Z}$, e definiamo

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \right\},$$

con la convenzione di considerare ogni frazione ridotta ai minimi termini, cioè con numeratore e denominatore privi di denominatori comuni. In altri termini, identifichiamo per esempio $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{18}$.

- $\mathbb{Z}$ può essere identificato con il sottoinsieme $\tilde{\mathbb{Z}}$ di $\mathbb{Q}$ dato da

  $$\tilde{\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \ n = 1 \right\}.$$

  Con un lieve abuso di notazione, scriviamo quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Sono operazioni interne a $\mathbb{Q}$ la somma il prodotto, la sottrazione **e la divisione per un numero razionale non nullo**.
- Ad ogni $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ è possibile associare un unico numero $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ che verifichi $xy = 1$. Il numero y viene detto *inverso* (o *reciproco*) di x.
- La relazione d'ordine $\leq$ si estende a $\mathbb{Q}$ nel seguente modo:
  - dato un numero razionale $\frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, si ha che

    $$\frac{m}{n} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ e } n \text{ hanno lo stesso segno,}$$
    $$\frac{m}{n} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ e } n \text{ hanno segni diversi.}$$
  - Dati $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ in $\mathbb{Q}$, li ordiniamo nel seguente modo:
    - se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ hanno <u>segno diverso</u>, è immediato confrontarli. Avremo infatti

      $$\frac{m}{n} \leq 0 \leq \frac{p}{q} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{p}{q} \leq 0 \leq \frac{m}{n}.$$

* se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono entrambi positivi, possiamo supporre che $m \geq 0$ e $n > 0$[2] e $p \geq 0$ e $q > 0$. Allora abbiamo che

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad mq \leq pn.$$

* se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono entrambi negativi, allora ci "appoggiamo" alla relazione d'ordine definita nel caso di numeri razionali positivi:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{p}{q} \leq -\frac{m}{n}.$$

- Inoltre, per quel che riguarda la relazione d'ordine $\leq$ su $\mathbb{Q}$ si ha
  - $(\mathbb{Q}, \leq)$ è **totalmente ordinato**: due numeri razionali si possono sempre confrontare
  - $(\mathbb{Q}, \leq)$ **NON** è **ben ordinato** (cioè non vale la proprietà del buon ordinamento che, invece, abbiamo visto per $\mathbb{N}$): è **falso** che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$ abbia minimo. Per esempio non esiste il più piccolo numero razionale maggiore di zero.

- **Rappresentazione decimale dei numeri razionali.** Ogni numero $x \in \mathbb{Q}$ può essere espresso in base 10 nella forma

$$\begin{aligned} x = \pm\Big(&c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0 \\ &+ c_{-1}10^{-1} + c_{-2}10^{-2} + \ldots\Big) \qquad \text{con le cifre } c_i,\ c_{-j} \in \{0, 1, \ldots, 9\}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Le cifre c_i, c_{-j} vengono dette *cifre decimali*. Equivalentemente, si può scrivere

$$x = \pm c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \ldots \tag{3.2.2}$$

Questa è, peraltro, la rappresentazione dei numeri fatta da un calcolatore. Chiamiamo la (3.2.1)/(3.2.2) *rappresentazione* (o *allineamento*) *decimale* del numero x. Osserviamo che, mentre il numero di cifre a sinistra della virgola in (3.2.2) è finito, in generale vi possono essere infinite cifre decimali a destra della virgola.

Definizione 3.2.1. Diciamo che una rappresentazione decimale è

– *limitata* se vi è un numero finito di cifre a destra della virgola. Ad esempio,

$$\frac{18723}{100} = 187,23 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2},$$

– *illimitata* se vi è un numero infinito di cifre a destra della virgola. Ad esempio,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} &= -0,166666666\ldots \\ &= -\big(0 + 1 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} + 6 \cdot 10^{-6} \\ &\qquad + 6 \cdot 10^{-7} + 6 \cdot 10^{-8} \ldots\big). \end{aligned}$$

Se, in una rappresentazione decimale illimitata, da una certa posizione decimale in poi un blocco di cifre si ripete indefinitamente, allora la rappresentazione viene detta periodica e tale blocco è detto *periodo*[3]. Ad esempio, $-1/6$ ha un allineamento decimale periodico di periodo 6.

[2] in effetti, per esempio si ha che

$$\frac{3}{5} = \frac{+3}{+5} = \frac{-3}{-5}.$$

[3] vengono considerati *propri* i periodi diversi da 9: ad esempio, il numero $0,99999999\ldots$ viene identificato con 1.

Si può dimostrare che

ad ogni numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ viene associato
uno e un solo allineamento decimale, finito o periodico.

Chiaramente, i numeri interi si identificano con gli allineamenti decimali in cui le cifre a destra della virgola sono tutte uguali a zero.

3.3 Dai numeri razionali ai numeri reali

Fu scoperto dai matematici greci che esistono segmenti la cui lunghezza non può essere espressa mediante numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della lunghezza x della diagonale del quadrato di lato 1 che, per il teorema di Pitagora, verifica

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Teorema 3.3.1. *Non esiste un $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.*

Dimostrazione. Per assurdo esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Rappresentiamo x nella forma

$$x = \frac{m}{n} \qquad \text{con } m,\, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0.$$

Si intende la frazione ridotta ai minimi termini, cioè m e n privi di divisori comuni; tenendo conto di questo, e del fatto che, se $x^2 = 2$ anche $(-x)^2 = 2$, possiamo anche supporre che

$$x = \frac{m}{n} \qquad \text{con } m,\, n \in \mathbb{N}, \text{ privi di divisori comuni, e } n \neq 0.$$

Poiché $x^2 = 2$, segue che

$$m^2 = 2n^2. \tag{3.3.1}$$

Allora m^2 è un numero pari. Ne consegue che m è un numero pari (in effetti, se m fosse dispari (cioè della forma $m = 2k + 1$), allora anche $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sarebbe dispari). Quindi m è della forma $m = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, e dalla (3.3.1) segue che $4k^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2k^2$. Ma allora n^2 è pari, quindi anche n è pari. Abbiamo pertanto concluso che sia m sia n sono pari, cioè divisibili per 2. Ma questo è in contraddizione con il fatto che né m né n abbiano divisori comuni. Assurdo. □

Il Teorema 3.3.1 suggerisce l'esistenza di un'estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$, in cui l'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione. Si tratta dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 3.3.2. *Chiamiamo* numero reale *un (qualsiasi) allineamento decimale, e denotiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.*

Chiaramente i numeri razionali (che, ribadiamo, si identificano con gli allineamenti decimali *limitati* o *illimitati e periodici*) sono un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si ha dunque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Chiamiamo *numero irrazionale* un numero reale non razionale (rappresentato da un allineamento decimale non finito né periodico). L'insieme dei numeri irrazionali si denota ovviamente con il simbolo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ad esempio, sono numeri irrazionali $\pm\sqrt{2}$ (cioè le radici di 2), π, la *costante di Nepero* e (qui approssimata con 55 cifre decimali)

$$\mathrm{e} = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749\ldots\ldots\ldots \tag{3.3.2}$$

Capitolo 4

I numeri reali

Le proprietà dell'insieme dei numeri reali che presentiamo in questo capitolo sono fondamentali per lo sviluppo del calcolo differenziale e integrale, e vanno quindi ben comprese e assimilate.

Tali proprietà sono riassunte dalla seguente affermazione

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ è un campo ordinato completo.}} \tag{4.0.1}$$

Dedicheremo tutto il capitolo alla comprensione di questa affermazione e a dedurre, da essa, le proprietà dei numeri reali che saranno alla base delle teoria sviluppata nel seguito.

4.1 La struttura di campo ordinato

La nozione di 'campo' viene dall'algebra, e si riferisce ad un insieme dotato di due operazioni, somma e prodotto, che godono di opportune proprietà. Tali proprietà si suddividono in tre gruppi:

- proprietà della somma;
- proprietà del prodotto;
- legami fra somma e prodotto.

Un campo ordinato è un campo dotato di una relazione d'ordine che a sua volta soddisfa opportuna condizioni. Invece di richiamare la definizione generale di campo ordinaro, scegliamo di specificarla direttamente nel contesto dell'insieme dei numeri reali.

$\mathbb{R}$ è un CAMPO

$\mathbb{R}$ è dotato delle operazioni di **somma** e **prodotto**, interne, che quindi descriviamo come funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Somma e prodotto godono delle seguenti proprietà:

- *Operazione di SOMMA:* $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a & (+ \text{ è commutativa}) \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) & (+ \text{ è associativa}) \\ \exists 0 \in \mathbb{R} \ : \ \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = 0 + a = a & (0 = \text{elem. neutro di } +) \\ \forall a \in \mathbb{R} \ \exists ! -a \in \mathbb{R} \ : & a + (-a) = (-a) + a = 0 & (-a = \text{opposto di } a) \end{array} \tag{4.1.1}$$

- *Operazione di PRODOTTO:* $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{lll}
\forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a & (\cdot \text{ è commutativa}) \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & (\cdot \text{ è associativa}) \\
\exists\, 1 \in \mathbb{R} \,:\, \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = 1 \cdot a = a & (1 = \text{elemento neutro di } \cdot) \\
\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; \exists! a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, & a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 & (a^{-1} = \text{reciproco di } a \text{ risp. a } \cdot)
\end{array}
\tag{4.1.2}
$$

- La somma e il prodotto godono della *proprietà distributiva:*

$$
\begin{array}{ll}
\forall a, b, c \in \mathbb{R} & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.
\end{array}
\tag{4.1.3}
$$

$\mathbb{R}$ è un campo ORDINATO

$\mathbb{R}$ è dotato di una relazione d'ordine **totale** $\leq$, che gode della seguente proprietà:

$$
\begin{array}{llll}
\forall a, b, c \in \mathbb{R} & \text{se } a \leq b & \text{allora} & a + c \leq b + c, \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R} & \text{se } a \leq b \text{ e } \begin{cases} c > 0 \\ c = 0 \\ c < 0 \end{cases} & \text{allora} & \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c \\ a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c. \end{cases}
\end{array}
\tag{4.1.4}
$$

La relazione d'ordine $\leq$ su $\mathbb{R}$ è definita nel seguente modo: siano dati due numeri reali x e y, rappresentati dagli allineamenti decimali

$$
x = \pm \left(c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \ldots \right) \qquad y = \pm \left(c'_k c'_{k-1} \ldots c'_1 c'_0, c'_{-1} c'_{-2} \ldots \right).
$$

Poiché, in entrambe le rappresentazioni, le cifre a sinistra della virgola rappresentano <u>numeri naturali</u>, per semplicità poniamo $n := c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ e $m := c'_k c'_{k-1} \ldots c'_1 c'_0$. Se x e y hanno segno diverso, è immediato confrontarli:

$$
\begin{aligned}
&\left(x = +n, c_{-1} c_{-2} \ldots, \qquad y = -m, c'_{-1} c'_{-2} \ldots \right) \;\Rightarrow\; y < 0 < x, \\
&\left(x = -n, c_{-1} c_{-2} \ldots, \qquad y = +m, c'_{-1} c'_{-2} \ldots \right) \;\Rightarrow\; x < 0 < y,
\end{aligned}
$$

e, inoltre, se x e y sono entrambi negativi (cioè $x = -n, c_{-1} c_{-2} \ldots$ e $y = -m, c'_{-1} c'_{-2} \ldots$), si ha che

$$
x < y \;\Leftrightarrow\; -y < -x\,.
$$

Possiamo quindi ridurci al caso in cui x e y sono entrambi non negativi, cioè della forma

$$
x = +n, c_{-1} c_{-2} \ldots \qquad y = +m, c'_{-1} c'_{-2} \ldots.
$$

Per confrontarli, basta <u>confrontare le prime cifre decimali diverse</u> dei due numeri. Si ha:

$$
n < m \;\; \Rightarrow x < y \qquad n > m \;\; \Rightarrow x > y\,.
$$

Se $n = m$, confrontiamo allora le prime cifre decimali a destra della virgola:

$$
\begin{cases}
c_{-1} < c'_{-1} \;\Rightarrow\; x < y, \\
c_{-1} > c'_{-1} \;\Rightarrow\; x > y,
\end{cases}
$$

mentre, se $c_{-1} = c'_{-1}$, sarà necessario confrontare le seconde cifre decimali a destra della virgola, con la stessa regola:

$$
\begin{cases}
c_{-2} < c'_{-2} \;\Rightarrow\; x < y, \\
c_{-2} > c'_{-2} \;\Rightarrow\; x > y,
\end{cases}
$$

mentre, se $c_{-2} = c'_{-2}$, sarà necessario confrontare le terze cifre decimali a destra della virgola, con la stessa regola, e così via......

Notazione. Disponendo delle relazioni $\leq$ e $<$ su $\mathbb{R}$, diremo d'ora in poi che un numero $x \in \mathbb{R}$ è positivo se $0 \leq x$, cioè $x \geq 0$; *strettamente* positivo se $0 < x$, cioè $x > 0$; negativo se $x \leq 0$; *strettamente* negativo se $x < 0$. Definiamo

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\} .$$

Il modulo di un numero reale

Definizione 4.1.1. *Dato $x \in \mathbb{R}$, il* modulo *(o* valore assoluto*) di x è il numero reale* **positivo** *definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Proprietà del valore assoluto. Si ha $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geq 0 \text{ e } |a| = 0 \text{ se e solo se } a = 0; \tag{4.1.5a}$$

$$|a| = |-a|; \tag{4.1.5b}$$

$$|a-b| \leq |a| + |b| \text{ e } |a+b| \leq |a| + |b| \tag{4.1.5c}$$

La (4.1.5c) viene detta *disuguaglianza triangolare.* Da essa deriva la seguente disuguaglianza

$$||a| - |b|| \leq |a-b| \qquad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}. \tag{4.1.6}$$

Infine, dalla definizione di modulo deriva immediatamente che

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Disuguaglianze con il valore assoluto. Ricordiamo che, dati $a,\, b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$,

$$|x-b| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x-b \leq a$$

$$|x-b| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x-b \geq a \text{ o } x-b \leq -a$$

Infine, ribadiamo il seguente fatto cruciale

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

In generale,

$$\text{se } n \text{ è pari} \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 4.1.2. A partire dal modulo si può definire la *distanza* fra due numeri reali: dati $x, y \in \mathbb{R}$, la distanza fra x e y è il numero reale non negativo definito da

$$d(x,y) := |x-y|$$

Proprietà della distanza:
1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. vale la disuguaglianza triangolare:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Dopo aver introdotto su $\mathbb{R}$ la struttura di campo ordinato, rimane da formalizzare l'assioma[1] (o proprietà) di completezza di $\mathbb{R}$. Lo vedremo nella Sez. 4.3, dopo aver introdotto alcune definizioni.

[1] *Assioma* significa "proprietà che si accetta per vera, senza dimostrazione".

4.2 Maggiorante, minorante, estremo superiore, estremo inferiore

Maggioranti e minoranti

Definizione 4.2.1 (Maggiorante)**.** *Consideriamo un insieme $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$.*

- *Si dice che un numero reale $M \in \mathbb{R}$ è un* maggiorante *per A se*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leq M\,.$$

- *Se l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto, si dice che A è* limitato superiormente*. Se A è privo di maggioranti, si dice che A è* illimitato superiormente*.*

Analogamente,

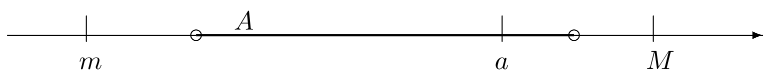
Definizione 4.2.2 (Minorante)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$.*

- *Si dice che un numero reale $m \in \mathbb{R}$ è un* minorante *per A se*

$$\forall\, x \in A, \quad x \geq m\,.$$

- *Se l'insieme dei minoranti di A è non vuoto, si dice che A è* limitato inferiormente*. Se A è privo di minoranti, si dice che A è* illimitato inferiormente*.*

Ecco una visualizzazione dei concetti di maggiorante e minorante:

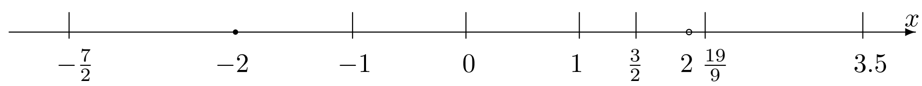


Definizione 4.2.3. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\underline{A \neq \emptyset}$. Diciamo che A è limitato se esso è sia superiormente, sia inferiormente limitato.*

Esempio 4.2.4.

1. Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 \leq x < 2\}$$



Si ha che

- $2, \dfrac{19}{9}, 3.5, \sqrt{26}, 150$ sono maggioranti per A.
- $-\sqrt{41}, -\dfrac{7}{2}$ sono minoranti per A.
- -1, 0, 1, $\dfrac{3}{2}$ non sono nè maggioranti nè minoranti per A.

Infatti, l'insieme dei maggioranti di A è: $\mathcal{M}(A) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 2\}$. A è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di A è: $m(A) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq -2\}$.

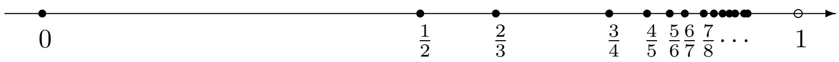
2. Si consideri l'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 1\}\ .$$

B è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di B è: $\mathcal{M}(B) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 1\}$. B è illimitato inferiormente.

3. Si consideri l'insieme

$$C = \left\{ \frac{n}{n+1} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$



C è limitato superiormente, e l'insieme dei suoi maggioranti è $\mathcal{M}(C) := \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \geq 1\}$. C è limitato inferiormente, e l'insieme dei suoi minoranti è $m(C) := \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \leq 0\}$.

4. Si consideri l'insieme

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 \leq 2 \right\} .$$

Si noti che D è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$. D è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di D è: $\mathcal{M}(D) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$. D è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di D è: $m(D) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\}$.

5. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; x = \frac{1}{2^n} \; n \in N \right\} .$$

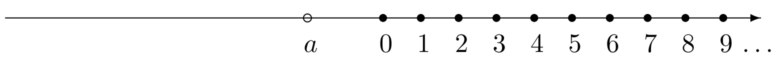
Si noti che E ha infiniti elementi e che $0 \notin E$. E è limitato superiormente e l'insieme dei maggioranti di E è: $\mathcal{M}(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. E è limitato inferiormente e l'insieme dei minoranti di E è: $m(E) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

La proprietà di Archimede

Come vedremo, gli insiemi

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \quad \text{non sono superiormente limitati.}$$

Poiché $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, per vedere questo è sufficiente dimostrare che $\mathbb{N}$



non è superiormente limitato. Questo fatto, intuitivo, si può dimostrare rigorosamente come conseguenza della
Proprietà di Archimede:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \; a, \, b > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \, n \neq 0, \quad na > b \tag{4.2.1}$$

Scegliendo $a = 1$ in (4.2.1) deduciamo che

$$\forall\, b \in \mathbb{R}, b > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \; : \; n > b, \tag{4.2.2}$$

quindi $\mathbb{N}$ non ammette alcun maggiorante in $\mathbb{R}$, cioè $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente. $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente; l'insieme dei minoranti di $\mathbb{N}$ è $m(N) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \leq 0\}$.

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

La proprietà che ora illustriamo è un'ulteriore conseguenza della **proprietà di Archimede**. Intuitivamente, 'densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$' significa che non solo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ma anche che i numeri razionali sono "fitti" in $\mathbb{R}$. Più precisamente, ogni numero $x \in \mathbb{R}$ può essere approssimato arbitrariamente bene da un numero razionale: in altri termini, comunque si fissi una tolleranza (cioè, un margine d'errore) $t > 0$, esiste un numero $y \in \mathbb{Q}$ tale che $-t < x - y < t$ (cioè, y dista da x meno di t). In simboli:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0\ \ \exists\, y \in \mathbb{Q} :\ \ |x - y| < t\,. \tag{4.2.3}$$

Se ne deduce che

$$\forall\,\text{coppia di numeri reali } x_1 < x_2 \text{ esistono infiniti numeri } q \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x_1 < q < x_2. \tag{4.2.4}$$

Si può dimostrare che anche l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso (nel senso appena specificato) in $\mathbb{R}$.

Estremo superiore ed estremo inferiore

Introduciamo ora i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore, e di massimo e minimo, per un insieme.

Definizione 4.2.5 (Estremo superiore)**.** *Sia A un insieme <u>non vuoto</u>. Diciamo che un numero reale M^* è* l'estremo superiore *di A se valgono (contemporaneamente) le seguenti condizioni:*

1. *M^* è un maggiorante per A;*
2. *$M^* \leq M$ per ogni maggiorante M di A*[2]*.*

Useremo la notazione $M^* = \sup(A)$.

Unicità dell'estremo superiore. Si noti che, nella definizione di *estremo superiore*, è stato usato l'articolo determinativo "il". Questo è dovuto al fatto che, mentre un insieme può avere in generale più di un maggiorante (anche infiniti maggioranti, si veda l'Esempio 4.2.4), **l'estremo superiore di un insieme, se esiste, è unico**. Per dimostrare ciò, supponiamo per assurdo che un dato insieme A possieda due estremi superiori M_1^* e M_2^*, con $M_1^* \neq M_2^*$. Per definizione di sup, si deve avere $M_1^* \leq M_2^*$ (in quanto M_2^* è un maggiorante e M_1^* il più "piccolo" fra i maggioranti). Ragionando allo stesso modo, si ha $M_2^* \leq M_1^*$. Ma allora $M_1^* = M_2^*$, in contraddizione con quanto supposto.

Si noti che, nella definizione di *estremo superiore*, non viene richiesto che M^* appartenga all'insieme A. Quando ciò accade, M^* viene detto *massimo* di A.

Definizione 4.2.6 (Massimo)**.** *Sia A un insieme <u>non vuoto</u> e supponiamo che esso abbia $M^* = \sup(A)$. Se $M^* \in A$, allora diciamo che M^* è il* massimo *di A e scriviamo $M^* = \max(A)$.*

Segue dall'unicità dell'estremo superiore che, se un insieme A ammette massimo, allora esso è unico.

Definizione 4.2.7 (Estremo inferiore)**.** *Sia A un insieme <u>non vuoto</u>. Diciamo che un numero reale m_* è l'*estremo inferiore *di A se valgono (contemporaneamente) le seguenti condizioni:*

1. *m_* è un minorante per A;*
2. *$m_* \geq m$ per ogni minorante m di A* [3]*.*

Useremo la notazione $m_* = \inf(A)$.

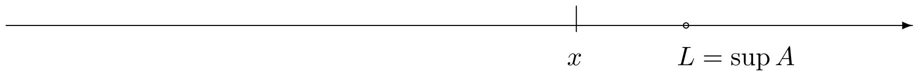
Ragionando come per il sup, si dimostra che **l'**inf **di un dato insieme, se esiste, è unico**.

[2] cioè M^* è "il più piccolo" fra i maggioranti di A.
[3] cioè m_* è "il più grande" fra i minoranti di A.

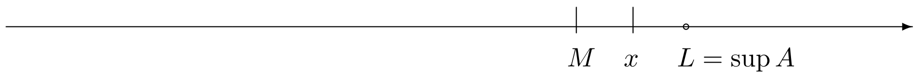
Definizione 4.2.8 (Minimo). *Sia A un insieme non vuoto e supponiamo che esso abbia $m_* = \inf(A)$. Se $m_* \in A$, allora diciamo che m_* è il* minimo *di A e scriviamo $m_* = \min(A)$.*

Di fondamentale importanza, e utilità operativa, sono le seguenti caratterizzazioni di sup e inf. La caratterizzazione del sup prende le mosse dalla seguente osservazione: Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Allora, un numero $L \in \mathbb{R}$ è il $\sup A$ **se e solo se**:

1. L è un maggiorante per A, cioè $\underline{\forall x \in A,\ x \leq L}$



2. L è il più piccolo dei maggioranti di A, e cioè ogni numero più piccolo di L non è maggiorante di A, e cioè $\underline{\forall M \in \mathbb{R} \text{ con } M < L\ \exists x \in A\text{: } M < x}$



Abbiamo quindi il seguente risultato

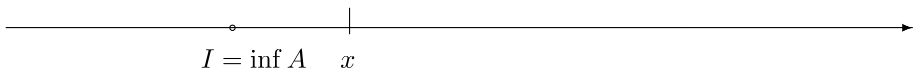
Lemma 4.2.9 (Caratterizzazione del sup con ε). *Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora, $L = \sup A$ se e solo se*

1. $\forall x \in A,\ x \leq L$

2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, x \in A\, :\, L - \varepsilon < x.$

Analogamente, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente, osserviamo che un numero $L \in \mathbb{R}$ è $\inf A$ **se e solo se**

1. l è un minorante per A, cioè $\underline{\forall x \in A,\ x \geq I}$



2. l è il più grande fra i minoranti di A, e cioè ogni numero più grande di l non è minorante per A, e cioè $\underline{\forall m \in \mathbb{R} \text{ con } m > I\ \exists x \in A\text{: } x < m}$

Abbiamo quindi il seguente risultato

Lemma 4.2.10 (Caratterizzazione dell'inf con ε). *Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente. Allora, $I = \inf A$ se e solo se*

1. $\forall x \in A,\ x \geq I$

2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, x \in A\, :\, x < I + \varepsilon.$

Esempio 4.2.11. Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}\, :\, x = \frac{1}{n} \text{ per } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}.$$

Si ha che $\frac{1}{n} \leq 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante per A. Poiché $1 \in A$, si ha che $1 = \sup(A) = \max(A)$. Dimostriamo ora che

$$0 = \inf(A)$$

(e quindi A non ammette minimo, in quanto $0 \notin A$) usando la caratterizzazione di inf fornita dal Lemma 4.2.10. Abbiamo infatti che

1. $0 < \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$;
2. fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \geq 1$ tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$: basta infatti prendere $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$, e l'esistenza di un tale $\bar{n}$ segue dalla proprietà di Archimede di $\mathbb{N}$ (scegliendo in (4.2.1) $a = 1$ e $b = \frac{1}{\varepsilon}$).

Riprendiamo ora gli insiemi dell'Esempio 4.2.4 e calcoliamone inf e sup.

Esempio 4.2.12. 1. Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, -2 \leq x < 2\} \, .$$

Si ha $\inf(A) = -2 \in A$ e quindi $\inf(A) = \min(A) = -2$. Inoltre, $\sup(A) = 2 \notin A$: quindi 2 non è il massimo di A. Siccome $\sup A$ è l'unico candidato a essere il massimo di A, concludiamo che l'insieme A non ha massimo.

2. Si consideri l'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x \leq 1\} \, .$$

Si ha $\sup(B) = \max(B) = 1$.

3. $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente, mentre $\inf(\mathbb{N}) = 0 \in \mathbb{N}$, quindi $\min(\mathbb{N}) = 0$.

4. L'insieme

$$C = \left\{ \frac{n}{n+1} \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \right\}$$

ha $\inf(C) = 0 \in C$, quindi $\min(C) = 0$. Usando la caratterizzazione di sup (**esercizio**), si vede che $\sup(C) = 1 \notin C$. Quindi C non ha massimo.

5. Si consideri l'insieme

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, x^2 \leq 2 \right\} \, .$$

Si ha $\sup(D) = \max(D) = \sqrt{2}$ e $\inf(D) = \min(D) = -\sqrt{2}$.

6. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, x = \frac{1}{2^n} \; n \in N \right\} \, .$$

Si ha $\sup(E) = \max(E) = 1$. D'altronde, usando la caratterizzazione di inf (**esercizio**), si vede $\inf(E) = 0 \notin E$, quindi E non ha minimo.

Concludiamo questa sezione ricordando il
Comportamento di inf **e** sup **rispetto all'inclusione di insiemi:** Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi non vuoti. Allora,

$$A \subseteq B \;\Rightarrow\; (\sup A \leq \sup B \quad \textbf{e} \quad \inf A \geq \inf B) \, .$$

Questa proprietà si verifica facilmente ricordando le definizioni di maggiorante e minorante e di sup e inf; il lettore provi a farlo per esercizio.

4.3 L'assioma di completezza

L'Esempio 4.2.12 sembra suggerire che, non appena un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è superiormente (rispettivamente, inferiormente) limitato, esso ammette sup **in** $\mathbb{R}$ (risp., inf **in** $\mathbb{R}$). Questo è vero **nell'insieme ambiente** $\mathbb{R}$, ed è proprio quanto viene affermato dal seguente

Assioma di completezza per l'insieme dei numeri reali. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se A è superiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un maggiorante), allora A ha l'estremo superiore **in** $\mathbb{R}$.*

*Analogamente, se A è inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ (cioè se A ha almeno un minorante), allora A ha l'estremo inferiore **in** $\mathbb{R}$.*

Si noti che l'assioma di completezza **NON** afferma che ogni insieme (non vuoto e) superiormente limitato in $\mathbb{R}$ ha il massimo (o che ogni insieme (non vuoto e) inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ ha il minimo): l'esistenza del massimo (del minimo, risp.) dipende dal fatto che il sup appartenga all'insieme (che l'inf appartenga all'insieme).

Osservazione 4.3.1. Osserviamo che l'insieme $\mathbb{Q}$ non gode della proprietà enunciata dall'assioma di completezza: in altri termini, esistono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ superiormente limitati (rispettivamente, inferiormente limitati) che non ammettono estremo superiore in $\mathbb{Q}$ (risp., estremo inferiore in $\mathbb{Q}$). Infatti, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leq 2\}$$

e dimostriamo che esso, pur avendo maggioranti in $\mathbb{Q}$ (l'insieme dei maggioranti in $\mathbb{Q}$ per $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$ è $\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq \sqrt{2}\}$, quindi per esempio i numeri $\frac{3}{2}$ e 2 sono maggioranti, in $\mathbb{Q}$, per $\mathcal{H}$), non ha sup in $\mathbb{Q}$.

Notiamo infatti che $\mathcal{H}$, essendo un sottoinsieme (superiormente limitato) di $\mathbb{R}$, ammette sup in $\mathbb{R}$. Chiamiamo $S := \sup_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$. È immediato osservare che $S = \sqrt{2}$. Ora, per assurdo esista l'estremo superiore $q \in \mathbb{Q}$ di $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$ (quindi q è il "più piccolo" fra tutti i maggioranti di $\mathcal{H}$ che sono numeri razionali). Necessariamente deve essere $q \neq \sqrt{2}$. Inoltre, non è difficile osservare che deve essere $q > \sqrt{2}$. Ma allora, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (si ricordi la (4.2.4)) esistono infiniti $y \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{2} < y < q$. Si noti che tali y sono dei maggioranti razionali per l'insieme $\mathcal{H}$, e che essi sono strettamente minori di q. Questo contraddice il fatto che q sia l'estremo superiore di $\mathcal{H}$ in $\mathbb{Q}$. Assurdo.

Ne concludiamo che $\mathcal{H}$ non ammette sup in $\mathbb{Q}$.

Allo stesso modo, si può dimostrare (e questo è lasciato al lettore per **esercizio**) che $\mathcal{H}$ non ha inf in $\mathbb{Q}$, pur avendo minoranti in $\mathbb{Q}$.

L'altra faccia della stessa medaglia: il teorema degli elementi separatori

In molti testi[4] l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$ viene formulato non in termini dell'esistenza del sup (rispettivamente, dell'inf) per ogni insieme superiormente (risp., inferiormente) limitato, ma, **in modo del tutto equivalente**, in termini dell'esistenza di (almeno) un *elemento separatore* per ogni coppia di *classi separate*. Vediamo questa formulazione alternativa.

Definizione 4.3.2. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, non vuoti, tali che*

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Diciamo che A e B sono due classi separate.

Assioma di completezza per l'insieme dei numeri reali (Forma equivalente). *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, non vuoti, due classi separate. Allora*

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \leq c \leq b; \tag{4.3.1}$$

c viene detto elemento separatore di A e B.

Osservazione 4.3.3. 1. Questa forma alternativa dell'assioma di completezza afferma quindi che ogni coppia di classi separate (non vuote) ammette (almeno) un elemento separatore. Notare che non stiamo affermando che tale elemento separatore sia unico; per esempio, se

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < -2\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 2\}$$

allora tutti i numeri fra -2 e 2 sono elementi separatori. L'unicità dell'elemento separatore è un'ulteriore proprietà per due classi separate, e in tal caso si dice che che le classi A e B sono *contigue*.

[4]Fra cui il testo [Marson/Baiti/Ancona/Rubino]

2. La (4.3.1), che abbiamo dato in forma assiomatica, si può in effetti **dimostrare** a partire dall'assioma di completezza dato all'inizio di questa sezione. Viceversa, partendo dall'assioma di completezza nella forma (4.3.1), si può dimostrare che ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente (inferiormente) limitato ha in $\mathbb{R}$ estremo superiore (inferiore).

Come ci si può aspettare tenendo conto del fatto che le due forme dell'assioma di completezza che abbiamo visto sono equivalenti, osserviamo che $\mathbb{Q}$ non gode della proprietà (4.3.1), cioè è **falso** che ogni coppia di classi separate in $\mathbb{Q}$ ammette (almeno) un elemento separatore. Ecco il *controesempio*: consideriamo

$$\begin{aligned} A &= \left\{ a \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} : \quad a^2 \le 2 \right\}, \\ B &= \left\{ b \in \mathbb{Q}^+ : \quad b^2 \ge 2 \right\}. \end{aligned}$$

Si ha che

- A e B sono due classi separate:
$$a \le b \quad \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B.$$
- NON ESISTE $c \in \mathbb{Q}$ elemento separatore, cioè tale che $a \le c \le b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Infatti, si può vedere che A e B, viste come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, hanno come unico elemento separatore $c' = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Se, per assurdo, A e B ammettessero anche un elemento separatore $c \in \mathbb{Q}$, esso dovrebbe necessariamente coincidere con l'elemento separatore di $\mathbb{R}$. Quindi avremmo $c = \sqrt{2}$ e $c \in \mathbb{Q}$, assurdo.

4.4 La retta reale

La completezza di $\mathbb{R}$ si può interpretare in questo modo: $\mathbb{R}$ non ha "lacune" (mentre $\mathbb{Q}$ ha "lacune"). Geometricamente, questo si traduce nel fatto che gli elementi di $\mathbb{R}$ si possono rappresentare geometricamente come punti di una retta.

Per fare ciò, si fissa un punto O (detto origine) sulla retta, al quale viene associato il numero 0, e un altro punto U. Si conviene che il verso di percorrenza della retta da O a U sia considerato il *verso positivo*, e il verso opposto sia preso come verso negativo. In questo modo, vengono individuate sulla retta:

- una semiretta positiva (la semiretta che contiene U),
- una semiretta negativa.

Per convenzione, la lunghezza del segmento OU viene presa come *unità di misura*.

Dopodiché, dato un punto P sulla retta, a esso viene associato un unico numero reale x in questo modo: si considera la lunghezza $\overline{OP}$ del segmento OP e si definisce

$$x := \begin{cases} \overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta positiva,} \\ -\overline{OP} & \text{se } P \text{ appartiene alla semiretta negativa.} \end{cases}.$$

Il numero reale x viene detto *ascissa* del punto P. Viceversa, fissato $x \in \mathbb{R}$, a esso viene associato uno e un solo punto P sulla retta in questo modo:

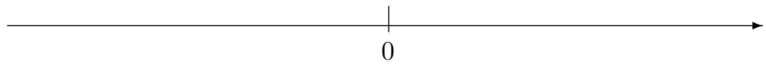
$$\begin{cases} x > 0 & \leftrightarrow \quad P \text{ nella semiretta positiva tale che } \overline{OP} = x, \\ x < 0 & \leftrightarrow \quad P \text{ nella semiretta negativa tale che } \overline{OP} = -x, \\ x = 0 & \leftrightarrow \quad P = O \end{cases}.$$

Quindi,

ogni punto della retta può essere univocamente associato ad un numero reale

e

a ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto sulla retta



D'ora in poi, useremo il termine *retta reale* come sinonimo dell'insieme dei numeri reali.

In questo contesto, abbiamo anche un' **interpretazione geometrica del modulo:** Ricordando che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ è univocamente associato un punto P sulla retta reale, il numero $|x|$ è la distanza di P dall'origine O.
Più in generale, dati x, $y \in \mathbb{R}$, il numero $|x-y|$ coincide con la distanza fra i corrispondenti punti P_x e P_y sulla retta reale.

4.5 La retta reale estesa e la nozione di intervallo

Ci proponiamo di estendere le nozioni di

- estremo superiore di un insieme A, al caso in cui A sia **vuoto** <u>oppure</u> **non** sia **superiormente limitato**
- estremo inferiore di un insieme A, al caso in cui A **vuoto** <u>oppure</u> **non** sia **inferiormente limitato**

A questo scopo, estendiamo l'insieme dei numeri reali tramite i **simboli** $+\infty$ e $-\infty$.

Definizione 4.5.1. *Definiamo il simbolo* $+\infty$ *mediante la disuguaglianza*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < +\infty\,. \tag{4.5.1}$$

Definiamo il simbolo $-\infty$ *mediante la disuguaglianza*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x > -\infty\,. \tag{4.5.2}$$

Chiamiamo retta reale estesa *l'insieme* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

N.B. $+\infty$ e $-\infty$ **NON sono** numeri reali!!!!!!!!!!!! Osserviamo che $\overline{\mathbb{R}}$ eredita da $\mathbb{R}$ la relazione d'ordine, completata dalle disuguaglianze (4.5.1)–(4.5.2). Infatti,

- estendiamo a $\overline{\mathbb{R}}$ la relazione d'ordine su $\mathbb{R}$ ponendo

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty; \tag{4.5.3}$$

  In questo modo, $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato;

- estendiamo a $\overline{\mathbb{R}}$ la somma e il prodotto di $\mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{array}{lll}
\forall\, x \in \mathbb{R} & x + (-\infty) = -\infty, & (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
\forall\, x \in \mathbb{R} & x + (+\infty) = +\infty, & (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 & x \cdot (+\infty) = +\infty, & (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < 0 & x \cdot (+\infty) = -\infty, & (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 & x \cdot (-\infty) = -\infty, & \\
\forall\, x \in \mathbb{R}, x < 0 & x \cdot (-\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R} & \frac{x}{\pm\infty} = 0, & \frac{x}{0} = \pm\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 & \frac{\pm\infty}{x} = +\infty, & \frac{-\infty}{x} = -\infty, \\
\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < 0 & \frac{\pm\infty}{x} = -\infty, & \frac{-\infty}{x} = +\infty.
\end{array} \tag{4.5.4}$$

  Non sono definite (e quindi non hanno senso) le operazioni

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad (\pm\infty) \cdot 0, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}. \tag{4.5.5}$$

Ritorneremo su questo nella Sez. 13.6, nella quale introdurremo il concetto di forma indeterminata.
Segue dalla (4.5.3) che

- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty$ è un maggiorante per A;
- per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $-\infty$ è un minorante per A.

Teorema 4.5.2. *Per ogni $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, esistono* $\sup(A)\,, \inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$.
In particolare, se $A \subset \mathbb{R}$, si ha che

1. $\sup(A) = +\infty$ *se e solo se A* non *è superiormente limitato in* $\mathbb{R}$;
2. $\inf(A) = -\infty$ *se e solo se A* non *è inferiormente limitato in* $\mathbb{R}$;
3. $\sup(\emptyset) = -\infty$ *e* $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo che $\sup(\emptyset) = -\infty$ (con un ragionamento analogo (**esercizio!**) si ottiene anche che $\inf(\emptyset) = +\infty$). Innanzitutto osserviamo che

$$\text{l'insieme dei maggioranti di } \emptyset \text{ è } \overline{\mathbb{R}}. \tag{4.5.6}$$

In effetti, proviamo a negare la (4.5.6): $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}$ che non è un maggiorante per $\emptyset$, cioè $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\exists x \in \emptyset$ verificante $x > y$. Ma questa affermazione è palesemente falsa, in quanto contiene il termine $\exists x \in \emptyset$. Allora (4.5.6) è vera. Tenendo conto della definizione di sup, concludiamo che $\sup(\emptyset) = -\infty$. □

Si noti bene che le caratterizzazioni dell'estremo inferiore e superiore con ε **valgono solo** se sup e inf sono numeri reali.

Intervalli e semirette

Definizione 4.5.3. *Un sottoinsieme $I \neq \emptyset$ di $\overline{\mathbb{R}}$ viene detto* intervallo *se, presi due qualunque suoi punti $x < y$, tutti i punti compresi fra x e y appartengono ancora ad I. In simboli,*

$$\forall x, y \in I \quad x < z < y \quad \Rightarrow \quad z \in I.$$

Ad esempio, l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} \quad \text{è un intervallo,}$$

mentre l'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0\} \quad \text{NON è un intervallo.}$$

Tipologia degli intervalli. Siano a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a < b$. Distinguiamo quattro tipi di intervalli:

- $(a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,:\, a < x < b\}$ *intervallo aperto.*
  Nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervallo è limitato, come nell'esempio qui sotto:

- $[a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,:\, a \leq x < b\}$ *intervallo semiaperto a destra.*
  Nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervallo è limitato, come nell'esempio qui sotto:

- $(a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \ a < x \leq b\}$ *intervallo semiaperto a sinistra.*
  Nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervallo è limitato, come nell'esempio qui sotto:

- $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \ a \leq x \leq b\}$ *intervallo chiuso.* Nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervallo è limitato, come nell'esempio qui sotto:

Inoltre,
- Se $a = -\infty$ e $b \in \mathbb{R}$, l'intervallo $(-\infty, b]$ viene anche detto semiretta illimitata a sinistra;
- Se $a \in \mathbb{R}$ e $b = +\infty$, l'intervallo $[a, +\infty)$ viene anche detto semiretta illimitata a destra;
- Dato un intervallo I *limitato*, si definisce ampiezza dell'intervallo il numero $\sup(I) - \inf(I)$.

Definizione 4.5.4 (Intorno di un punto)**.** *Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, chiamiamo* intorno *aperto (rispettivamente, chiuso) di x_0 di raggio r l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ (risp., l'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$). Denoteremo l'intorno aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ anche con il simbolo $I(x_0, r)$.*

N.B.: si ha che
$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < r\} \ .$$
Quindi $I(x_0, r)$ è l'insieme dei numeri reali x che distando da x_0 (strettamente) meno di r.

Notiamo che
$$\forall \, x_0 \in \mathbb{R} \ \ \forall \, r_1, \, r_2 \in \mathbb{R} \qquad r_1 < r_2 \Rightarrow I_{r_1}(x_0) \subseteq I_{r_2}(x_0).$$

Capitolo 5

I numeri complessi

Facciamo il punto della situazione: abbiamo fin qui rivisitato gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, nell'ambito dei quali lo studente lavora da anni. L'introduzione, in momenti storici successivi, degli insiemi numerici che estendono $\mathbb{N}$ è stata motivata da esigenze di tipo matematico che, però, avevano una controparte in problemi di valenza applicativa. Nella fattispecie,

- si è passati da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ perché la sottrazione di due numeri naturali non è un'operazione interna a $\mathbb{N}$ (e quindi per poter eseguire le sottrazioni);
- da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ perché il quoziente di due numeri interi non è un'operazione interna a $\mathbb{Z}$ (e quindi per poter eseguire le divisioni);
- da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ perché l'estrazione di radice non è interna a $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ non è razionale); l'equazione $x^2 = 2$ è la traduzione algebrica del problema geometrico di trovare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario, ed è stato a partire da questo problema che i pitagorici hanno scoperto l'esistenza dei numeri irrazionali...

Restano però dei problemi che nell'ambito dei numeri reali non hanno soluzione. Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \text{ non ha soluzioni in } \mathbb{R}. \tag{5.0.1}$$

Questo ci porta ad estendere l'insieme dei numeri reali, introducendo il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ dove, come vedremo alla fine di questo capitolo, <u>tutte</u> le equazioni algebriche ammettono soluzoni.

Storicamente, l'introduzione dei numeri complessi è legata alle **formule risolutive per equazioni di terzo grado** proposte nel '500: per le soluzioni di

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

si ha la formula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Essa perde significato quando $q^2 - p^3 < 0$ perché, in tal caso, ci si ritrova a calcolare la radice quadrata di un numero strettamente negativo. È questa la motivazione che ha portato all'introduzione del campo dei numeri complessi, nel quale l'equazione (5.0.1) ammetterà soluzione.

Seguiremo questa strada:

- introdurremo una radice di -1 (cioè una soluzione, necessariamente <u>non reale</u>, dell'equazione (5.0.1)), denotata con il simbolo i, e poi

- introdurremo l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come il "più piccolo" *campo* che contenga i e $\mathbb{R}$.

Quindi $\mathbb{C}$ dovrà contenere gli elementi del tipo

$$a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_n i^n \qquad \text{per } n \in \mathbb{N} \text{ e } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ arbitrari.} \tag{5.0.2}$$

D'altra parte, siccome i risolve (5.0.1), si ha che

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

Non è difficile vedere che da questo consegue che tutte le potenze di i valgono ± 1 o $\pm i$. Allora $\mathbb{C}$ contiene gli elementi del tipo (5.0.2) se e solo se, più semplicemente, contiene tutti gli elementi del tipo $a + ib$ (cioè le combinazioni lineari di 1 e i), al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Queste considerazioni motivano la seguente

Definizione 5.0.1. - *Chiamiamo* <u>*unità immaginaria*</u> *i il numero (complesso) t.c.*

$$i^2 = -1.$$

- *Chiamiamo* <u>*numero complesso*</u> *z un oggetto che si scrive nella forma*

$$z = a + ib, \quad \textit{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

- *Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi:*

$$\mathbb{C} = \{a + ib : \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}\}.$$

- *Il numero reale a è detto* <u>*parte reale*</u> *di z; scriveremo*

$$a = \mathrm{Re}(z)$$

- *Il numero reale b è detto* <u>*parte immaginaria*</u> *di z; scriveremo*

$$b = \mathrm{Im}(z).$$

Si noti bene il fatto sia la parte reale **sia la parte immaginaria** di un numero complesso **sono numeri reali!** Quindi abbiamo, per esempio

$$\mathrm{Re}(i) = 0, \quad \mathrm{Im}(i) = 1.$$

5.1 La forma algebrica di un numero complesso

Definizione 5.1.1 (Forma algebrica di un numero complesso)**.** *L'espressione $z = a + ib$ è detta* <u>*forma algebrica*</u> *del numero complesso z. Si scrive anche*

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z). \tag{5.1.1}$$

Osserviamo che

1. $$\text{Un numero } z = a + ib \in \mathbb{C} \text{ è reale se e solo se } b = \mathrm{Im}(z) = 0.$$

2. I numeri complessi con parte reale nulla vengono detti *puramente immaginari*. Per esempio, i è un numero puramente immaginario.

3. Dati due numeri complessi $z_1 = \mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1)$ e $z_2 = \mathrm{Re}(z_2) + i\mathrm{Im}(z_2)$, si ha che
$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2). \end{cases}$$

Una conseguenza immediata della rappresentazione dei numeri complessi in forma algebrica è che $\mathbb{C}$ si identifica in modo naturale con $\mathbb{R}^2$.

Identificazione fra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$: Ogni numero complesso $z = a + ib$ si può identificare con la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e scriviamo
$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

Infatti:

- $\mathbb{C}$ si rappresenta nel piano di Gauss: a ogni complesso $z = a+ib$ si associa il punto $P = (a, b)$ di ascissa a e ordinata b;
- viceversa, a ogni P di coordinate cartesiane $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, si associa il numero complesso $z = a + ib$.

In particolare, il sottoinsieme dei numeri reali (cioè, i numeri complessi $a+ib$ con parte immaginaria $b = 0$) è rappresentato dall'asse delle ascisse. I numeri puramente immaginari corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate. In questo contesto, ci si riferisce a $\mathbb{R}^2$ come al *piano complesso* o *piano di Gauss.*

La struttura di campo su $\mathbb{C}$

Vediamo ora che l'insieme $\mathbb{C}$ è, come $\mathbb{R}$, dotato della struttura di campo, e cioè di due operazioni, somma e prodotto, che godono di opportune proprietà. Definiamo queste operazioni.

Definizione 5.1.2 (Operazioni sui numeri complessi)**.** *Su $\mathbb{C}$ sono definite la somma e il prodotto, date, per ogni $(a + ib)$ e $(c + id) \in \mathbb{C}$, da*

- **somma:**
$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$
- **prodotto:**
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{5.1.2}$$

Commentiamo la (5.1.2): applicando formalmente lo sviluppo del prodotto del binomio si ha
$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd,$$
da cui si ottiene l'uguaglianza in (5.1.2) tenendo conto che $i^2 = -1$.

L'insieme $\mathbb{C}$, con le operazioni $+$ e $\cdot$, è un <u>campo</u>, e cioè soddisfa gli assiomi di campo (cf. (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3)). In particolare,

- l'elemento neutro di $+$ è $0 = 0 + i0$: infatti
$$z + 0 = (a + ib) + (0 + i0) = a + ib = z = 0 + z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$
- per ogni $z = a + ib$, l'opposto è l'elemento $-z = (-a) + i(-b)$.
- l'elemento neutro di $\cdot$ è: $z = 1 = 1 + i0$:
$$z \cdot 1 = (a + ib) \cdot (1 + i0) = a + ib = z = 1 \cdot z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$
- ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha inverso rispetto al prodotto dato da
$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

- le operazioni $+$ e $\cdot$ godono della proprietà commutativa, associativa e vale la proprietà distributiva.

Sottolineiamo che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo, ma **non un campo ordinato**: non è possibile introdurre in $\mathbb{C}$ alcuna relazione d'ordine che sia compatibile con la struttura di campo e che lo renda quindi un campo ordinato.

Per il calcolo esplicito dei reciproci e dei quozienti sarà utile la seguente osservazione

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2. \tag{5.1.3}$$

Quindi, quando $z = a+ib$ compare al denominatore, sarà sufficiente moltiplicare per $a-ib$ (cioè, per il *complesso coniugato* di z), per liberarsi della presenza dell'unità immaginaria al denominatore. Per esempio,

$$\frac{3-5i}{2+i} = \frac{(3-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{1-13i}{1^2+2^2} = \frac{1-13i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{13}{5}i\,.$$

L'operazione di coniugio

Definizione 5.1.3. *Per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$, chiamiamo* complesso coniugato *(o, più semplicemente,* coniugato*) di z il numero complesso*

$$\overline{z} = x - iy = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Chiamiamo coniugio *la funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ che ad ogni elemento di $\mathbb{C}$ associa il suo complesso coniugato.*

Ad esempio,

$$\text{se } z = 4 - 3i \text{ allora } \overline{z} = 4 + 3i\,.$$

Tenendo conto della rappresentazione di $\mathbb{C}$ nel piano complesso, è immediato vedere che la controparte geometrica dell'operazione di coniugio è la simmetria assiale rispetto all'asse reale.

Il seguente risultato raccoglie le proprietà dell'operazione di coniugio.

Proposizione 5.1.4 (Proprietà del coniugio)**.** *Si ha che*

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), \tag{5.1.4a}$$
$$z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z), \tag{5.1.4b}$$
$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \tag{5.1.4c}$$
$$\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \tag{5.1.4d}$$
$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \tag{5.1.4e}$$
$$\overline{(z^{-1})} = \overline{z}^{-1}, \tag{5.1.4f}$$
$$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad \textit{se } z_2 \neq 0, \tag{5.1.4g}$$
$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 \geq 0, \tag{5.1.4h}$$
$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a+ib)}} = \overline{(a-ib)} = a + ib = z, \tag{5.1.4i}$$
$$\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}. \tag{5.1.4j}$$

In particolare, il lettore tenga ben presente che **la somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono numeri reali**.

Dimostrazione. Le (5.1.4a)–(5.1.4b) si controllano facilmente scrivendo $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$; idem per le (5.1.4c)–(5.1.4d). Per quel che riguarda la (5.1.4e), scriviamo $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ e ricordiamo che $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$, sicché

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Per dimostrare la (5.1.4f), usiamo l'osservazione (5.1.3) e procediamo in questo modo

$$\overline{(z^{-1})} = \overline{\frac{1}{a+ib}} = \overline{\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}} = \overline{\frac{a-ib}{a^2+b^2}} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2} = \dots$$
$$= \overline{z}^{-1}\,.$$

La (5.1.4g) è un'immediata conseguenza della (5.1.4f). □

Il modulo di un numero complesso

Definizione 5.1.5. *Dato un numero complesso $z = a + ib$, il suo modulo è il* <u>*numero reale*</u> *(positivo)*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Osserviamo che, se $z \in \mathbb{R}$, allora $|z|$ coincide con il suo valore assoluto. Infatti, dato $z = a + i0 = a \in \mathbb{R}$, si ha che $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Quindi il modulo complesso è un'estensione del modulo (valore assoluto) reale.

Nel quadro dell'identificazione fra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, abbiamo la seguente interpretazione geometrica del modulo: dato il numero complesso $z = a + ib$ e il punto $P = (a, b)$ con cui esso si identifica, si ha che

$$|z| \text{ è la distanza di } P = (a, b) \text{ da } O = (0, 0).$$

Più in generale, dati due numeri complessi z_1 e z_2,

$$|z_1 - z_2| \text{ è la distanza fra i punti (corrispondenti a) } z_1 \text{ e } z_2.$$

Il modulo gode delle seguenti proprietà (cf. le (5.1.5)), la cui (facile) dimostrazione è lasciata al lettore; ci limitiamo a osservare che la prima delle (5.1.5b) (e così la seconda..) segue dal fatto che

$$|a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2 + b^2},$$

mentre la (5.1.5c) deriva dalla seguente proprietà di $\sqrt{\cdot}$, detta *subaddititvità*:

$$\sqrt{x + y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \forall\, x,\, y \in [0, +\infty).$$

In particolare, sottolineiamo che il modulo complesso ha, naturalmente, le stesse proprietà della sua versione reale.

Proposizione 5.1.6 (Proprietà del modulo)**.** *Per ogni z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ si ha che*

$$|z| \ge 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \tag{5.1.5a}$$
$$|\Re z| \le |z|, \quad |\Im z| \le |z|, \tag{5.1.5b}$$
$$|z| \le |\Re z| + |\Im z|, \tag{5.1.5c}$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{5.1.5d}$$
$$|\overline{z}| = |z|, \tag{5.1.5e}$$
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \tag{5.1.5f}$$
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{5.1.5g}$$

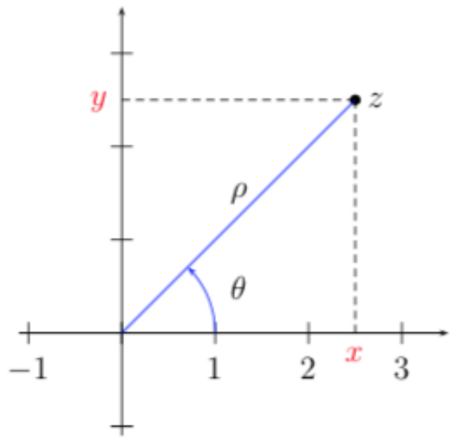
5.2 La forma trigonometrica di un numero complesso

In questa sezione diamo una rappresentazione alternativa di $\mathbb{C}$, che è basata sull'uso di un diverso sistema di riferimento, alternativo a quello cartesiano, in $\mathbb{R}^2$. Iniziamo quindi questa sezione introducendo le *coordinate polari.*

Coordinate polari

Ogni punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ può essere rappresentato tramite le *coordinate polari* (ρ, θ) definite da:

- ρ è la **distanza** di $P = (x, y)$ dall'origine O:
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.2.1}$$
- θ è l'angolo (in radianti, con verso antiorario), compreso fra l'asse delle ascisse e la retta congiungente l'origine $O = (0, 0)$ al punto $P = (x, y)$.



Abbiamo introdotto le coordinate polari (ρ, θ) associate a un punto di coordinate cartesiane (x, y). Viceversa, ad un punto P rappresentato dalle coordinate polari (ρ, θ) sono associate le coordinate cartesiane (x, y) date da
$$x = \rho \cos(\theta), \qquad y = \rho \sin(\theta). \tag{5.2.2}$$

Osservazione 5.2.1. Supponiamo che $P = O = (0, 0)$. Allora, da (5.2.1) segue che la prima coordinata polare ρ vale 0, mentre la seconda coordinata polare è *indeterminata*: infatti, essendo $x = y = 0$ e $\rho = 0$, la (5.2.2) è soddisfatta per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora che $P = (x, y) \neq O$: ciò è vero se e solo se $x^2 + y^2 > 0$. Tenendo conto delle (5.2.2), vediamo allora che una coppia di coordinate polari (ρ, θ) per P deve soddisfare
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Ora, la prima coordinata polare ρ è univocamente determinata da (5.2.3), mentre la seconda (cioè la θ) non lo è. Infatti, P possiede infinite coordinate polari θ. Più precisamente, due coppie (ρ, θ_1) e (ρ, θ_2), con ρ data da (5.2.1), sono coordinate polari per P se e solo se
$$\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{cioè, } \theta_1 - \theta_2 \text{ è un multiplo intero di } 2\pi).$$

Infatti, se $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, allora $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$ e $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2)$. Per esempio, il punto $P = (1, -1)$ ha coordinate polari date dalle coppie $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(\sqrt{2}, 11\pi/4)$, $(\sqrt{2}, -5\pi/4)$, etc....

La forma trigonometrica

Sia $z = x + iy$ un numero complesso, identificato con il punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, che si rappresenta nelle coordinate polari (ρ, θ) legate a (x, y) da (5.2.2). Allora
$$z = x + iy = \rho \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Abbiamo quindi ottenuto la forma trigonometrica

$$\boxed{z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

del numero complesso z. In questo contesto, le coordinate polari vengono chiamate
- ρ: *modulo* di z (in effetti, segue dalla (5.2.1) che $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ coincide con il modulo definito nella Sez. 5.1);
- θ: *argomento* di θ.

Ribadiamo che, in vista del legame fra le coordinate cartesiane e quelle polari,

- Date (ρ, θ), il numero complesso $z = x + iy$ risulta univocamente determinato dalle formule

$$x = \rho\cos(\theta), \qquad y = \rho\sin(\theta).$$

- Viceversa, dato $z = x + iy$, determino (ρ, θ) tramite
  - $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$;
  - θ è UN angolo che verifica

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}.$$

Come già ricordato nell'Osservazione 5.2.1, θ NON è univocamente determinato dalle relazioni di cui sopra. Per questo, è significativo introdurre l'insieme degli (infiniti) argomenti di un numero complesso z, definito da

$$\mathrm{Arg}(z) := \{\theta \in \mathbb{R} \, : \, z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Segue dall'Osservazione 5.2.1 che:

- se $z = 0$, $\mathrm{Arg}(z) = \mathbb{R}$ (l'argomento di 0 è *indeterminato*);
- se $z \neq 0$ e θ_0 è un argomento per z, allora

$$\mathrm{Arg}(z) = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Esempio 5.2.2. Si ha che

1. per $z = -1$ si ha

   $|z| = 1$,
   $\mathrm{Arg}(-1) = \{\theta \in \mathbb{R} : \, -1 = 1\left[\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\right], \, k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi + 2k\pi : \, k \in \mathbb{Z}\}$;

2. per $z = 2i$

   $|2i| = 2$,
   $\mathrm{Arg}(2i) = \left\{\theta \in \mathbb{R} : \, 2i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right], \, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : \, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

3. per $z = 1 - i$ si ha

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad \mathrm{Arg}(1 - i) = \left\{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi : \, k \in \mathbb{Z}\right\};$$

4. per $z = 1 + i\sqrt{3}$ si ha

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2, \quad \mathrm{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : \, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Le formule di De Moivre

Ricaviamo le formule per la rappresentazione in forma trigonometrica del prodotto e del quoziente di due numeri complessi z_1 e z_2, nota la forma trigonometrica di z_1 e di z_2. Più precisamente, supponiamo che i numeri z_1 e z_2 si rappresentino come

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)), \qquad z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

- Si ha
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \,[&\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ &+ i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))] \end{aligned}$$
Tenendo conto delle formule di addizione del coseno e del seno viste nella Sezione 2.5, ricaviamo che
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] ,$$
quindi ritroviamo la formula per il modulo del prodotto di due numeri complessi (già dimostrata nella Prop. 5.1.6, cf. la (5.1.5d)), e ricaviamo la formula che lega l'insieme degli argomenti di $z_1 \cdot z_2$ agli argomenti di z_1 e z_2:
$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)}. \tag{5.2.4}$$

- Se $z_2 \neq 0$, si ha che
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))}{(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))}{(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))}\frac{(\cos(\theta_2) - i\sin(\theta_2))}{(\cos(\theta_2) - i\sin(\theta_2))} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))}{\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)} \end{aligned}$$
da cui, tenendo conto delle formule di sottrazione per seno e coseno, si ottiene che
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] .$$
Quindi
$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)}. \tag{5.2.5}$$

Possiamo generalizzare la formula di De Moivre (5.2.4) al prodotto di n fattori

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\big(\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\big).$$

In particolare, **se tutti i fattori sono uguali**:

$$\boxed{z^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]}.$$

Esempio 5.2.3. Scriviamo in forma algebrica $(1+i)^7$. Si ha

$$|1+i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto

$$(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = 8 - 8i.$$

5.3 La forma esponenziale di un numero complesso

Ci poniamo il problema di estendere la funzione esponenziale al campo complesso, cioè di dare senso a
$$e^z \in \mathbb{C}, \qquad \text{per } z \in \mathbb{C}$$
in modo che l'esponenziale complesso continui a soddisfare alcune delle proprietà dell'esponenziale reale.

Definizione 5.3.1. *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\boxed{e^z := e^{\operatorname{Re}(z)} \left[\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))\right]} \tag{5.3.1}$$

In questo modo è definita la funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

In altri termini, se $z = x + iy$, si ha $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Esempio 5.3.2. Si ha

$$\begin{aligned}
e^{(3-i)} &= e^3 \left(\cos(-1) + i \sin(-1)\right) = e^3(\cos(1) - i \sin(1)),\\
e^{2i\pi} &= e^0 \left[\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)\right] = \boxed{1},\\
e^{i\pi} &= e^0(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = \boxed{-1}, \quad \text{pertanto}
\end{aligned}$$

ricaviamo la formula 'magica'
$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$
che contiene i cinque numeri fondamentali 0, 1, π, e, i dell'analisi matematica.

Vediamo ora una serie di proprietà dell'esponenziale complesso. Sottolineiamo che la (5.3.2a) è l'analogo in campo complesso della ben nota proprietà dell'esponenziale reale.

Proposizione 5.3.3 (Proprietà dell'esponenziale complesso)**.** *Si ha che*

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{5.3.2a}$$
$$e^z e^{-z} = 1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{5.3.2b}$$
$$|e^z| = e^{\Re z} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{5.3.2c}$$
$$e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{5.3.2d}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la (5.3.2a), osserviamo che, se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, si ha

$$\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2}\\
&= e^{x_1}(\cos(y_1) + i \sin(y_1)) \cdot e^{x_2}(\cos(y_2) + i \sin(y_2))\\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2) + i(\cos(y_2)\sin(y_1) + \sin(y_2)\cos(y_1)))\\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\\
&= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}\,.
\end{aligned}$$

La (5.3.2b) è una conseguenza immediata della (5.3.2a). La (5.3.2c) segue dalla defnizione di e^z: si ha che
$$\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)), \qquad \operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)),$$
e quindi

$$\begin{aligned}
|e^z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(e^z))^2 + (\operatorname{Im}(e^z))^2} = \sqrt{(e^{\operatorname{Re}(z)})^2(\cos^2(\operatorname{Im}(z)) + \sin^2(\operatorname{Im}(z)))} \overset{(1)}{=} \sqrt{(e^{\operatorname{Re}(z)})^2} \overset{(2)}{=} |e^{\operatorname{Re}(z)}|\\
\overset{(3)}{=} e^{\operatorname{Re}(z)},
\end{aligned}$$

dove (1) segue dall'identità fondamentale della trigonometria, (2) dalla fondamentale identità $\sqrt{x^2} = |x|$, e (3) dal fatto che l'esponenziale (reale) $e^{\mathrm{Re}(z)}$ è strettamente positivo, quindi coincide con il suo modulo.

Infine, la (5.3.2d) segue dalla (5.3.2c): per assurdo esista $\bar{z} \in \mathbb{C}$ con $e^{\bar{z}} = 0$. Allora si avrebbe $|e^{\bar{z}}| = 0$, in contraddizione con la (5.3.2c). □

La formula di Eulero e le sue conseguenze

Consideriamo i numeri complessi (puramente immaginari) $z = i\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$: poiché per tali numeri si ha che $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = \theta$, dalla definizione di esponenziale complesso segue la

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R}} \qquad \text{(formula di Eulero)} \tag{5.3.3}$$

da cui ricaviamo la formula per il coniugato

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R}$$

e

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1 \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R}\,.$$

Abbiamo visto che l'esponenziale complesso mantiene alcune delle proprietà dell'esponenziale reale. Tuttavia, vi è un'importante differenza: la funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **non è iniettiva**, e quindi **non è invertibile**. Infatti, segue dalla formula di Eulero (5.3.3) che

$$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 \qquad \forall\,k \in \mathbb{Z},$$

e quindi

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \qquad \forall\,k \in \mathbb{Z},\ \forall\,z \in \mathbb{C}.$$

Infatti, per ogni coppia di numeri complessi z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ si ha

$$e^{z_1} = e^{z_2} \ \Leftrightarrow\ z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z} \tag{5.3.4}$$

In altri termini, la funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una **funzione periodica di periodo** $2\pi i$.

Le funzioni $\sin$ **e** $\cos$ **in** $\mathbb{C}$. Dalla formula di Eulero (5.3.3) segue che

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \forall\,\theta \in \mathbb{R}\,.$$

Estendendo queste formule a $\mathbb{C}$ possiamo definire le funzioni seno e coseno in campo complesso.

Definizione 5.3.4. *Definiamo* $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ponendo:*

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \qquad \forall\,z \in \mathbb{C}\,.$$

Forma esponenziale di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$: combinando la sua forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

(dove ρ è il modulo di z e θ *un* suo argomento), con la formula di Eulero $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ricaviamo la *forma esponenziale*

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}} \qquad \forall\,z \in \mathbb{C}\,.$$

La forma esponenziale si presta molto bene ad effettuare calcoli nei quali compaiano prodotti, quozienti, e potenze di numeri complessi. Tenendo conto delle proprietà dell'esponenziale complesso, si ha infatti per ogni coppia di numeri $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ che

$$\boxed{\begin{aligned} & z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \\ & \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \\ & (z_1)^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}. \end{aligned}} \tag{5.3.5}$$

Osservazione 5.3.5. Dalle formule (5.3.5) si ricavano immediatamente (e più facilmente, rispetto alla derivazione sviluppata alla fine della Sez. 5.2) le formule di De Moivre (5.2.4) e (5.2.5) per il modulo e l'insieme degli argomenti del prodotto e del quoziente di due numeri complessi.

Inoltre, dalla prima delle (5.3.5) segue un'interessante interpretazione geometrica della funzione che mappa un numero z nel numero $z \cdot e^{i\theta}$ (con $\theta \in \mathbb{R}$): geometricamente, si tratta della rotazione di centro 0 e angolo θ. Ad esempio, la moltiplicazione di un numero complesso z per il numero i, per il quale vale $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = e^{i\pi/2}$, corrisponde alla rotazione del punto P (che rappresenta z) ad angolo retto intorno all'origine.

Vediamo ora come usare, operativamente, la forma esponenziale per calcolare le potenze di numeri complessi.

Esempio 5.3.6. Calcolare

$$(1+i)^6.$$

Poichè $|1+i| = \sqrt{2}$ e ogni argomento θ del numero $1+i$ deve verificare $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (cf. (5.2.3)), si ha che il numero $1+i$ si scrive in forma esponenziale in questo modo:

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Quindi

$$(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{\frac{3}{2}\pi i} = 8e^{\frac{3}{2}\pi i} = 8(-i) = -8i.$$

5.4 La radice n-esima di un numero complesso

Definizione 5.4.1. *Dato $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chiamiamo radice n-esima (complessa) di z ogni numero $w \in \mathbb{C}$ verificante*

$$w^n = z.$$

Usiamo la forma esponenziale del numero z per calcolare le sue radici n-esime: infatti, supponiamo che $z = \rho e^{i\theta}$. Allora,

al variare di $k = 0, \ldots, n-1$,
gli n numeri complessi $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ dati da

$$\boxed{w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

sono *radici n-esime di z*. Infatti, per ogni $k = 0, \ldots, n-1$ si ha che

$$w_k^n = \left(\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}\right)^n = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho e^{i\theta} = z.$$

Notiamo che dalla formula sopra segue che, se $z = 0$ (e quindi il modulo ρ vale 0), le sue radici w_k sono tutte uguali a 0 (infatti, esse hanno modulo $r = \sqrt[n]{0} = 0$). Per $z \neq 0$ le radici w_k sono distinte:

Teorema 5.4.2. *Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ha esattamente n radici n-esime distinte w_0, $w_1, \ldots, w_{n-1}$.*

Rappresentazione grafica delle radici n-esime: Le n radici

$$w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

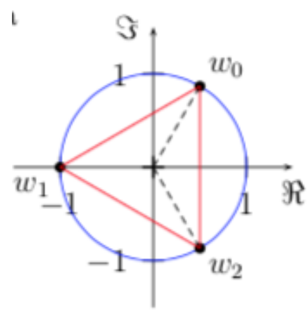
sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nel cerchio di centro 0 e raggio $r = |\rho|^{1/n} = |z|^{1/n}$ (dove, per $n = 2$ con *poligono regolare di* 2 *lati* si intende un diametro). Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{2\pi i/n}$, cioè tramite una rotazione, in senso antiorario, di $2\pi/n$.

Esempio 5.4.3. Determiniamo le tre radici cubiche di -1.
A questo scopo, osserviamo che il numero -1 si scrive, in forma trigonometrica, come

$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}.$$

Quindi $w_k = \sqrt[3]{1}\, e^{i\phi_k}$ con $\phi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$ per $k = 0, 1, 2$, e cioè

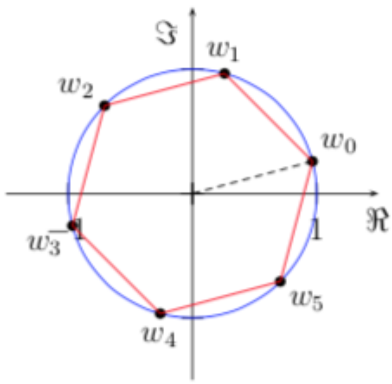
$$w_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad w_1 = -1, \qquad w_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$



Esempio 5.4.4. Determiniamo le sei radici seste di i.

Si ha che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, e quindi

$$w_k = \sqrt[6]{1}\, e^{i\phi_k}, \quad \phi_k = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$



5.5 Polinomi in campo complesso

Abbiamo visto che in $\mathbb{C}$ è risolubile l'equazione $x^2 + 1 = 0$, con radici $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Questa è solo la punta dell'iceberg: **ogni equazione algebrica a coefficient in $\mathbb{C}$ è risolubile in $\mathbb{C}$, ed il numero delle sue soluzioni uguaglia il suo grado, pur di contare le soluzioni in modo opportuno**. È questo il risultato principale di questa sezione, che enunceremo nel *Teorema fondamentale dell'algebra*.

Innanzitutto, abituiamoci a pensare alle soluzioni delle equazione algebrica a coefficienti in $\mathbb{C}$ in termini di zeri (cioè punti di annullamento) di polinomi di variabile complessa. Infatti, parleremo di *radici* di polinomi complessi.

Definizione 5.5.1. *Chiamiamo polinomio in una variabile complessa una funzione* $\boxed{P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}}$ *della forma*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{5.5.1}$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numeri complessi assegnati, detti coefficienti *del polinomio.*

- *Se $a_n \neq 0$, si dice che il polinomio è di grado n.*
- *Si chiama radice di P ogni numero complesso w che risolve l'equazione algebrica $P(w) = 0$.*

L'uso del termine 'radice' per le soluzioni dell'equazione algebrica $P(w) = 0$ è coerente con l'uso fatto nella Sez. 5.4: in effetti, w è una radice n-esima del numero complesso z se e solo se risolve l'equazione algebrica $w^n - z = 0$, cioè se e solo se è radice del polimonio complesso $P(w) = w^n - z$ di grado n e coefficienti $a_n = 1$, $a_{n-1} = \ldots = a_1 = 0$, $a_0 = -z$.

Ribadiamo che, d'ora in poi, penseremo alle soluzioni dell'equazione algebrica

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

come agli zeri del polinomio P (5.5.1).

Ricordiamo anche il

Principio di identità dei polinomi: *Siano P e Q due polinomi: essi sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.*

Enunciamo ora il

Teorema 5.5.2 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Siano* $n \geq 1$*,* P *un polinomio a coefficienti in* $\mathbb{C}$ *di grado* n *e* a_n *il coefficiente di* z^n *in* $P(z)$*. Allora* P *ha* n *radici* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ *e* P *si fattorizza nel prodotto*

$$P(z) = a_n(z - z_n)(z - z_{n-1}) \cdots (z - z_1)\,. \tag{5.5.2}$$

Le n radici possono non essere tutte distinte. Chiamiamo *molteplicità* di una radice z_j (e la denotiamo con μ_j) il numero di radici uguali a z_j. Quindi, se $z_1, z_2, \dots, z_d$ sono le radici *distinte* del polinomio P di grado n, si ha

$$\mu_1 + \cdots + \mu_d = n = \text{grado}(P).$$

Con questa nozione di molteplicità, il Teorema fondamentale dell'algebra può essere rienunciato in questo modo: *ogni equazione algebrica di grado* n *in campo complesso ha* n *soluzioni, pur di contare ognuna di esse secondo la sua molteplicità.*

Esempio 5.5.3. Consideriamo i polinomi

1. $P(z) = z^4 + z^2$, di grado 4. Esso ha 4 radici: $z_1 = z_2 = 0$, $z_3 = i$ e $z_4 = -i$. Quindi i e $-i$ sono sue radici (puramente immaginarie) *semplici*, mentre 0 è sua radice (reale) doppia. Si ha che
$$z^4 + z^2 = z^2(z^2 + 1) = z^2(z - i)(z + i),$$
in accordo con (5.5.2).

2. $P(z) = z^5 + z^3$. Per trovare le sue radici è comodo partire dalla fattorizzazione
$$z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1) = z \cdot z \cdot z(z - i)(z + i).$$
Quindi P ha 5 radici: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, con molteplicità 3, e $z_4 = i$, $z_5 = -i$, radici semplici.

Osserviamo che il Teorema 5.4.2 è un caso particolare del Teorema fondamentale dell'algebra. Consideriamo ora il caso di una equazione di grado $n = 2$ a coefficienti complessi qualunque, che scriviamo come

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{con } a,\ b,\ c \in \mathbb{C},\ a \neq 0. \tag{5.5.3}$$

Si generalizza a $\mathbb{C}$ la ben nota formula[1]

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per le radici (complesse) z_1 e z_2 del polinomio $P(z) = az^2 + bz + c$, dove $\sqrt{b^2 - 4ac}$ denota una radice (seconda!) del numero complesso $\Delta := b^2 - 4ac$. Nel caso particolare in cui i coefficienti $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ (e quindi l'equazione (5.5.3) si riduce a quella studiata dal lettore alle superiori), naturalmente è reale anche il numero $\Delta = b^2 - 4ac$. In tal caso, si ricorda che le radici del polinomio $P(z) = az^2 + bz + c$, sono due, reali e distinte (se $\Delta > 0$), oppure una, reale e doppia (se $\Delta = 0$), oppure due, complesse coniugate e distinte (se $\Delta < 0$).

Esempio 5.5.4. L'equazione $z^2 + 2z + 2 = 0$ ha $\Delta = -4$ e radici $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -i - 1$.

Quanto visto per le equazioni di secondo grado a coefficienti reali è vero in generale:

Proposizione 5.5.5. *Sia* P *un polinomio a* <u>*coefficienti reali*</u>*.*

1. *Se* w *è una radice (non reale), anche* $\overline{w}$ *è una radice, con la stessa molteplicità.*

2. *Inoltre,* P *può essere scritto come prodotto di fattori di grado non superiore a* 2 *e a coefficienti reali. In particolare, se il grado del polinomio è dispari,* P *ha almeno una radice reale.*

[1] che in Germania è nota come 'formula di mezzanotte', perché uno studente deve essere in grado di ripeterla correttamente se viene svegliato, per l'appunto, a mezzanotte...

Capitolo 6

Successioni numeriche

Ricordiamo che una successione reale è una funzione da $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$ (per semplicità, evitiamo di considerare successioni a valori in $\mathbb{C}$). Più precisamente,

Definizione 6.0.1. *Chiamiamo* successione <u>*a valori reali*</u> *una funzione* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *(o, più in generale, definita su un sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *ottenuto da esso togliendo un suo sottoinsieme finito), che ad ogni* $n \in \mathbb{N}$ *(in generale, ad ogni* $n \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N}$*) associa un valore* $a_n := f(n) \in \mathbb{R}$*. Denotiamo la successione* <u>*tramite il suo insieme immagine*</u> *(cioè l'insieme dei valori da essa assunti), e cioè scriveremo*

$$\{a_n\} \quad o \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. *Chiamiamo* a_n *l'elemento* n*-esimo della successione* $\{a_n\}$*.*

2. *Fissato* $n_0 \in \mathbb{N}$*, se* $\mathrm{dom}(f) = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$*, allora si scrive* $\{a_n\}_{n\geq n_0}$*.*

Questo capitolo è incentrato sulla nozione limite di una successione: attraverso di esso, il lettore si farà una prima idea del concetto di limite in analisi matematica, che è il fulcro di questa materia, visto che su di esso si fondano le definizioni di funzione continua e di derivata.

6.1 Primi esempi di successioni

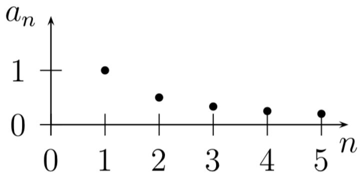
In questa sezione diamo, preliminarmente, alcuni esempi di successioni, attraverso i quali illustreremo i vari *caratteri* di una successione $\{a_n\}$ (convergente/divergente/oscillante), cioè le varie tipologie di comportamento della successione quando *n è molto grande.* Nella loro descrizione useremo un linguaggio informale; il discorso sarà poi inquadrato rigorosamente dalle definizioni che daremo nella Sez. 6.2.

Esempio 6.1.1. Consideriamo la successione

$$a_n := \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},\, n > 0$$

quindi $\mathrm{dom}(a_n) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2} = 0.5$
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$
4	$\frac{1}{4} = 0.25$
5	$\frac{1}{5} = 0.2$
$\vdots$	$\vdots$



Vediamo che, per valori di n molto grandi, a_n assume valori sempre più vicini a 0: in modo più rigoroso diremo che

$\{a_n\}$ assume valori arbitrariamente piccoli pur di prendere n sufficientemente grande.

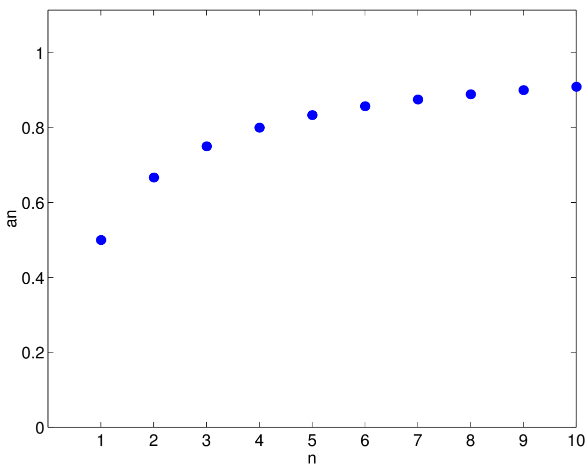
Diremo che $\{a_n\}$ è *infinitesima*.

Esempio 6.1.2. Consideriamo

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Calcoliamo i primi 11 valori assunti dalla successione

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{0}{0+1} = 0 \\
a_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \\
\vdots \;&\vdots\; \vdots \\
a_{10} &= \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}
\end{aligned}$$



Vediamo che

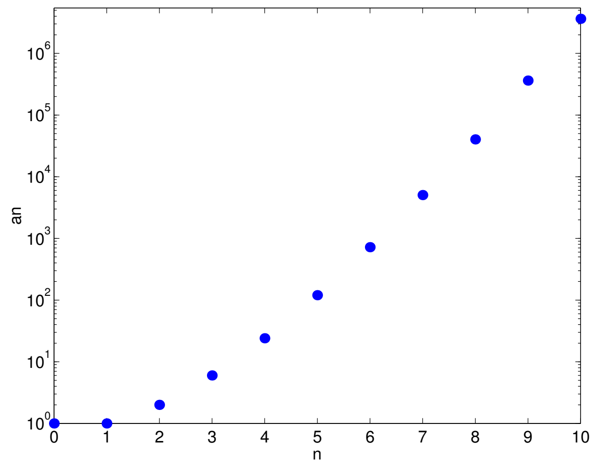
$\{a_n\}$ assume valori arbitrariamente vicini a 1 pur di prendere n sufficientemente grande.

Diremo che $\{a_n\}$ *converge* a 1.

Esempio 6.1.3. Consideriamo

$$a_n = n!, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0! = 1 \\ a_1 &= 1! = 1 \\ a_2 &= 2! = 2 \\ a_3 &= 3! = 6 \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ a_{10} &= 10! = 3628800 \end{aligned}$$



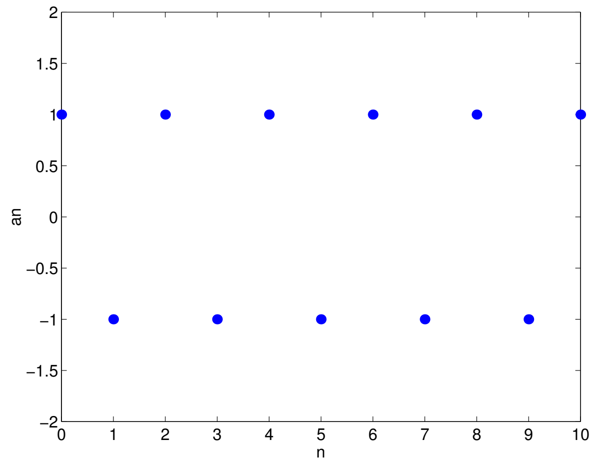
$\{a_n\}$ assume valori (positivi) arbitrariamente grandi pur di prendere n sufficientemente grande.

Diremo che $\{a_n\}$ *diverge* a $+\infty$.

Esempio 6.1.4.

$$a_n = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} a_0 &= +1 \\ a_1 &= -1 \\ a_2 &= +1 \\ a_3 &= -1 \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ a_{10} &= +1 \end{aligned}$$



$\{a_n\}$ oscilla fra i valori 1 e -1

e **non** si 'avvicina arbitrariamente' ad alcun valore, per n grande. Diremo che $\{a_n\}$ è *oscillante.*

6.2 Successioni convergenti, divergenti, e oscillanti

Iniziamo a rendere rigorosamente il concetto di *successione infinitesima* (si veda l'Esempio 6.1.1). La traduzione dell'espressione $\{a_n\}$ *assume valori arbitrariamente piccoli pur di prendere n sufficientemente grande* in linguaggio matematico è data dalla seguente

Definizione 6.2.1 (Successione infinitesima)**.** *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Diciamo che essa è* infinitesima *(per n tendente all'infinito) quando*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq \varepsilon, \tag{6.2.1}$$

e scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad o \qquad a_n \to 0 \text{ per } n \to +\infty \qquad o \qquad a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{6.2.2}$$

Useremo anche la locuzione $\{a_n\}$ tende a 0 *(per n tendente all'infinito).*

Riprendiamo ora l'Esempio 6.1.2 della successione $a_n = \frac{n}{n+1}$ convergente a 1, e osserviamo che $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ora, non è difficile vedere che la successione $b_n := \frac{1}{n+1}$ è pure infinitesima (per esercizio, il lettore provi a verificare che $\{b_n\}$ soddisfa la (6.2.1)), Quindi la successione a_n ha la proprietà che $\{a_n - 1\}$ è una successione infinitesima. È questo quello che contraddistingue, più in generale, la generica successione convergente a un numero reale L.

Definizione 6.2.2 (Successione convergente)**.** *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e $L \in \mathbb{R}$. Diciamo che essa* converge *a L (per n tendente all'infinito) quando la successione $\{a_n - L\}$ è infinitesima, cioè se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \varepsilon, \tag{6.2.3}$$

e scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \qquad o \qquad a_n \to L \text{ per } n \to +\infty \qquad o \qquad a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L\,. \tag{6.2.4}$$

Useremo anche la locuzione $\{a_n\}$ tende a L *(per n tendente all'infinito).*
Diciamo che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente quando esiste un numero reale a cui converge.

Usando la (6.2.3) è immediato verificare che

$$\{a_n\} \text{ è infinitesima se e solo se } \{|a_n|\} \text{ è infinitesima.}$$

Vediamo come la (6.2.3) (e la (6.2.1), per $L = 0$) traduce rigorosamente il concetto che $\{a_n\}$ *assume valori arbitrariamente vicini a* 1 *pur di prendere n sufficientemente grande*:

Per ogni fissato $\varepsilon > 0$,	$\forall\, \varepsilon > 0$
da un certo punto in poi	$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon$
tutti i valori della successione distano da L meno di ε	$\|a_n - L\| \leq \varepsilon$

Ribadiamo che nelle (6.2.1) & (6.2.3) la costante ε è arbitraria mentre, come suggerisce la notazione, l'indice n_ε dipende da ε: cambiando ε, cambia n_ε.

Osservazione 6.2.3. 1. Sia $c \in \mathbb{R}$: chiaramente, la successione $\{a_n\}$ costantemente uguale a c converge a c per $n \to \infty$: nella definizione di successione convergence non vi è traccia del fatto che, se $\{a_n\}$ converge a L, $\{a_n\}$ si avvicina a L senza raggiungerlo.

2. Deve essere chiaro al lettore che **è proibito scambiare l'ordine dei quantificatori** nelle (6.2.1) & (6.2.3): questo errore, purtroppo comune, stravolge completamente il senso dell'affermazione!!!

   Tuttavia, la sostituzione delle disuguaglianze larghe ($\leq$) con le disuguaglianze strette ($<$) porta a definizioni completamente equivalenti, quali, per esempio,

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon; \\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

3. Deve essere altrettanto chiaro al lettore che la definizione (6.2.3) è del tutto equivalente a

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq 2\varepsilon, \\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} \dots
\end{aligned}$$

Esempio 6.2.4 (La successione geometrica – PARTE I)**.** *Sia $q \in \mathbb{R}$ e consideriamo la successione $a_n := q^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; $\{a_n\}$ è detta* successione geometrica.

$$\textit{Se} \begin{cases} q = 1 \\ |q| < 1 \end{cases} \quad \textit{la successione } q^n \quad \begin{cases} \textit{converge a } 1. \\ \textit{è infinitesima.} \end{cases}$$

Dimostriamo ora che se $\{a_n\}$ converge a un certo $L \in \mathbb{R}$, allora essa non converge ad alcun altro valore. Questo ci permetterà di chiamare L, a buon diritto, *IL* limite di $\{a_n\}$.

Teorema 6.2.5 (Unicità del limite)**.** *Supponiamo che*

$$\left(a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \qquad e \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L' \right).$$

Allora

$$L = L'.$$

Dimostrazione. Per assurdo sia $L \neq L'$. Allora $|L - L'| > 0$. Possiamo allora prendere $\varepsilon := \frac{|L-L'|}{3}$ nella definizione (6.2.3) applicata sia a L sia a L'. In corrispondenza a tale scelta di ε troviamo due indici $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che

$$\forall\, n \geq n_\varepsilon, \quad |a_n - L| \leq \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \forall\, n \geq n'_\varepsilon, \quad |a_n - L'| \leq \varepsilon\,.$$

Fissiamo ora un indice n maggiore o uguale di entrambi gli indici n_ε e n'_ε: è sufficiente prendere $n \geq \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$. Si ha allora che

$$\text{per } n \geq \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}, \qquad \begin{cases} |a_n - L| \leq \varepsilon, \\ |a_n - L'| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

e quindi, tenendo conto della simmetria e disuguaglianza triangolare per il modulo, si ha

$$3\varepsilon = |L - L'| = |L - a_n| + |a_n - L'| = |a_n - L| + |a_n - L'| \leq 2\varepsilon,$$

il che contraddice il fatto che ε sia strettamente positivo. $\square$

Vogliamo ora rendere rigorosamente il concetto di successione divergente:
- a $+\infty$, come nell'Esempio 6.1.3: la successione $\{a_n\}$ assume valori positivi arbitrariamente grandi pur di prendere n sufficientemente grande;
- a $-\infty$, come per esempio nel caso della successione $a_n = -n^2$, che assume valori arbitrariamente grandi in modulo, e negativi, pur di prendere n sufficientemente grande.

Definizione 6.2.6 (Successione divergente a $+\infty$)**.** *Diciamo che una successione $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ per n tendente all'infinito, e scriviamo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad o \qquad a_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty \qquad o \qquad a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,,$$

se

$$\forall M > 0 \;\exists\, n_M \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_M \quad \Rightarrow \quad a_n \geq M. \tag{6.2.5}$$

Useremo anche le locuzioni: $\{a_n\}$ diverge positivamente, o $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ per n tendente all'infinito.

Questa definizione traduce rigorosamente il concetto che intendevamo esprimere:

Per ogni fissato $M > 0$,	$\forall\, M > 0$
da un certo punto in poi	$\exists n_M \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \geq n_M$
tutti i valori della successione sono maggiori di M	$a_n \geq M$

Anche in questo caso, la costante $M > 0$ è arbitraria, mentre l'indice n_M dipende da M.

Esempio 6.2.7. La successione

$$a_n = n, \quad n \in \mathbb{N},$$

diverge a $+\infty$. Questo si può verificare tramite la definizione (6.2.5), ed è lasciato come **esercizio**.

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{\alpha > 0}$. La successione
$$a_n = n^\alpha, \quad n \in \mathbb{N},$$
diverge a $+\infty$.

2. La successione
$$a_n = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$
diverge a $+\infty$.

3. La successione
$$a_n = n^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
diverge a $+\infty$.

Definizione 6.2.8 (Successione divergente a $-\infty$)**.** *Diciamo che una successione* $\{a_n\}$ *diverge a* $-\infty$ *(o diverge negativamente, o tende a* $-\infty$*) per* n *tendente all'infinito, e scriviamo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad o \qquad a_n \to -\infty \text{ per } n \to +\infty \qquad o \qquad a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\,,$$

se

$$\forall M > 0\ \exists n_M \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_M \ \Rightarrow\ a_n \leq -M. \tag{6.2.6}$$

Se una successione diverge a $+\infty$ *o a* $-\infty$*, in generale diremo che essa è* divergente.

Come esercizio, il lettore può verificare che le successioni $a_n = -n$ e $b_n = -n^2$ divergono a $-\infty$ (cioè soddisfano la (6.2.6)). D'ora in poi, talvolta scriveremo $\lim_{n\to\infty}$ al posto di $\lim_{n\to+\infty}$.

Osservazione 6.2.9. Sia $\{a_n\}_n$ tale che $a_n \neq 0\, \forall n$: allora

1. se $a_n > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$
Dimostriamo l'implicazione $\Rightarrow$; per la $\Leftarrow$ il discorso è completamente analogo. Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente: dobbiamo esibire un indice n_ε tale che per $n \geq n_\varepsilon$ si abbia $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$. Dato questo $\varepsilon > 0$, poniamo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ e applichiamo la definizione (6.2.5) di $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$: in corrispondenza a questa scelta di M troviamo un indice n_M tale che per $n \geq n_M$ si abbia
$$a_n > M = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{a_n} < \varepsilon\,.$$
Abbiamo quindi ottenuto la disuguaglianza desiderata per tutti gli $n \geq n_\varepsilon := n_M$.

2. Analogamente (esercizio!) si dimostra che, se $a_n < 0$,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Definizione 6.2.10 (Successione oscillante)**.** *Diciamo che una successione* $\{a_n\}$ *è* *oscillante*[1] *se*

$$\{a_n\} \text{ non è né convergente né divergente}$$

Esempio 6.2.11.

1. La successione
$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \ \text{è oscillante.}$$

2. La successione
$$a_n = (-n)^n = (-1)^n n^n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -n^n & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \quad \text{è oscillante.}$$

Esempio 6.2.12 (La successione geometrica – PARTE II)**.** *Sia* $q \in \mathbb{R}$ *e consideriamo la successione* $\{q^n\}$*.*

$$Se \begin{cases} q > 1 \\ q \leq -1 \end{cases} \quad la\ successione\ q^n \quad \begin{cases} diverge\ a\ +\infty. \\ \grave{e}\ oscillante. \end{cases}$$

Concludiamo questa sezione con la seguente

Definizione 6.2.13 (Successione limitata)**.** *Sia* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$*. Diciamo che*

- $\{a_n\}$ *è* *superiormente limitata* *se*

[1] in alcuni testi, quali as esempio [Marson/Baiti/Ancona/Rubino], si usa anche l'espressione 'indeterminata'

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \leq M.$$

- $\{a_n\}$ *è* *<u>inferiormente limitata</u> se*

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \ \ m \leq a_n.$$

- $\{a_n\}$ *è* *<u>limitata</u> se è superiormente e inferiormente limitata, cioè se esiste* $M > 0$ *tale che*

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ricordando che una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, è immediato osservare che una successione è superiormente (inferiormente, risp.) limitata se e solo se il suo insieme immagine è superiormente (inferiormente, risp.) limitato.

Esempio 6.2.14. Sono limitate le successioni

1. $a_n := (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
2. $a_n := \sin n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.2.15 (Limitatezza delle successioni convergenti)**.** *Supponiamo che* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *sia convergente a* $L \in \mathbb{R}$. *Allora* $\{a_n\}$ *è limitata.*

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia $|a_n - L| \leq \varepsilon$. In corrispondenza a $\varepsilon = 1$ determiniamo quindi un indice n_1 tale che

$$|a_n - L| \leq 1 \qquad \text{per ogni } n \geq n_1,$$

da cui, usando che $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$ (si ricordi la disuguaglianza (4.1.6)), si ha

$$|a_n| \leq |L| + 1 \qquad \text{per ogni } n \geq n_1. \tag{6.2.7}$$

D'altra parte, chiaramente si ha che

$$|a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \ldots |a_{n_1-1}| \qquad \text{per ogni } n \in \{0, \ldots, n_1 - 1\}. \tag{6.2.8}$$

Combinando (6.2.7) & (6.2.8) si ottiene quindi

$$|a_n| \leq M := |a_0| + |a_1| + \ldots |a_{n_1-1}| + |L| + 1 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

□

Naturalmente non vale il viceversa del Teorema 6.2.15: le successioni dell'Esempio 6.2.14 sono limitate e oscillanti.

6.3 Il calcolo dei limiti

La definizione di limite è fondamentale perché precisa il contenuto del concetto e, come vedremo, è alla base dei risultati di teoria sulle successioni. Tuttavia, essa non si presta al calcolo effettivo dei limiti. A questo scopo, diamo un primo risultato.

Teorema 6.3.1 (Algebra dei limiti)**.** *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *successioni reali convergenti, cioè*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \quad \textit{dove } a, b \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \tag{6.3.1a}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b \tag{6.3.1b}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b \tag{6.3.1c}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \qquad \text{se } b \neq 0 \ \textit{e} \ b_n \neq 0 \quad \forall n \quad (\forall n \geq n_0) \tag{6.3.1d}$$

Questo risultato è anche noto come *Teorema di linearità*: infatti, da esso si deduce, in particolare, che (ricorrendo al linguaggio dell'algebra lineare)

$$\begin{gathered}\text{ogni combinazione lineare } \alpha\{a_n\}+\beta\{b_n\}, \text{ con } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \text{ arbitrari, di due successioni convergenti}\\ \text{è una successione convergente, e}\\ \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\{a_n\}+\beta\{b_n\}\right)=\alpha\lim_{n\to\infty}a_n+\beta\lim_{n\to\infty}b_n\,.\end{gathered} \tag{6.3.2}$$

La dimostrazione del Teorema 6.3.1, che omettiamo, segue direttamente dalla definizione di limite. Osserviamo solo che, per la validità della (6.3.1d) le ipotesi $b \neq 0$ e $b_n \neq 0$ per ogni n (o a partire da un certo indice n_0) sono ridondanti: è, di fatto, sufficiente che $b \neq 0$, poiché questo implicherà $b_n \neq 0$ a partire da un certo indice n_0, cf. il seguente Teorema 6.5.1

Sottolineiamo anche il Teorema 6.3.1 fornisce anche risultati sull'insieme delle successioni convergenti: la somma di due successioni convergenti lo è, e così il prodotto, etc.

Il Teor. 6.3.1 si estende, *parzialmente*, al caso di successioni convergenti. Abbiamo infatti il seguente risultato, che è da leggersi alla luce dell'algebra estesa in $\overline{\mathbb{R}}$ (si ricordi la formula (4.5.4)).

Teorema 6.3.2 (Algebra estesa dei limiti)**.** *Date due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si ha che*

1. *se $a_n \to +\infty$ (per n tendente all'infinito) e $\{b_n\}$ è limitata inferiormente, allora $a_n + b_n \to +\infty$,*
2. *se $a_n \to -\infty$ e $\{b_n\}$ è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \to -\infty$,*
3. *se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$,*
4. *se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$,*
5. *se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$,*
6. *se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$,*
7. *se $a_n \to +\infty$, allora $\frac{1}{a_n} \to 0$,*
8. *se $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0$ (per ogni $n \geq n_0$, per un certo n_0), allora $\frac{1}{|a_n|} \to +\infty$. In particolare, se $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ ($a_n < 0$) per ogni n, allora $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ ($-\infty$).*

Cenni della dimostrazione. Dimostriamo il punto **(1)**: dall'ipotesi si ha che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $b_n \geq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo ora $M > 0$ arbitrariamente: poichè $a_n \to +\infty$, si ha che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \geq M - c$. Allora

$$\text{per ogni } n \geq \bar{n} \text{ si ha } a_n + b_n \geq M - c + c = M\,.$$

Essendo $M > 0$ arbitrario, da questo concludiamo che è soddisfatta la definizione di $a_n + b_n \to +\infty$. Con lo stesso argomento concludiamo il punto **(2)**.

Dimostriamo la **(3)**. Fissiamo $M > 0$ arbitrariamente: dobbiamo trovare un indice $n_M \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n b_n \geq M \qquad \text{per ogni } n \geq n_M. \tag{6.3.3}$$

Scegliamo $\varepsilon := \frac{L}{2} > 0$ nella definizione di $b_n \to L > 0$, troviamo un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha $|b_n - L| \leq \varepsilon = \frac{L}{2}$, da cui

$$b_n \geq L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0 \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon\,. \tag{6.3.4}$$

D'altra parte, visto che $a_n \to +\infty$ si ha che esiste un indice $n' \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq \frac{2M}{L} \quad \text{per ogni } n \geq n'. \tag{6.3.5}$$

Poniamo ora $n_M := \max\{n_\varepsilon, n'\}$, sicché ogni $n \geq n_M$ soddisfa $n \geq n'$ e $n \geq n_\varepsilon$. Si ha che

$$a_n b_n \geq \frac{2M}{L} \cdot \frac{L}{2} = M \qquad \text{per ogni } n \geq n_M,$$

cioè la (6.3.3). Analogamente si dimostrano i punti **(4)**, **(5)**, e **(6)**.

Il punto **(7)** è stato dimostrato nell'Osservazione 6.2.9. Con argomenti dello stesso tipo si ottiene il punto **(8)**. □

Osservazione 6.3.3. Le proprietà $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0$ **non implicano** che $\frac{1}{a_n}$ abbia limite. Per esempio, consideriamo la successione $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ che, come vedremo nella Sez. 6.5, è infinitesima. Il suo reciproco è la successione

$$\frac{1}{a_n} = \frac{n}{(-1)^n} \qquad \text{che NON ha limite per } n \to \infty.$$

6.4 Forme indeterminate

I casi non contemplati dal Teorema 6.3.2 sono

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \tag{6.4.1a}$$

(scriveremo anche, sinteticamente, $\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$). In altri termini, non possiamo dare un risultato generale sul limite della somma di due successioni divergenti, l'una a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, né sul limite del prodotto di una successione infinitesima per una divergente (a $+\infty$ o a $-\infty$), né sul limite del quoziente di due successioni divergenti, o di due successioni infinitesime. Si noti che i casi elencati nella (6.4.1a), che d'ora in poi chiameremo *forme indeterminate*, corrispondono alle operazioni, indeterminate, elencate nella (4.5.5). Altre forme indeterminate, dette *forme indeterminate esponenziali*, sono

$$(\pm\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty. \tag{6.4.1b}$$

Come dobbiamo intendere la terminologia 'forma indeterminata' (d'ora in poi, spesso abbreviata in f.i.)? Certo non significa 'problema irrisolto' o 'problema irrisolubile'! Il punto che vogliamo sottolineare è che in ciascuno dei casi contemplati nelle (6.4.1), ogni affermazione sul relativo limite che non si appoggi a ipotesi ulteriori è errata. Prendiamo ad esempio in considerazione la f.i. $(+\infty) + (-\infty)$: supponiamo cioè di avere due successioni $\{a_n\}$, divergente a $+\infty$, e $\{b_n\}$, divergente a $-\infty$. Della successione somma $\{c_n := a_n + b_n\}$ non si può dire, *a priori*, né che converge, né che diverge, né che oscilla, come i seguenti esempi

$$\begin{array}{lllll}
a_n := n & b_n =: -n & \Longrightarrow & c_n = 0 & \text{è convergente,} \\
a_n := 2n & b_n =: -n & \Longrightarrow & c_n = n & \text{è divergente,} \\
a_n := n + (-1)^n & b_n =: -n & \Longrightarrow & c_n = (-1)^n & \text{è oscillante,}
\end{array}$$

dimostrano. In altri termini, non ci può essere alcun teorema che dia informazioni sul limite $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$ nella sola ipotesi che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ divergano a due infiniti di segno diversi. **Ogni forma indeterminata va risolta con un metodo ad hoc**. Vediamo alcuni metodi per opportune classi di successioni.

Forme indeterminate $\infty - \infty$ associate a polinomi

Sia

$$P(n) = \alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \cdots + \alpha_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se **non tutti** i coefficienti α_k, $k = 1, \ldots, p$ sono **concordi**, si può avere

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = (+\infty) - (+\infty).$$

Per "risolvere" questa forma indeterminata, osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \ldots + \alpha_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^p \left(\alpha_p + \frac{\alpha_{p-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^p}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha_p n^p = \pm\infty \text{ a seconda del segno di } \alpha_p.
\end{aligned}$$

Osservazione 6.4.1. L'infinito di n^p "vince" sugli infiniti di $n^{p-1}, \ldots, n$. Diremo che

n^p è un **infinito di ordine superiore**

rispetto agli infiniti n^{p-1}, n^{p-2}, $\ldots, n^2$, n.

Forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ associate a successioni razionali fratte

Consideriamo preliminarmente questo esempio:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 1}{4n^2 + 3n}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 - 1) = +\infty - 1 = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} (4n^2 + 3n) = \infty + \infty = +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 1}{4n^2 + 3n} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{FORMA INDETERMINATA.}$$

Per risolverla, occorre raccogliere la massima potenza di n sia al numeratore che al denominatore

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{4n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{4+\frac{3}{n}} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^3}}{4+\frac{3}{n}}\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'infinito di n^3 al numeratore "vince" sull'infinito di n^2 al denominatore, quindi il quoziente tende a $+\infty$. Possiamo quindi dare la **regola generale per le forme indeterminate associate a funzioni razionali fratte:** dati

$$\begin{aligned}
P(n) &= \alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \cdots + \alpha_0, \quad n \in \mathbb{N} \\
Q(n) &= \beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \cdots + \beta_0, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_p \neq 0, \beta_q \neq 0$ e $p, q > 0$, si ha (raccogliendo la massima potenza di n sia al numeratore sia al denominatore)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_p}{\beta_q} & \text{se } p = q, \\ +\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p\beta_q > 0, \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p\beta_q < 0, \\ 0 & \text{se } p < q. \end{cases}$$

Confronti asintotici

Inquadriamo il metodo visto per le forme indeterminate associate a successioni polinomiali e a successioni razionali fratte in un discorso più generale, che poi riprenderemo nel Capitolo 8. Abbiamo infatti osservato che per $n \to +\infty$, n^p cresce **più velocemente** di n^q se $p > q > 0$, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n^q} = +\infty \qquad \forall p > q > 0.$$

Formalizziamo le espressioni *più velocemente/lentamente* con il concetto di *confronto asintotico fra successioni.* D'ora in poi, consideriamo due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, con

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0, \quad b_n \neq 0,$$

entrambe divergenti **o** entrambe infinitesime.

Successioni entrambe divergenti

Siamo nel caso

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty.$$

Si possono verificare i seguenti (sotto)casi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \boxed{\text{A}} \\ l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0 & \boxed{\text{B}} \\ \pm\infty & \boxed{\text{C}} \\ \text{non esiste} & \boxed{\text{D}} \end{cases}$$

Definizione 6.4.2. *Diciamo che*

1. $\{a_n\}$ *è un infinito di* ordine inferiore *a* $\{b_n\}$ *se vale* $\boxed{A}$*;*
2. $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono infinito dello* stesso ordine *se vale* $\boxed{B}$*;*
3. $\{a_n\}$ *è un infinito di* ordine superiore *a* $\{b_n\}$ *se vale* $\boxed{C}$*;*
4. $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ non sono confrontabili *se vale* $\boxed{D}$*.*

Inoltre, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

allora $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *si dicono* asintotiche *e si scrive* $a_n \sim b_n$*.*

Successioni entrambe infinitesime

Siamo nel caso

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Si possono verificare i seguenti (sotto)casi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \boxed{\text{A}} \\ l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0 & \boxed{\text{B}} \\ \pm\infty & \boxed{\text{C}} \\ \text{non esiste} & \boxed{\text{D}} \end{cases}$$

Definizione 6.4.3. *Diciamo che*

1. $\{a_n\}$ *è un infinitesimo di* ordine superiore *a* $\{b_n\}$ *se vale* $\boxed{A}$*;*
2. $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono infinitesimi dello* stesso ordine *se vale* $\boxed{B}$*;*
3. $\{a_n\}$ *è un infinitesimo di* ordine inferiore *a* $\{b_n\}$ *se vale* $\boxed{C}$*;*
4. $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ non sono confrontabili *se vale* $\boxed{D}$*.*

Inoltre, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ *allora* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *si dicono* asintotiche *e si scrive* $a_n \sim b_n$*.*

Useremo il confronto asintotico fra successioni per risolvere le forme indeterminate di tipo quoziente

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ e } \frac{0}{0}.$$

Lo faremo riconducendo lo studio di tali forme indeterminate a forme indeterminate che coinvolgono successioni più semplici, "campione", con cui confrontare le successioni date. Per esempio, abbiamo risolto le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ associate a successione razionali fratte riconducendo lo studio del limite di una successione razionale fratta a quello della successione $\frac{n^p}{n^q}$ e tenendo presente che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n^q} = +\infty \qquad \forall p > q > 0,$$

cioè

se $p > q > 0$, allora n^p è un infinito di ordine superiore a n^q.

Più in generale, per la risoluzione di f.i. $\frac{\infty}{\infty}$ opereremo un confronto asintotico con le seguenti successioni, per le quali vale questa **gerarchia di infiniti**

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log(n))^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a > 1, \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1, \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,
\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

cioè
- n^n è un infinito di ordine superiore a $n!$,
- $n!$ è un infinito di ordine superiore a a^n per ogni $a > 1$,
- a^n è un infinito di ordine superiore a n^α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$,
- n^α è un infinito di ordine superiore a $\log^\beta n$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Una conseguenza immediata di (6.4.2) è che per n sufficientemente grande ($n \geq n_0$) valgono le disuguaglianze

$$n^n \geq n! \geq a^n \geq n^\alpha \geq (\log(n))^\beta \quad \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

6.5 Successioni e relazione d'ordine

I risultati che seguono precisano i legami fra l'operazione di limite di successioni e la relazione d'ordine in $\mathbb{R}$. Tutte le dimostrazioni sono conseguenze immediate della definizione di limite.

Teorema 6.5.1 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione convergente **(non infinitesima)** oppure divergente a $+\infty$ o a $-\infty$. Si ha che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in (0, +\infty] \quad \Rightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq m \ \ a_n > 0; \tag{6.5.1a}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [-\infty, 0) \quad \Rightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq m \ \ a_n < 0. \tag{6.5.1b}$$

Dimostrazione. Dimostriamo (6.5.1b) (l'argomento per (6.5.1a) è del tutto analogo) nel caso in cui $L \in (-\infty, 0)$ (lasciamo il caso $L = -\infty$ al lettore). Scegliamo $\varepsilon := \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$ (si ricordi che $L < 0$!) nella definizione di $a_n \to L$ e troviamo un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha $|a_n - L| \leq \varepsilon = -\frac{L}{2}$, da cui

$$a_n \leq L + \varepsilon = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0 \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi la (6.5.1b) □

Osserviamo che l'ipotesi che $L \neq 0$ (cioè $L > 0$ o $L < 0$) non deve essere dimenticata: se $L = 0$ la tesi è falsa. Infatti, la successione infinitesima

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad n \geq 1,$$

ha segno alterno (positiva per n pari, negativa per n dispari), cioè è falso che sia positiva (o negativa) a partire da un certo indice.

Il prossimo risultato è pure intuitivo: l'operazione di limite rispetta la relazione d'ordine.

Teorema 6.5.2 (Teorema del confronto)**.** *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ successioni* ***non oscillanti*** *(quindi convergenti o divergenti a $\pm\infty$). Se*

$$\exists m_0 : \ \forall n \geq m_0, \quad a_n \leq b_n, \tag{6.5.2}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{6.5.3}$$

Dimostrazione. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ la tesi diventa $+\infty \leq +\infty$ (vera). Analogamente, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ non vi è nulla da dimostrare.

Possiamo quindi supporre che nessuno dei due casi sopra si verifichi. Quindi la successione $\{(b_n - a_n)\}$ non dà luogo a una forma indeterminata. Dimostreremo che

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = L \geq 0 \tag{6.5.4}$$

Per assurdo ciò non valga: allora $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \in [-\infty, 0)$. Per il teorema della permanenza del segno, esiste un indice $\bar{n}$ tale che $(b_n - a_n) < 0$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Quindi

$$b_n < a_n \qquad \forall\, n \geq \bar{n},$$

in contraddizione con l'ipotesi. Da (6.5.4) segue la (6.5.3) tenendo presente che, in assenza di forme indeterminate, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n$. □

Osservazione 6.5.3 (Ipotesi valide 'definitivamente')**.** Si noti che è sufficiente richiedere la (6.5.2) a partire da un certo indice m_0 (in tal caso, si dice 'definitivamente'); non serve che essa valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il comportamento delle due successioni per i primi m_0 termini, infatti, non influisce sul loro limite per $n \to \infty$. Vale lo stesso discorso per l'ipotesi (6.5.5) del seguente Teorema dei due carabinieri.

Osservazione 6.5.4. Se l'ipotesi del teorema del confronto è sostituita dalla condizione più forte che $\exists m_0 : \forall n \geq m_0, a_n < b_n$, la tesi resta comunque la stessa, con la disuguaglianza larga. Per esempio, le successioni $\{a_n := -\frac{1}{n}\}$ e $\{b_n \equiv 0\}$ verificano $a_n < b_n$ per ogni $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

La denominazione del prossimo teorema è suggestiva ed efficace: le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono i due carabinieri che, tenendo allo stesso limite L (finito o infinito) non lasciano scampo al ladro $\{c_n\}$, 'stretto' fra di esse. Notare che l'esistenza del limite di $\{c_n\}$ è nella tesi, e non nelle ipotesi!

Teorema 6.5.5 (Teorema dei due carabinieri)**.** *Supponiamo che $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ soddisfino*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Se $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ verifica

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_0 \quad a_n \leq c_n \leq b_n, \tag{6.5.5}$$

allora $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo che $L \in \mathbb{R}$ e lasciamo al lettore la discussione dei casi $L = +\infty$ e $L = -\infty$. Dalla definizione di limite per $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono indici

$$\begin{aligned} n'_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \geq n'_\varepsilon \quad L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon, \\ n''_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \geq n''_\varepsilon \quad L - \varepsilon \leq b_n \leq L + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Poniamo $\bar{n} := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, m_0\}$. Si ha che

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq L + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq \bar{n}.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo verificato la definizione di $\lim_{n\to\infty} c_n = L$. □

Sottolineiamo una fondamentale conseguenza del Teorema dei due carabinieri, che generalizza la regola sul limite del prodotto.

Corollario 6.5.6. *Siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ *tali che*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- $\{b_n\}$ *è limitata.*

Allora $\{a_n b_n\}$ *è infinitesima.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $M > 0$ tale che $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M|a_n|$ per ogni n, cioè

$$-M|a_n| \leq a_n b_n \leq M|a_n| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

La tesi segue applicando il Teorema dei due carabinieri, visto che le successioni $\{\pm M|a_n|\}$ sono infinitesime. □

Esempio 6.5.7. Dal Corollario 6.5.6 segue che sono infinitesime le successioni

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n := \frac{\sin(n)}{n} \ \ldots$$

6.6 Successioni monotone

La definizione che diamo ora è un caso particolare di quella di funzione monotona che vedremo nel Capitolo 8.

Definizione 6.6.1. *Sia* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. *Diciamo che*

(i) $\{a_n\}$ *è* <u>*non decrescente*</u>[2] *se* $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\{a_n\}$ *è* <u>*strettamente crescente*</u> *se* $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\{a_n\}$ *è* <u>*non crescente*</u>[3] *se* $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iv) $\{a_n\}$ *è* <u>*strettamente decrescente*</u> *se* $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sia $\{a_n\}$ non decrescente: allora

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

quindi $\{a_n\}$ è **inferiormente limitata**. Analogamente, si vede che *ogni successione non crescente è superiormente limitata.* L'ipotesi di limitatezza per una successione monotona equivale allora alla sola ipotesi di limitatezza superiore per le successioni non decrescenti (visto che la limitatezza inferiore è gratis), e alla sola ipotesi di limitatezza inferiore per le successioni non crescenti (visto che la limitatezza superiore è gratis).

[2] in alcuni testi si usa la locuzione crescente check [Marson/Baiti/Ancona/Rubino]
[3] in alcuni testi si usa la locuzione decrescente check [Marson/Baiti/Ancona/Rubino]

Il prossimo risultato assicura il notevole fatto che le successioni monotone non sono mai oscillanti (nello spirito dell'Osservazione 6.5.3, rileviamo che è sufficiente che le successioni siano monotone *definitivamente*, cioè a partire da un certo indice). Denoteremo con $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ l'estremo superiore dell'insieme immagine della successione, cioè $\sup\{a_n\}$, e analogamente $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ l'estremo inferiore denoterà $\inf\{a_n\}$.

Teorema 6.6.2. *Sia* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

- *Se* $\{a_n\}$ *è monotona non decrescente, allora* $\{a_n\}$ *non oscilla e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

- *Se* $\{a_n\}$ *monotona non crescente, allora* $\{a_n\}$ *non oscilla e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto per le successioni non crescenti, lasciando al lettore la trattazione di quelle non decrescenti. Supponiamo anche, per fissare le idee, che la successione $\{a_n\}$, monotona non crescente, sia inferiormente limitata. Quindi $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \doteq I \in \mathbb{R}$. Vogliamo quindi dimostrare che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ : \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad |a_n - I| = (a_n - I) < \varepsilon$$

(osserviamo che $a_n - I \geq 0$ perché $I = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$). Ora ricordiamo la caratterizzazione di inf fornita dal Lemma 4.2.10, da cui segue che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}\ :\ a_{\bar{n}} < I + \varepsilon\,.$$

Poiché $\{a_n\}$ è non crescente, si ha $a_n \leq a_{\bar{n}} < I+\varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. La definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = I$ è quindi verificata con $n_\varepsilon := \bar{n}$. □

Ora, se $\{a_n\}$ è monotona e limitata, allora sia $\sup_n a_n$ che $\inf_n a_n$ sono due numeri reali. Abbiamo quindi il seguente

Corollario 6.6.3. *Ogni successione monotona e limitata converge a un limite* $L \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.6.4. La successione $\{a_n := \frac{1}{n}\}$
- è strettamente decrescente
- è limitata. In particolare, $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$.

Allora ritroviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_n a_n = 0.$$

Esempio 6.6.5. La successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

- è strettamente crescente
- è limitata: infatti,

$$2 \leq a_n < 3 \quad \forall\, n \geq 1.$$

Quindi $\{a_n\}$ è convergente al

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{6.6.1}$$

Ricordiamo che $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è la *costante di Nepero* (base dei logaritmi naturali): una sua approssimazione è

$$e \simeq 2,71828182845904523536028747135 27$$

Si noti che $2 < e < 3$. La dimostrazione del fatto che e coincide con $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ viene tralasciata.

Da (6.6.1) discende il seguente *limite notevole:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}\,. \tag{6.6.2}$$

6.7 Sottosuccessioni

Partiamo da una successione

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, \ldots\}\,.$$

Ricordiamo che essa è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. È quindi lecito considerarne la restrizione a sottoinsieme **infinito** $N' \subset \mathbb{N}$: per esempio, prendiamo $N' := \{\text{numeri primi}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$. Effettuando questa restrizione otteniamo quindi

$$\{a_2,\, a_3,\, a_5,\, a_7,\, a_{11},\, a_{13},\, \ldots\}\,,$$

a partire dalla quale definiamo la **nuova successione** $\{b_n\}$ ponendo

$$b_0 := a_2,\ b_1 := a_3,\ b_2 := a_5,\ b_3 := a_7,\ b_4 := a_{11},\ b_5 := a_{13}, \ldots\,.$$

Abbiamo quindi estratto, dalla successione $\{a_n\}$ di partenza, una nuova successione i cui elementi sono scelti fra quelli di $\{a_n\}$ e disposti in modo da essere elencati nello stesso ordine. Matematicamente, questo si formalizza osservando che la successione $\{b_n\}$ è stata ottenuta tramite **composizione** di successioni: infatti,

$$b_n = a_{f(n)} \quad \text{con} \quad f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ data da } f(0) := 2,\, f(1) := 3,\, f(2) := 5,\, f(3) := 7,\, f(4) := 11, \ldots$$

Notare che f è una successione strettamente crescente: è per questo che gli elementi estratti da $\{a_n\}$ sono elencati nello stesso ordine di quelli di $\{a_n\}$. In generale, diamo la seguente definizione.

Definizione 6.7.1. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_k\}$ due successioni. Diciamo che $\{b_k\}$ è una* <u>*sottosuccessione*</u> *di $\{a_k\}$ se*

$$\exists f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \ \textbf{\textit{strettamente crescente}}$$

tale che

$$b_k = a_{f(k)} \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

Esempio 6.7.2. 1. $\{b_k = 4k^2\}$ è sottosuccessione di $\{a_n = n^2\}$: infatti con $f(k) = 2k$ si ha

$$b_k = a_{f(k)} = (2k)^2 = 4k^2.$$

Poiché l'indice della successione è muto[4], scriveremo anche che

$$\{4n^2\} \textbf{ è sottosuccessione di } \{n^2\}.$$

Anche negli esempi seguenti useremo svariate notazioni per gli indici.

2. $\left\{\frac{1}{(n+5)^2}\right\}$ è sottosuccessione della successione $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (prendendo $f(n) = n+5$).

3. $\left\{\frac{1}{(2k+3)^2}\right\}$ è sottosuccessione di $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}$ (prendendo $f(k) = 2k+3$).

4. $\left\{\frac{1}{(3j-2)^2}\right\}$ è sottosuccessione di $\left\{\frac{1}{j^2}\right\}$ (prendendo $f(j) = 3j-2$).

[4] cioè, possiamo scrivere, indifferentemente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, o $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, o $\{b_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$......

Osservazione 6.7.3. 1. Visto che f è una funzione da $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{N}$, possiamo più semplicemente rappresentarla come una mappa che associa a ogni $k \in \mathbb{N}$ la sua immagine $n_k \in \mathbb{N}$. A partire da una successione $\{a_n\}$, scriveremo quindi

$$b_k = a_{n_k};$$

la notazione n_k ricorda anche il fatto che l'indice della successione di partenza era denotato con n. L'indice della sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ è invece k, cioè scriveremo

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

(e non limite $\lim_{n\to\infty} a_{n_k}$!!!!!!) In particolare, ribadiamo che $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ significa

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \ \forall\, k \geq k_\varepsilon, \ \ |a_{n_k} - L| \leq \varepsilon. \tag{6.7.1}$$

2. Considereremo sempre il caso in cui $f(k) = n_k$ è una successione strettamente crescente. Quindi si ha

$$\lim_{k\to+\infty} f(k) = \lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty.$$

Teorema 6.7.4. *Siano $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\{a_n\}$ una successione. Si ha che*

$$(a_n \to L \text{ per } n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad (a_{n_k} \to L \text{ per } k \to \infty)$$
$$\forall \text{ sottosuccessione } \{a_{n_k}\} \text{ di } \{a_n\}.$$

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che $L \in \mathbb{R}$, lasciando al lettore la discussione dei casi $L = +\infty$ e $L = -\infty$. Fissiamo $\varepsilon > 0$: per ipotesi,

$$\text{esiste un indice } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - L| \leq \varepsilon \text{ per ogni } n \geq \varepsilon. \tag{6.7.2}$$

Ora usiamo che $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$, come appena osservato. Ricordando la definizione di successione divergente a $+\infty$, da questo discende che

$$\exists\, \bar{k} \in \mathbb{N} : \ \forall\, k \geq \bar{k}, \ \ n_k \geq n_\varepsilon\,. \tag{6.7.3}$$

Combinando (6.7.2) & (6.7.3) deduciamo che

$$\exists\, \bar{k} \in \mathbb{N} : \ \forall\, k \geq \bar{k}, \ \ |a_{n_k} - L| \leq \varepsilon\,.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo dimostrato che $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. □

Quindi:
- se $\{a_n\}$ converge, allora ogni sua sottosuccessione converge allo stesso limite
- se $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ o $-\infty$, ogni sua sottosuccessione diverge a $+\infty$ o $-\infty$.

Corollario 6.7.5. *Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.*

1. *Se esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ oscillante, allora $\{a_n\}$ è oscillante.*
2. *Se $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ sono due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che*

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

Esempio 6.7.6. 1. Ritroviamo il fatto, già noto, che la successione $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ oscilla: infatti, essa ammette le due sottosuccessioni

$$a_{2k} = (-1)^{2k} \equiv 1, \qquad a_{2k} = (-1)^{2k+1} \equiv -1$$

convergenti a 1 e a -1, rispettivamente.

2. Consideriamo $\{a_n\} = \{(-n)^n\}$ e le sue due sottosuccessioni $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$:

$$b_k = a_{2k} = (-2k)^{2k} = (2k)^{2k} \qquad c_k = a_{2k+1} = (-(2k+1))^{2k+1} = -(2k+1)^{2k+1}.$$

Esse hanno limiti diversi:

$$\lim_{k\to\infty} b_k = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} c_k = -\infty.$$

Quindi $\{(-n)^n\}$ è oscillante.

Ricordiamo che se una successione $\{a_n\}$ è convergente, allora $\{a_n\}$ è limitata. Abbiamo visto che il viceversa è falso. Il seguente fondamentale risultato, che non dimostreremo, garantisce però che da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

Teorema 6.7.7 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

6.8 Successioni di Cauchy

Partiamo da questa considerazione preliminare: sia $\{a_n\}$ una successione convergente a $L \in \mathbb{R}$. Cioè, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia $|a_n - L| \leq \varepsilon$. Quindi, per ogni coppia di indici $n, m \geq n_\varepsilon$ si ha

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| \leq 2\varepsilon\,.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, possiamo equivalentemente riformulare quanto appena dimostrato in questo modo:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n, m \geq n_0 \;\; |a_n - a_m| \leq \varepsilon\,, \tag{6.8.1}$$

cioè *gli elementi della successione $\{a_n\}$ sono arbitrariamente vicini pur di prendere valori di n sufficientemente grandi.*

Definizione 6.8.1. *Chiamiamo la* (6.8.1) condizione di Cauchy *e chiamiamo* successione di Cauchy *ogni successione che la verifica.*

Osservazione 6.8.2 (Riformulazione della condizione di Cauchy)**.** La condizione di Cauchy si riformula, equivalentemente, in questo modo

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\; \forall\, n \geq n_0,\; \forall\, k \in \mathbb{N}^+ \quad |a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon \tag{6.8.2}$$

(si ricordi che $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Esempio 6.8.3. 1. $\{(-1)^n\}$ **non** è di Cauchy.

2. $\{n^2\}$ **non** è di Cauchy.

Abbiamo dimostrato che

$$a_n \to L \in \mathbb{R} \implies a_n \text{ soddisfa la condizione di Cauchy,}$$

quindi la condizione di Cauchy è **condizione necessaria** affinché una successione sia convergente. Il criterio di Cauchy assicura che la condizione di Cauchy è anche **condizione sufficiente** affinché una successione sia convergente.

Teorema 6.8.4 (Criterio di Cauchy)**.** *Una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ converge se e solo se essa è di Cauchy.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare la sufficienza della condizione di Cauchy per la convergenza della successione $\{a_n\}$. Lo faremo in tre passi: proveremo che

1. $\{a_n\}$ è limitata;
2. $\{a_n\}$ ammette una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, per $k \to \infty$, a un limite L;
3. *tutta* la successione $\{a_n\}$ converge a L *per* $n \to \infty$.

Passo 1: scegliamo $\varepsilon = 1$ nella condizione di Cauchy (6.8.1): troviamo quindi $n_0 \in \mathbb{N}$ take che $\forall\, n,\, m \geq n_0$ si abbia $|a_n - a_m| \leq 1$. In particolare, fissando $m = n_0$ concludiamo che $|a_n - a_{n_0}| \leq 1$ per ogni $n \geq n_0$, quindi (ricordando le proprietà del modulo)

$$|a_n| \leq |a_{n_0}| + 1 \qquad \text{per ogni } n \geq n_0. \tag{6.8.3}$$

D'altra parte, è evidente che

$$|a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n_0-1}| \qquad \text{per ogni } n \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}. \tag{6.8.4}$$

Da (6.8.3)&(6.8.4) deduciamo che

$$|a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n_0}| + 1 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

cioè la limitatezza di $\{a_n\}$.

Passo 2: segue dal Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Passo 3: dobbiamo dimostrare che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n \geq n_\varepsilon \;\; |a_n - L| \leq \varepsilon\,.$$

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$: applicando la condizione di Cauchy (6.8.1) troviamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n,\, m \geq n_0, \qquad |a_n - a_m| \leq \varepsilon\,. \tag{6.8.5a}$$

Ora, ricordando che $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, troviamo $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n_k \geq n_0 \quad \text{per } k \geq \bar{k}. \tag{6.8.5b}$$

Dalla definizione di $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ (cf. (6.7.1)) abbiamo che, in corrispondenza dell'$\varepsilon > 0$ fissato,

$$\exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, k \geq k_\varepsilon, \;\; |a_{n_k} - L| \leq \varepsilon\,. \tag{6.8.6}$$

Sia $k' = \max\{\bar{k}, k_\varepsilon\}$. Allora abbiamo, per $n \geq n_0$ e $k \geq k'$,

$$|a_n - L| \stackrel{(1)}{\leq} |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| \stackrel{(2)}{\leq} 2\varepsilon\,, \tag{6.8.7}$$

ove (1) segue dalla disuguaglianza triangolare del modulo, (2) da (6.8.5a) & (6.8.5b) (poiché $n_k \geq n_0$ per $k \geq k' \geq \bar{k}$) e da (6.8.6) (che possiamo applicare poiché $k \geq k' \geq k_\varepsilon$). Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario in (6.8.7) (si veda il punto (3) dell'Osservazione 6.2.3), concludiamo la convergenza di $\{a_n\}$ a L. □

Legame con la completezza di $\mathbb{R}$: il fatto che la condizione di Cauchy sia sufficiente per la convergenza di una successione è **equivalente** alla completezza di $\mathbb{R}$, così come è equivalente alla completezza di $\mathbb{R}$ l'esistenza di un elemento separatore per ogni coppia di classi separate, cf. la (4.3.1). *Una riformulazione della completezza di $\mathbb{R}$ è proprio la proprietà che tutte le successioni reali di Cauchy sono convergenti.*

$\mathbb{Q}$ non è completo. Infatti, in $\mathbb{Q}$ esistono successioni di Cauchy che **non convergono ad alcun limite $L \in \mathbb{Q}$:** è sufficiente considerare una successione

$$\{x_n\} \subset \mathbb{Q}, \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

(essa esiste per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$).

Capitolo 7

Serie numeriche

In questo capitolo ci proponiamo di generalizzare l'operazione di somma al caso di *infiniti* addendi. Il nostro approccio sarà basato sulla nozione di *convergenza/divergenza di una serie numerica*, nozione che, a sua volta, si appoggia alla teoria dei limiti di successioni.

7.1 Il carattere di una serie

Ricordiamo la definizione di sommatoria vista nel Capitolo 3: dato un insieme *finito* di indici I e una famiglia finita di numeri reali $(a_i)_{i\in I}$, il simbolo $\sum_{i\in I} a_i$ denota la somma dei numeri $(a_i)_{i\in I}$. Per esempio, all'insieme finito di indici $I = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ e alla famiglia $\{a_i\}_{i\in I} = \{a_i\}_{i=1}^{8}$ corrisponde la

$$\sum_{i=1}^{8} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 \,.$$

Supponiamo ora di avere una famiglia *infinita*, indicizzata dai naturali $n \in \mathbb{N}$, di numeri reali, cioè una *successione* $\{a_n\}$. Ci poniamo ora il problema di dare significato alla somma infinita

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

L'idea chiave per fare questo è introdurre un'ulteriore successione, quella delle *somme parziali* degli elementi a_n (detta anche successione delle *ridotte della serie*). Nella definizione che segue, per semplicità presupporremo di partire da una successione definita per $n \in \mathbb{N}$; definizioni del tutto analoghe si daranno per successioni definite su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definizione 7.1.1 (Successione delle somme parziali, somma e carattere di una serie). *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Introduciamo la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}
&s_0 := a_0,\\
&s_1 := a_0 + a_1,\\
&s_2 := a_0 + a_1 + a_2,\\
&\ldots\\
&s_n := a_0 + \cdots + a_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

1. *Supponiamo che $\{s_n\}$ non oscilli. Allora il $\lim_{n\to\infty} s_n$ è detto* somma della serie *degli a_n, e denotato con i simboli*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n \qquad o \qquad \sum_{n} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n \,.$$

2. *La successione* $\{s_n\}$ *è detta successione delle* somme parziali *o* ridotte *della serie.*

3. *Si dice che la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *è* convergente/divergente/oscillante *a seconda che la successione* $\{s_n\}$ *converga, diverga o oscilli per* $n \to \infty$ *(più precisamente, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge a* $+\infty$ *o a* $-\infty$ *se la successione* $\{s_n\}$ *diverge a* $+\infty$ *o a* $-\infty$*); nell'ultimo caso, scriveremo anche* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ *o* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$*.*

   La proprietà di essere convergente, divergente o oscillante si dice anche carattere della serie; il generico elemento a_n *viene detto* termine generale *della serie.*

Nel calcolare la successione delle somme parziali spesso useremo che $s_n = s_{n-1} + a_n$ per ogni $n \geq 1$.

Osservazione 7.1.2. 1. Data $\{a_n\}$, $\{s_n\}$ è definita da $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$; si noti che, all'interno della sommatoria, l'indice della successione $\{a_n\}$ è stato cambiato in k: la scrittura $s_n := \sum_{n=0}^{n} a_n$ è <u>errata</u>; si noti anche che l'indice della sommatoria è muto: si potrebbe equivalentemente scrivere $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Il lettore deve aver chiara la differenza fra la successione $\{a_n\}$ e la $\{s_n\}$. Per esempio

$$a_n \equiv 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1 \cdot (n+1) = n+1\,, \tag{7.1.1}$$

$$a_n = n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{7.1.2}$$

2. Dire che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge significa affermare la convergenza della successione $\{s_n\}$, non quella della successione $\{a_n\}$: **la convergenza della $\{a_n\}$ non basta ad assicurare la convergenza della serie associata!**

   Sommare una serie significa calcolare il limite della successione delle sue ridotte.

Esempio 7.1.3. 1. La serie $\sum_{n=0}^{n} a_n$ con $a_n \equiv 1$ (cioè, la serie 'degli uni') diverge a $+\infty$: infatti, tenendo conto della (7.1.1) si ha che $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$.

2. La serie $\sum_{n=0}^{n} a_n$ con $a_n = n$ diverge (a $+\infty$): infatti, tenendo conto della (7.1.2) si ha che $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$.

3. La serie $\sum_{n=0}^{n} a_n$ con $a_n = (-1)^n$ è oscillante: infatti, si ha che

$$s_0 = a_0 = 1, \quad s_1 = s_0 + a_1 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0,$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 0 + 1 = 1, \qquad s_3 = s_2 + a_3 = 0, \ldots..$$

   Non è difficile dimostrare (per induzione...) che

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

   quindi $\{s_n\}$ è oscillante.

La condizione di Cauchy per le serie: Una serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è una successione di Cauchy (si ricordi il Teorema 6.8.4). Ricordando la riformulazione della condizione di Cauchy (cf. la (6.8.2)), ciò significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \ \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}^+$$
$$|s_{n+k} - s_n| = \left| \sum_{j=0}^{n+k} a_j - \sum_{j=0}^{n} a_j \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq \varepsilon. \tag{7.1.3}$$

Naturalmente, la serie degli zeri (cioè, $\sum_n a_n$ con $a_n \equiv 0$) è convergente. Un esempio meno banale è fornito dalla

Esempio 7.1.4 (La serie geometrica $\sum_n q^n$)**.** Sia $q \in \mathbb{R}$. A partire dalla successione geometrica $a_n = q^n$ introduciamo la *serie geometrica di ragione* q:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

(con la convenzione $0^0 = 1$ se $q = 0$).

Calcoliamo l'associata successione delle ridotte: per $q = 1$ la serie si riduce a quella dell'Esempio 7.1.3(1), e quindi $s_n = n + 1$; per $q \neq 1$ si ha ha

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{7.1.4}$$

Questo si può dimostrare per induzione: infatti,

$$s_0 = a_0 = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} \qquad \text{(caso iniziale)}$$

supponiamo ora che la (7.1.4) sia valida al passo n e deduciamone la validità al passo $n+1$: si ha infatti

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \qquad \text{(passo induttivo).}$$

Vediamo allora che per $|q| < 1$, visto che $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, la serie converge; per $q = 1$ la serie geometrica diverge (positivamente); per $q > 1$, visto che $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$, la serie diverge (positivamente); infine, la serie oscilla per $q \leq -1$, visto che in tal caso $\nexists \lim_{n\to\infty} q^{n+1}$. Riassumendo

$$\sum_n q^n = \begin{cases} \text{converge, e ha somma } S = \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{oscilla} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

La serie geometrica è una delle pochissime serie per le quali possiamo effettuare lo studio del carattere (convergenza/divergenza etc.) tramite il calcolo diretto della successione delle ridotte. Come vedremo, è in generale impossibile scrivere la somma parziale s_n di una generica serie $\sum_n a_n$ in forma accettabile, al punto che se ne riesca a calcolare il limite. In generale, ci dovremo accontentare di determinare il carattere di una serie; in caso di convergenza, il calcolo effettivo della somma della serie (cioè del limite della successione delle somme parziali) sarà quasi sempre fuori portata. Qualora ci si trovi in uno dei casi speciali in cui si può effettivamente calcolare la somma, sarà utile tenere presente la seguente osservazione, che sviluppiamo proprio a partire dall'esempio della serie geometrica.

Osservazione 7.1.5 (Il calcolo della somma di una serie)**.** Consideriamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ di ragione $q = \frac{1}{2}$: essa converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Consideriamo ora la serie $\sum_n a_n$ con

$$a_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

In altri termini, a_n coincide con la successione geometrica $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, tranne che nel primo termine (che nella serie geometrica vale $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, mentre qui $a_0 = 0$). Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1\,.$$

Analogamente, considerando

$$a'_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \text{ e } n = 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, \ldots$$

A partire da questo esempio, deve essere chiaro al lettore che, **in generale**, se cambiamo i primi m termini della successione $\{a_n\}$ termine generale della serie (per esempio, ponendoli uguali a zero; o attribuendo loro un valore diverso), **non cambia il carattere della serie, MA cambia il valore della somma**. Nel caso in cui sappiamo calcolare la somma di una serie, quindi, prestiamo bene attenzione al valore dell'indice a partire dal quale la calcolo: passando da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{a} \quad \sum_{n=\bar{k}}^{\infty} a_n$$

il valore della somma cambia.

Concludiamo questa sezione con un'ulteriore classe di serie per le quali è possibile calcolare la successione delle somme parziali.

Definizione 7.1.6 (Serie telescopiche)**.** *Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *si dice* telescopica *se la successione* $\{a_n\}$ *è della forma*

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

per una opportuna successione $\{b_n\}$*.*

Il calcolo della successione delle ridotte per una serie telescopica è immediato

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1};$$

sopravvivono, cioè, solo il primo e l'ultimo termine della successione $\{b_n\}$. Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1},$$

cioè il carattere della serie e la sua somma (se essa non oscilla) sono immediatamente determinati una volta calcolato il $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Esempio 7.1.7 (La serie di Mengoli)**.** *La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

è telescopica, infatti

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

(la successione b_n *è data da* $b_n := \frac{1}{n+1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*). Quindi ottengo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 1.$$

7.2 Alcuni risultati preliminari

In base alla definizione, ogni serie è un limite: quello dell'associata successione delle ridotte. Dalla teoria dei limiti di successioni, otteniamo quindi un primo risultato sui legami fra serie e (1) somma di successioni; (2) prodotto di una successione per una costante.

Teorema 7.2.1 (Teorema di linearità)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Se le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono convergenti, allora anche $\sum_n (a_n + b_n)$ e $\sum_n ca_n$ lo sono e si ha:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

La denominazione 'Teorema di linearità' si richiama al legame fra questo risultato e il Teorema di linearità visto per le successioni, cioè il Teorema 6.3.1. La dimostrazione segue infatti immediatamente dal Teor. 6.3.1 tenendo conto che, considerate le successioni

$$\begin{cases} \{s_n\} \\ \{s'_n\} \end{cases} \qquad \text{successione delle somme parziali di} \quad \begin{cases} \{a_n\} \\ \{b_n\} \end{cases}$$

(rispettivamente), allora la successione delle somme parziali della serie $\sum_n (a_n + b_n)$ è

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}(a_n + b_n) = \sum_{k=0}^{n} a_n + \sum_{k=0}^{n} b_n = s_n + s'_n\,.$$

Ora, segue dal Teor. 6.3.1 che, se $\{s_n\}$ e $\{s'_n\}$ sono convergenti, è convergente anche $\{\sigma_n\}$. Lasciamo al lettore la dimostrazione dell'asserto per la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} ca_n$.

Tenendo presente la discussione appena sviluppata, si vede subito che l'enunciato del Teorema 7.2.1 si estende anche alle serie divergenti, pur di non avere forme indeterminate. Potremo quindi dedurre, per esempio, che

$$\begin{cases} \sum_n a_n = S \in \mathbb{R}, \\ \sum_n b_n = -\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sum_n (a_n + b_n) = -\infty.$$

Per quello che riguarda i prodotti e i quozienti di successioni, non abbiamo risultati analoghi a quelli visti nel Teor. 6.3.1: ad esempio, la serie dei prodotti $a_n b_n$ e il prodotto delle due serie $(\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$ sono due cose ben diverse.

Teorema 7.2.2 (Condizione necessaria per la convergenza di una serie)**.** *Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente. Allora*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}.$$

Dimostrazione. Per ipotesi la successione delle ridotte $\{s_n\}$ converge (a un certo limite $S \in \mathbb{R}$). Da $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ segue immediatamente che $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$. Per il teorema di linearità delle successioni, converge anche la successione differenza $\{s_n - s_{n-1}\}$, con

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

D"altra parte,

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n\,.$$

il che conclude la dimostrazione. □

Che la successione dei termini generali di una serie sia infinitesima è una condizione necessaria per la convergenza della serie: se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converge. Non è però una condizione sufficiente, come illustrato dal seguente

Esempio 7.2.3 (La serie armonica).

1. La serie armonica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$
diverge, ma $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. La serie armonica generalizzata
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$
ha il seguente carattere:
   - per $\boxed{\alpha > 1}$ la serie **converge**
   - per $\boxed{\alpha \leq 1}$ la serie **diverge**

   Si noti che la successione $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ è infinitesima per ogni $\alpha > 0$.

7.3 Serie a termini positivi

Per *serie a termini positivi* (o 'termini non negativi') intendiamo una serie del tipo
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \text{tale che } \ a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per questa classe di serie si ha un buon bagaglio di risultati che permettono di stabilirne il carattere a partire dal seguente teorema, di importanza cruciale: una serie a termini positivi converge, oppure diverge positivamente.

Teorema 7.3.1 (Teorema fondamentale delle serie a termini positivi). *Supponiamo che $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ sia positiva, cioè $a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_n a_n$ non oscilla e*
$$\sum_{n=0} a_n = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right). \tag{7.3.1}$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che la successione delle ridotte $\{s_n\}$ è monotona non decrescente: infatti,
$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
Si applica allora il Teorema 6.6.2, che garantisce che $\{s_n\}$ non oscilla, con $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_n s_n$, da cui la (7.3.1). □

Osservazione 7.3.2. Deve essere chiaro al lettore che **non oscillano neppure le serie a termini negativi**: in tal caso, la successione delle ridotte è non crescente, quindi può solo convergere, o divergere a $-\infty$.

Inoltre, per poter applicare il Teorema 7.3.1 è sufficiente che la successione $\{a_n\}$ sia positiva (o negativa) da un certo indice m_0 in poi (e cioè *definitivamente*): quel che accade per i primi m_0 valori non influisce sul carattere della serie (ma solo sulla sua somma, si riveda l'Osservazione 7.1.5).

Diamo ora una serie di **Criteri di convergenza per serie a termini positivi**, che forniscono condizioni sufficienti per la loro convergenza/divergenza (sappiamo a priori che le serie non oscilleranno!). Il lettore noti che possiamo applicare questi criteri anche per lo studio del carattere di serie a termini negativi, tenendo conto che, data $\sum_n a_n$ con $a_n \leq 0$, la serie $\sum_n b_n$ con $b_n = -a_n$ è a termini positivi. Quindi si possono applicare i criteri a $\sum_n b_n$ e poi dedurre i risultati per $\sum_n a_n$.

Si noti che nel primo criterio che vediamo è sufficiente che le ipotesi valgano *definitivamente*, cioè a partire da un certo indice.

Proposizione 7.3.3 (Criterio del confronto)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni positive, tali che*

$$\exists\, m \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq m \quad 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Allora,

1. *se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n a_n$ converge.*
2. *se $\sum_n a_n$ diverge, anche $\sum_n b_n$ diverge.*

Dimostrazione. È chiaro che il punto (2) segue dal punto (1). Per dimostrare (1) è sufficiente osservare che, rimpiazzando opportunamente i primi m termini delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$: per esempio, ponendo $a_n = b_n \equiv 0$ per ogni $n \in \{0, \ldots, m-1\}$, ci si riconduce a una situazione in cui $a_n \leq b_n$ per ogni n, mantenendo inalterato il carattere delle due serie (si veda ancora l'Osservazione 7.1.5. Allora, dette $\{s_n\}$ e $\{s'_n\}$ le successioni delle ridotte di $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, rispettivamente, si ha che $s_n \leq s'_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'asserto segue quindi dal Teorema 6.5.2. □

Diamo ora una alcuni esempi per illustrare l'applicazione di questo criterio; faremo altrettanto per i criteri *asintotici* del confronto, del rapporto e della radice. Eviteremo di verificare che le serie discusse negli esempi siano a termini positivi: lasciamo questa importante verifica al lettore, ricordando che i criteri visti in questa sezione possono essere applicati solo alle serie (definitivamente) positive (o -definitivamente - negative). Quindi, nello svolgimento degli esercizi **la discussione della positvità va sempre premessa all'applicazione dei vari criteri!**

Esempio 7.3.4. 1. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n} \quad \text{CONVERGE.}$$

Infatti, per ogni $n \geq 1$ si ha che $\frac{2^{-n}}{n} \leq 2^{-n}$, e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ converge.

2. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^{1/2}} \quad \text{DIVERGE.}$$

Infatti, visto che $\sin(n) \geq -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione $b_n = \frac{2+\sin(n)}{n^{1/2}}$ verifica $b_n \geq a_n := \frac{1}{n^{1/2}}$ per ogni $n \geq 1$, e la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge.

3. La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} \text{ DIVERGE}$$

(notare che nel sommarla partiamo da $n = 2$ in quanto l'argomento di log deve essere strettamente positivo, e $\log(1) = 0$). Infatti, ricordiamo che $\log(n) \leq n$ per ogni $n \geq 1$, quindi

$$\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \geq 2$$

e $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.

Esempio 7.3.5. Più in generale, la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n|\ln(n)|^{\lambda}}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- per $\boxed{\lambda > 1}$ CONVERGE
- per $\boxed{\lambda \leq 1}$ DIVERGE

Spesso non è immediato stabilire un confronto *puntuale* (cioè valido *per ogni* n) fra due successioni, e quindi il Criterio del confronto può non essere di immediata applicazione. È molto più frequente ricorrrere alla sua versione *asintotica*, le cui ipotesi riguardano dei limiti, anziché i singoli termini delle successioni considerate.

Proposizione 7.3.6 (Criterio del confronto asintotico)**.** Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie a termini non negativi, con

$$b_n > 0 \quad \forall\, n \geq m$$

per un certo indice $m \in \mathbb{N}$, e tali che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty].$$

Allora

1. se $\boxed{L \in (0, +\infty)}$, $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_n b_n$ converge;
2. se $\boxed{L = 0}$ e $\sum_n b_n$ converge, allora $\sum_n a_n$ converge;
3. se $\boxed{L = +\infty}$ e $\sum_n b_n$ diverge, allora $\sum_n a_n$ diverge.

Tralasciamo la dimostrazione di questo criterio e vediamo subito qualche esempio di applicazione.

Esempio 7.3.7. 1. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^{1/3}} \quad \text{DIVERGE.}$$

Confrontiamo la successione $a_n = \frac{\arctan(n)}{n^{1/3}}$ con $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$: tenendo conto che $\lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\pi}{2} \in (0, \infty).$$

Quindi $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n \frac{1}{n^{1/3}}$, che è una serie armonica generalizzata divergente.

2. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^5 + 3n^3 + 5n}{n^6 + n^7 + n^2 + 3} \quad \text{CONVERGE.}$$

Lasciamo al lettore la verifica che del fatto che la successione termine generale è infinitesima (condizione necessaria per la convergenza). Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 + 3n^3 + 5n}{n^6 + n^7 + n^2 + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^7} \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5} + \frac{3}{n^7}} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^7},$$

confrontiamo la serie $\sum_n a_n$ (con $a_n = \frac{3n^5+3n^3+5n}{n^6+n^7+n^2+3}$) con la serie $\sum_n b_n$ (con $b_n = \frac{1}{n^2}$): si ha infatti che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 3 \in (0, +\infty)$. Quindi $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n^2}$, che converge.

3. La serie
$$\sum_{n=2} \frac{1}{|\log(n)|^6} \qquad \text{DIVERGE}$$
Osserviamo infatti che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{|\log(n)|^6}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n)^6} = +\infty$$
in quanto, per la gerarchia degli infiniti (si ricordi la Sez. 6.4), l'infinito di n al numeratore vince su quello di $\log(n)^6$ al denominatore. Poiché la serie $\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n}$ diverge, diverge anche $\sum_{n=2} \frac{1}{|\log(n)|^6}$.

Da notare che, se avessimo confrontato la serie in questione con la serie (convergente) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$, non avremmo potuto concludere nulla: infatti, avremmo avuto che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{|\log(n)|^6}}{\frac{1}{n^6}} = +\infty,$$
quindi avremmo potuto applicare solo il punto (3) del criterio del confronto asintotico. Ora, questo punto permette di concludere qualcosa sul carattere della $\sum_n a_n$ solo se essa viene confrontata con una serie $\sum_n b_n$ *divergente*. Nel caso in cui $\sum_n b_n$ sia *convergente* non si può concludere nulla

Riprendiamo la serie al punto (2) dell'Esempio 7.3.7. Abbiamo visto che essa si può scrivere come $\sum_n c_n \cdot \frac{1}{n^2}$ con $c_n = \frac{3+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}+\frac{3}{n^7}} \to 3$ as $n \to \infty$. Potremmo applicare a questa serie una forma alternativa del punto (1) (quello in cui il limite $L \in (0, +\infty)$) del Criterio asintotico del confronto.

Proposizione 7.3.8 (Criterio asintotico del confronto: seconda versione)**.** *Siano $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ due successioni strettamente positive, e si supponga $\{c_n\}$ convergente e non infinitesima. Allora le serie*
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
hanno lo stesso carattere: sono entrambe divergenti o convergenti.

Concludiamo questa illustrazione del criterio asintotico del confronto osservando che, per poterlo applicare efficacemente, è di fondamentale importanza disporre di una famiglia di serie (a termini positivi), il cui carattere sia noto in partenza, con cui confrontare le serie che lo studente si troverà a trattare. Per questo, **è cruciale che vengano studiati gli esempi dati finora!**

Diamo ora un altro criterio in forma asintotica.

Proposizione 7.3.9 (Criterio asintotico del rapporto)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione (definitivamente) strettamente positiva, cioè*
$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (o\ per\ n \geq n_0).$$
Inoltre, supponiamo
$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty].$$
Allora

1. *se* $\boxed{L < 1}$, *la serie* $\sum_n a_n$ $\boxed{\textit{converge}}$;
2. *se* $\boxed{L > 1}$, *allora la serie* $\sum_n a_n$ $\boxed{\textit{diverge}}$;
3. *se* $\boxed{L = 1}$, *allora il criterio è* $\boxed{\textit{inefficace}}$.

Osservazione 7.3.10. Un breve commento sul caso in cui $L = 1$. Il criterio è allora *inefficace*, nel senso che non fornisce alcuna informazione sul carattere della serie. Vediamo infatti due esempi di serie per le quali $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e che hanno carattere opposto.

1. la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ DIVERGE}$$
e
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n\ln(n)}}{\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = 1;$$

2. la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CONVERGE}$$
e
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

È utile applicare il criterio asintotico del rapporto a serie che contengano potenze a esponente n e fattoriali, come illustrano i seguenti esempi.

Esempio 7.3.11. 1. Sia $c > 0$. La serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^n}{n!} \quad \text{CONVERGE.}$$
Infatti,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{c^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1}}{c^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} = 0 < 1.$$

2. Sia $q > 0$. Consideriamo
$$\sum_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^\beta}, \qquad \text{con } \beta > 0.$$
Osserviamo che, per <u>ogni</u> $\beta > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{q^{n+1}}{(n+1)^\beta}}{\dfrac{q^n}{n^\beta}} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{q^n} \cdot \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}$$
$$= \lim_{n\to\infty} q\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta = q.$$
Quindi
- per $q < 1$, la serie converge per ogni $\beta > 0$.
- per $q > 1$, la serie diverge per ogni $\beta > 0$.

Per $q = 1$, ci riduciamo alla serie armonica generalizzata

$$\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta}, \qquad \text{con } \beta > 0,$$

il cui carattere è noto.

Proposizione 7.3.12 (Criterio asintotico della radice)**.** *Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione (definitivamente) non negativa, cioè*

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\textit{o per } n \geq n_0).$$

Inoltre,

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty].$$

Allora

1. *se* $\boxed{L < 1}$, *allora la serie* $\sum_n a_n$ $\boxed{\textit{converge}}$;
2. *se* $\boxed{L > 1}$, *allora la serie* $\sum_n a_n$ $\boxed{\textit{diverge}}$;
3. *se* $\boxed{L = 1}$, *allora il criterio è* $\boxed{\textit{inefficace}}$.

È naturale applicare il criterio asintotico della radice a serie che contengano potenze a esponente n.

Esempio 7.3.13. 1. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n n^{-n} \quad \text{CONVERGE } \forall\, x > 0.$$

Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} x n^{-1} = 0 < 1.$$

2. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}.$$

Si ha che (ricordate che $\sqrt[n]{\cdot}$ coincide con $(\cdot)^{1/n}$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3)^{1/n}}{x} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\log((n^3)^{1/n})\Big) = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{3}{n}\log(n)\right) = \frac{1}{x} e^0 = \frac{1}{x}$$

Notare che per risolvere la forma indeterminata ∞^0 in cui siamo incappati con il limite $\lim_{n\to\infty}(n^3)^{1/n}$ abbiamo applicato il trucco di scrivere la potenza come $\exp(\log((n^3)^{1/n}))$ (visto che exp e log sono l'una l'inversa dell'altra!). Questo ci ha consentito di applicare le proprietà del logaritmo. Infine, dalla gerarchia degli infiniti vista nella Sez. 6.4 segue che $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\log(n) = 0$. Quindi, la serie

- converge se $\frac{1}{x} < 1 \iff x > 1$
- diverge se $\frac{1}{x} > 1 \iff x < 1$
- Se $x = 1$, ritrovo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$, divergente.

Come già osservato, i criteri asintotici del rapporto e della radice hanno un campo di applicabilità simile; in particolare, essi si prestano bene a trattare serie che contengano potenze con esponente n. Il legame fra i due criteri è in realtà ben più profondo, come si evince da questo risultato.

Lemma 7.3.14. *Sia $\{a_n\}$ una successione a termini $a_n > 0$ per ogni $n > 0$ (o definitivamente). Se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

allora anche

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Un'immediata conseguenza di questo risultato è che se il criterio del rapporto risulta inefficace ($L = 1$), allora lo è anche quello della radice. Questo accade, per esempio, nel caso della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

il cui carattere è stato già dato, senza dimostrazione, nell'Esempio 7.2.3. Lo giustifichiamo, ora, tramite il

Proposizione 7.3.15 (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente e non negativa (definitivamente). Allora si ha che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge se e solo se } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge.}$$

Applichiamo questo criterio allo studio del carattere di $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, nel caso $\alpha > 0$: infatti, per $\alpha \leq 0$ il termine generale non è infinitesimo, quindi la serie non converge (e allora necessariamente diverge, essendo a termini positivi). Per $\alpha > 0$ la successione $\{a_n = \frac{1}{n^\alpha}\}$ è decrescente. Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n,$$

che è una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Essa converge se e solo se $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, il che è vero se e solo se $\alpha - 1 > 0$, cioè $\alpha > 1$.

7.4 Convergenza assoluta

In questa e nella prossima sezione vediamo come trattare le serie che non sono a termini (definitivamente) positivi o a termini (definitivamente) negativi, cioè le serie che non hanno (definitivamente) un segno.

Il prossimo risultato suggerisce una prima possibile via.

Proposizione 7.4.1 (Criterio della convergenza assoluta)**.** *Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Se converge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e vale la disuguaglianza*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che una serie converge se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy (7.1.3). Quindi, la serie $\sum_n |a_n|$ soddisfa la condizione di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}^+$$
$$\left|\sum_{j=0}^{n+k} |a_j| - \sum_{j=0}^{n} |a_j|\right| = \sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| \leq \varepsilon.$$

Ora, dalla disuguaglianza triangolare per il modulo segue che

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j| \geq \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| .$$

Quindi deduciamo dalla condizione di Cauchy per $\sum_n |a_n|$ che vale

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad \left| \sum_{j=0}^{n+k} a_j - \sum_{j=0}^{n} a_j \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| \leq \varepsilon,$$

cioè la condizione di Cauchy per la serie $\sum_n a_n$, che quindi converge.

Infine, osserviamo che, sempre per la disuguaglianza triangolare del modulo, si ha che

$$|s_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sigma_n$$

cioè il modulo della successione delle ridotte di $\sum_n a_n$ viene maggiorato dalla successione $\{\sigma_n\}$ delle ridotte della serie $\sum_n |a_n|$. Per il teorema del confronto per successioni si ha che

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| = \left| \lim_{n\to\infty} s_n \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

□

L'utilità di questo criterio è la seguente: supponiamo di dover determinare il carattere di una serie che non ha (definitivamente) un segno: possiamo allora provare a considerare la serie dei moduli, che è una serie a termini positivi. Quindi, per essa disponiamo dei criteri visti nella Sez. 7.4.

Si pone, però, il problema di vedere che cosa succede quando la serie dei moduli non converge. Ci sono naturalmente due possibilità: la serie di partenza può convergere, oppure no. Diamo la seguente.

Definizione 7.4.2. *Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice*

- *assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.*
- *semplicemente convergente è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ma **NON** la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.*

Si osservi che per le serie a termini positivi la convergenza equivale alla convergenza assoluta. Non si confondano, invece, la nozione di serie convergente e quella di serie semplicemente convergente: convergenza semplice significa ben di più, e cioè che la serie in questione converge, *e* diverge la serie dei moduli.

Esempio 7.4.3. 1. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \quad \text{è ASSOLUTAMENTE convergente.}$$

Si osservi che la serie è a termini positivi, quindi l'assoluta convergenza è equivalente alla convergenza. Vista la presenza di una potenza a esponente n e di un fattoriale, è opportuno studiarla con il criterio asintotico del rapporto: si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \ldots = 0 < 1$$

2. La serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)} \quad \text{è SEMPLICEMENTE convergente.}$$
La serie non è ha (definitivamente) un segno, poiché $n\ln(n)$ è un termine positivo, ma $(-1)^n$ cambia segno passando da -1 (per n dispari) a $+1$ (per n pari). La serie dei moduli è $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, che diverge (cf. l'Esempio 7.3.5). Vedremo che, però, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ converge: lo giustificheremo tramite il criterio di Leibniz dato nella Sezione 7.5.

3. La serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2^{n^2}} \quad \text{è ASSOLUTAMENTE convergente.}$$
Osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Quindi la serie coincide con $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n^2}}$, il cui modulo è $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$, che converge. Per vederlo, usiamo il criterio della radice:
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n^2}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 < 1.$$
Poiché la serie dei moduli converge, la serie di partenza converge assolutamente.

4. La serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)^{1/2}} \quad \text{è SEMPLICEMENTE convergente}$$
Infatti, questa serie coincide con $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)^{1/2}}$. La serie dei moduli è $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)^{1/2}}$, che diverge: questo segue dal criterio asintontico del confronto, punto (3), osservando che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n)^{1/2}}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{\ln(n)^{1/2}} = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \text{ diverge.}$$

7.5 Il criterio di Leibniz

Facciamo il punto della situazione sugli strumenti di cui disponiamo per lo studio del carattere di una serie:
- se la serie è a termini (definitivamente) positivi (o negativi), possiamo tentare di applicare i criteri della Sez. 7.3;
- se la serie non ha (definitivamente) un segno, possiamo provare a studiarne la serie dei moduli con i criteri della Sez. 7.3: l'assoluta convergenza implica la convergenza della serie di partenza.

Si pone quindi il problema di trattare le serie che non abbiano definitivamente un segno, e la cui serie dei moduli non converga (cioè, le serie che non convergano assolutamente). Non daremo uno strumento che possa funzionare per serie (non aventi un segno) generali, ma per una <u>sottoclasse</u> di tali serie, e cioè le

Definizione 7.5.1 (Serie di segno alterno)**.** *Chiamiamo* serie di segno alterno *una serie del tipo*
$$\sum_n (-1)^n a_n, \quad \textit{dove} \quad a_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \textit{(o definitivamente).}$$

Chiaramente, siccome $a_n \geq 0$, il termine generale $(-1)^n a_n$ è positivo per n pari e negativo per n dispari, da qui il nome 'serie di segno alterno'. Per studiare il carattere di queste serie si può applicare il

Proposizione 7.5.2 (Criterio di Leibniz). *Si consideri* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, *con* $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *(o definitivamente). Supponiamo che*

1. $\{a_n\}$ *sia una successione decrescente;*
2. $\{a_n\}$ *sia una successione infinitesima, cioè* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Allora la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ *è convergente. Inoltre, detta* $\{s_n\}$ *la successione delle somme parziali, si ha che:*

(i) $\{s_{2n}\}$ *(la successione delle somme parziali con indice pari) è decrescente;*

(ii) $\{s_{2n+1}\}$ *(la successione delle somme parziali con indice dispari) è crescente;*

(iii) vale la seguente stima

$$\left| s_n - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.5.1}$$

Dimostrazione.
Passo 1: usiamo il fatto che $\{a_n\}$ è decrescente e dimostriamo che

(i) $\{s_{2n}\}$ è decrescente. Questo significa che

$$s_{2(n+1)} \leq s_{2n}, \quad \text{cioè} \quad s_{2n+2} \leq s_{2n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ora

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \end{aligned}$$

visto che la successione a_n è decrescente.

(i) $\{s_{2n+1}\}$ è crescente. Questo significa che

$$s_{2(n+1)+1} \geq s_{2n+1}, \quad \text{cioè} \quad s_{2n+3} \geq s_{2n+1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ora

$$\begin{aligned} s_{2n+3} - s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0, \end{aligned}$$

ancora per la decrescenza di a_n.

Passo 2: osserviamo che

(i) $\{s_{2n}\}$ è <u>limitata</u>, infatti: $\{s_{2n}\}$ è superiormente limitata in quanto decrescente, quindi $s_{2n} \leq s_0$; $\{s_{2n}\}$ è inferiormente limitata in quanto, essendo $\{a_n\}$ positiva,

$$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = (-1)^{2n} a_{2n} + s_{2n-1} \geq s_{2n-1} \geq s_1$$

ove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che la successione $\{s_{2n+1}\}$ è crescente, quindi inferiormente limitata.

(ii) $\{s_{2n+1}\}$ è <u>limitata</u>, infatti: $\{s_{2n+1}\}$ è inferiormente limitata in quanto crescente quindi, come già osservato, $s_{2n+1} \geq s_1$; $\{s_{2n+1}\}$ è superiormente limitata in quanto

$$s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k = s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0$$

ove la penultima disuguaglianza è dovuta al fatto che $\{a_n\}$ è positiva, e l'ultima al fatto che la successione s_{2n} è limitata.

Passo 3: Siccome

(1) $\{s_{2n}\}$ decrescente e limitata $\Rightarrow$ $\{s_{2n}\}$ converge a $L = \inf_n s_{2n}$;
(2) $\{s_{2n+1}\}$ crescente e limitata $\Rightarrow$ $\{s_{2n+1}\}$ converge a $L' = \sup_n s_{2n+1}$;
(3) Siccome

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1}$$

e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (quindi è infinitesima anche la sua sottosuccessione $\{a_{2n+1}\}$), concludiamo che

$$0 = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = L' - L.$$

(4) Allora $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n+1}\}$ convergono a stesso limite L.
(5) Quindi <u>tutta</u> $\{s_n\}$ converge a L, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

$\square$

Applicando il criterio di Leibniz, dimostriamo per esempio che sono convergenti le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

(il lettore provi a dimostrare che la successione $\frac{1}{n \log(n)}$ è decrescente).

Concludiamo osservando che il l'enunciato del Criterio di Leibniz consta di due parti, egualmente importanti: si garantisce la convergenza della serie $\sum_n (-1)^n a_n$, e la (7.5.1) fornisce una stima dell'errore che si commette sostituendo alla somma della serie la sua ridotta n-esima. Tale errore è stimato, in modulo, dal termine a_{n+1} della successione, che tende a zero per $n \to \infty$. Notare l'importanza operativa di questa stima: nella maggioranza dei casi non si sa come calcolare la somma di una serie, mentre il calcolo effettivo della ridotta n-esima è sempre possibile.

7.6 Serie notevoli

Concludiamo questa sezione con un elenco di *serie notevoli*:

- ognuna delle serie seguenti **converge assolutamente** per i valori di x specificati (il lettore può verificare la convergenza assoluta tramite il Criterio del rapporto per gli x indicati, escludendo gli estremi degli intervalli nel caso in cui x vari in un intervallo limitato);
- per ognuna delle serie seguenti è **nota la SOMMA della serie**
- le formule seguenti sono **DA MEMORIZZARE**.

Eccole:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(1+x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \ -1 < x \leq 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arctan x \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x \leq 1;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Capitolo 8

Limiti e continuità

8.1 Introduzione al concetto di limite

Per introdurre la nozione di limite, iniziamo da due semplici esempi.

Esempio 8.1.1. 1. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ci poniamo il problema di analizzare il comportamento di f "vicino" al punto $x_0 = 1$, ove f non è definita. Ora osserviamo che

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1 \qquad \forall\, x \in D_f\,,$$

quindi il grafico di f è dato dalla retta $y = x + 1$, privata del punto di coordinate $(1, 2)$ (che corrisponde a $x_0 = 1$, nel quale la f non è definita). Esaminando graf(f), si vede comunque che, **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 1$, il corrispondente valore $f(x)$ è "arbitrariamente" vicino a 2.** Formalizzeremo questa proprietà dicendo che $f(x)$ **tende al limite** 2 **per x tendente a** 1, e scriveremo $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

2. Consideriamo la funzione (pari, in quanto quoziente di due funzioni dispari)

$$g(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad \forall\, x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

e indaghiamo il suo comportamento per x "vicino" a $x_0 = 0$. Usando una calcolatrice, si trova la seguente tabella di valori (visto che la funzione è pari, per comodità consideriamo solo dei valori positivi per la variabile indipendente)

x	$g(x)$
$0,1250$	$0,9974$
$0,0625$	$0,9993$
$0,0312$	$0,9998$
$0,0156$	$1,0000$
...	...

ove l'ultimo valore di $g(x)$ non è 1 ma un'approssimazione di 1 operata dalla calcolatrice, che mostra solo quattro cifre decimali. Anche in questo caso si vede che **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 0$, il corrispondente valore $g(x)$ è "arbitrariamente" vicino a 1,** cioè che $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

Prima di introdurre la definizione rigorosa di limite, riprendiamo la funzione f dell'Esempio 8.1.1, e consideriamone le seguenti varianti

$$f_1(x) := x + 1 \qquad \forall\, x \in D_{f_1} = \mathbb{R}\,,$$
$$f_2(x) := \begin{cases} x+1 & x \neq 1, \\ 0 & x = 1 \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{f_2} = \mathbb{R}\,,$$

Esaminando il grafico di f_1 e di f_2, vediamo che **per x "sufficientemente" vicino a $x_0 = 1$, sia $f_1(x)$ sia $f_2(x)$ sono "arbitrariamente" vicini a 2.** In altri termini, f_1 e f_2 hanno lo stesso comportamento di f vicino a $x_0 = 1$, anche se, diversamente da f, sono entrambe definite in $x_0 = 1$, e inoltre $f_1(1) \neq f_2(1)$.

Questo esempio suggerisce che, in una ragionevole nozione di limite di una funzione f per x tendente a un certo valore x_0, nozione che intenda descrivere il comportamento di f "vicino" a x_0, **non ha rilevanza il fatto che f sia definita oppure no nel punto x_0, e neppure il valore che f eventualmente assuma nel punto x_0.** In altri termini, per determinare il limite di f per x tendente a x_0 non conta il comportamento puntuale di f in $x = x_0$.

8.2 Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$

Consideriamo una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Prima di dare la definizione rigorosa di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, evidenziamone gli elementi principali in una

Definizione informale di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Articoliamo la definizione in due punti, che poi commentiamo:

1. *Supponiamo che $f : D_f \to \mathbb{R}$ sia definita per tutti gli x vicini a x_0, tranne che, eventualmente, per $x = x_0$.*
2. *Diciamo che f* tende al limite L quando x tende a x_0 *se f assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0 (da entrambi i lati), escludendo $x = x_0$.*

Osserviamo che, nel punto 1., viene messo in luce il fatto che la nozione di limite che vogliamo definire non dipende dal fatto che la funzione sia o meno definita nel punto $x = x_0$. Si richiede solo che, comunque ci si avvicini a x_0, sia possibile considerare $f(x)$: preciseremo questo con la nozione di *punto di accumulazione.* Anche nel punto 2. viene ribadito che il comportamento puntuale di f in x_0 non conta ai fini della determinazione del limite. Usando i quantificatori universali e la nozione di intorno, preciseremo le locuzioni "arbitrariamente vicini" e "sufficientemente vicino".

La nozione di punto di accumulazione, e cenni di topologia

Premettiamo alla definizione di punto di accumulazione un richiamo alla definizione di intorno (si veda la Definizione 4.5.4): dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, chiamiamo *intorno* aperto di x_0 di raggio r l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$, che denotiamo con il simbolo $I(x_0, r)$. Diamo ora le seguenti definizioni, nelle quali si intende che $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme non vuoto.

Definizione 8.2.1 (Punto interno)**.** *Diciamo che un punto $x_0 \in A$ è* interno ad A *se esiste $r > 0$ tale che l'intorno (aperto) di x_0 di raggio r sia contenuto in A, cioè $I(x_0, r) \subset A$.*

Si noti che un punto interno ad A è, in particolare, un punto di A. Questo non è vero per la seconda nozione che ora introduciamo.

Definizione 8.2.2 (Punto di accumulazione)**.** *Diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* un punto di accumulazione per A *se per ogni $r > 0$ l'intorno (aperto) di x_0 di raggio r contiene almeno un punto di A diverso da x_0, cioè*

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, x \in A \cap I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\,. \tag{8.2.1}$$

Si noti che la condizione (8.2.1) di intersezione non vuota deve valere per ogni $r > 0$: facendo tendere r a 0 si sta cioè richiedendo che esistano punti di A arbitrariamente vicini a x_0, ma comunque diversi da x_0. In altri termini, al tendere di r a 0 i punti di A "si accumulano" in x_0. **Si tenga presente che il fatto che punto x_0 è di accumulazione per un dato insieme A NON IMPLICA che $x_0 \in A$!!**

Esempio 8.2.3. Consideriamo i seguenti insiemi:

1. $$A = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x = \frac{1}{2^n} \, , \; n \in \mathbb{N}\} \, .$$
   Si ha che $0 \notin A$, ma 0 è un punto di accumulazione per A.
2. $A = \mathbb{Z}$: in questo caso, nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{Z}$.
3. Sia A il dominio (naturale) della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Quindi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si noti che $0 \notin A$, e che 0 è un punto di accumulazione per A.

Definizione 8.2.4 (Punto isolato)**.** *Diciamo che un punto $x_0 \in A$ è* isolato di A *se esiste $r > 0$ tale che l'intorno (aperto) di x_0 di raggio r verifica*

$$A \cap I(x_0, r) = \{x_0\}. \tag{8.2.2}$$

Si noti che un punto isolato per A è, in particolare, un punto di A. Per esempio, per l'insieme

$$A := \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}, \quad \text{il punto 1 è isolato.}$$

Definizione 8.2.5 (Punto di aderenza)**.** *Diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* aderente ad A *se x_0 è di accumulazione per A oppure x_0 è un punto isolato di A.*

Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Formalizziamo quanto richiesto nel punto 1. della definizione informale di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ipotizzando che

$$x_0 \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f. \tag{8.2.3}$$

Definizione 8.2.6 (Definizione (rigorosa) di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (I))**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* tende al limite L per x tendente a x_0 *(e scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0$), se per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ di L di raggio $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ di x_0 di raggio $\delta > 0$, tale che*

$$\forall \, x \in \big(I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}\big) \cap D_f \quad \textit{si abbia } f(x) \in I(L, \varepsilon) \, . \tag{8.2.4}$$

Se, in particolare, $L = 0$, diciamo che $f(x)$ è infinitesima *per x tendente a x_0.*

Osservazione 8.2.7.

- L'espressione f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L* è stata formalizzata usando la nozione di intorno del limite L: nella Definizione 8.2.6 si richiede infatti che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ (e possiamo quindi prendere ε arbitrariamente piccolo) $f(x)$ appartenga all'intorno $I(L, \varepsilon)$, *pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0*, cioè pur di prendere x in un opportuno intorno $I(x_0, \delta)$ del punto x_0.
- Osserviamo che, nella (8.2.4), non viene imposto nulla sul comportamento di f nel punto x_0.
- **L'ordine dei quantificatori universali "per ogni" ed "esiste"** che appaiono nella Definizione 8.2.6 è cruciale: stiamo infatti richiedendo che, comunque si fissi un intorno $I(L, \varepsilon)$, sia possibile determinare corrispondentemente un intorno $I(x_0, \delta)$ per il quale valga la (8.2.4). Di fatto, la costante δ dipenderà dalla costante ε (si veda l'Esempio 8.2.9). In altri termini, si potrebbe dire che c'è un rapporto di "causa-effetto" fra la scelta dell'intorno $I(L, \varepsilon)$ e la conseguente determinazione di $I(x_0, \delta)$. Questo rapporto verrebbe sconvolto se venisse invertito l'ordine dei quantificatori universali.

- Notiamo che la Definizione 8.2.6 sarebbe banalmente verificata se non avessimo richiesto a priori che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Infatti, se ciò non fosse vero, esisterebbe una costante $\bar{\delta} > 0$ tale che per ogni $0 < \delta < \bar{\delta}$ si avrebbe $I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f = \emptyset$, e quindi sarebbe vero che, per $0 < \delta < \bar{\delta}$,

$$\forall\, x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f, \qquad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{8.2.5}$$

  In effetti, la negazione di (8.2.5), cioè

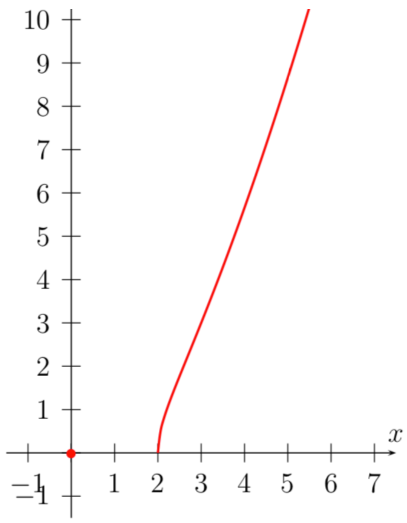
$$\exists\, x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f : \qquad |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

  sarebbe falsa, in quanto, per $0 < \delta < \bar{\delta}$, l'insieme $I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \cap D_f$ è vuoto.

In altri termini, non è significativo, o sensato, considerare il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se x_0 non è un punto di accumulazione per D_f. Per esempio, nel caso della funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2(x-2)} & \text{se } x \geq 2, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{con dominio } D_f = \{0\} \cup [2, \infty) \tag{8.2.6}$$

e grafico rappresentato qui sotto, si ha che $x_0 = 0 \in D_f$ non è un punto di accumulazione per D_f



e quindi non ha senso calcolare $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Osservando che

$$\begin{aligned} x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \quad &\Leftrightarrow \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta\,, \\ f(x) \in I(L, \varepsilon) \quad &\Leftrightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

esplicitiamo la Definizione 8.2.6 usando i simboli matematici.

Definizione 8.2.8 (Definizione (rigorosa) di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (II))**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f* tende al limite *L* per *x* tendente a *x_0 (e scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0$), se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ \ \forall\, x \in D_f \ \textit{tale che}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \textit{si ha che}\ |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{8.2.7}$$

Nei prossimi esempi usiamo la definizione per verificare alcuni limiti.

Esempio 8.2.9. 1. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante $f(x) := c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = c\,. \tag{8.2.8}$$

A questo scopo, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$: vogliamo determinare in corrispondenza una costante $\delta > 0$ tale che (si noti che in questo caso $D_f = \mathbb{R}$)

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - c| < \varepsilon\,. \tag{8.2.9}$$

Ora, $|f(x) - c| = |c - c| = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto la (8.2.9) vale comunque si scelga $\delta > 0$, cioè in questo caso (molto speciale) la determinazione della costante δ è indipendente dalla scelta di $\varepsilon > 0$. Abbiamo quindi verificato la (8.2.8).

2. Consideriamo ora la funzione $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0} x = x_0\,. \tag{8.2.10}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$: dobbiamo trovare una costante $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon\,. \tag{8.2.11}$$

Possiamo quindi, evidentemente, scegliere $\delta = \varepsilon$. Di fatto, ogni costante $\delta \in (0, \varepsilon]$ verifica la (8.2.11).

3. Verifichiamo che

$$\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5\,. \tag{8.2.12}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$: dobbiamo trovare una costante $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < |x - 2| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon\,. \tag{8.2.13}$$

È quindi sufficiente scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, o, in generale, $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3}]$.

Esempio 8.2.10. Calcoliamo

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}\,.$$

Osserviamo che la funzione razionale fratta $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$ e che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\} \qquad \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}\,.$$

Allora

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{x - 1}{x + 3} = -3\,. \tag{8.2.14}$$

Per verificare l'ultimo limite, procediamo direttamente usando la definizione. In effetti, fissiamo $\varepsilon > 0$ e determiniamo $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \text{ con } 0 < |x - (-2)| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - (-3)| = \left| \frac{x-1}{x+3} + 3 \right| = \left| \frac{4x+8}{x+3} \right| = 4 \left| \frac{x+2}{x+3} \right| < \varepsilon\,.$$

Per trovare δ dobbiamo quindi risolvere la disequazione $|\frac{x+2}{x+3}| < \frac{\varepsilon}{4}$, che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+3} < \frac{\varepsilon}{4} \\ \frac{x+2}{x+3} > -\frac{\varepsilon}{4} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{(1-\frac{\varepsilon}{4})x + 2 - \frac{3}{4}\varepsilon}{x+3} < 0 \\ \frac{(1+\frac{\varepsilon}{4})x + 2 + \frac{3}{4}\varepsilon}{x+3} > 0 \end{cases} \qquad ,$$

.....

Come già mostrano questi semplici esempi, la definizione non è lo strumento più indicato per il calcolo dei limiti. Per svilupparlo, introdurremo diverse tecniche svincolate dalla Definizione 8.2.8, che invece sarà alla base della dimostrazione rigorosa dei risultati sui limiti che presenteremo. Il primo di essi asserisce che, quando una funzione ammette un certo limite per $x \to x_0$, tale limite è univocamente determinato.

Teorema 8.2.11 (Teorema di unicità del limite)**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Siano L, $L' \in \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L', \tag{8.2.15}$$

allora $L = L'$.

Diamo la dimostrazione di questo risultato, anche se l'argomento ricalca esattamente quello sviluppato per il teorema di unicità dei limiti di successioni (cf. il Teorema 6.2.5), per evidenziare l'uso della definizione di limite.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che valga la (8.2.15) e che $L \neq L'$. Allora $|L - L'| > 0$. Poniamo $\varepsilon := |L - L'|/3$. Usando la definizione di limite, in corrispondenza a ε determiniamo due costanti $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned}
&\forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ si ha che } |f(x) - L| < \varepsilon\,,\\
&\forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ si ha che } |f(x) - L'| < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

Sia $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora

$$\forall\, x \in D_f \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha che } |f(x) - L'| < \varepsilon\,, \ |f(x) - L| < \varepsilon\,,$$

quindi, ricordando la disuguaglianza (1.4.2d),

$$\begin{aligned}
&\forall\, x \in D_f \text{ tale che } \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ si ha che}\\
&\qquad |L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L - L'|\,,
\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$|L - L'| - 2/3|L - L'| = 1/3|L - L'| < 0,$$

e questo è **un assurdo**, perché il modulo di un qualsiasi numero reale è sempre un numero maggiore o uguale a zero. □

♣ Il Teorema 8.2.11 si estende al caso di limiti infiniti (cioè, L è un elemento della retta estesa $\overline{\mathbb{R}}$) e ai limiti per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ (cioè, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

8.3 Limiti unilateri

Nella definizione di limite che abbiamo dato, non si distingue il caso in cui x tende a x_0 da destra da quello in cui x tende a x_0 da sinistra: si richiede cioè che $f(x)$ tenda a L quando x si avvicina a x_0, ma senza specificare da quale verso.

Introduciamo ora una nozione più precisa di limite, che permetta di distinguere il comportamento della funzione per x tendente a x_0 da destra o da sinistra: parleremo quindi di *limiti unilateri* (limite destro/sinistro). Per esempio, è opportuno considerare limiti unilateri quando f è definita su un intervallo (a, b) e si vuole considerare il limite di f per x tendente a uno degli estremi dell'intervallo. Inoltre, a volte i limiti unilateri possono descrivere in modo più preciso il comportamento della funzione nell'intorno di un punto x_0, come mostrerà l'Esempio 8.3.3.

Definizione informale di limite destro/sinistro. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione 'da destra' per D_f. Diciamo che f ha limite destro (rispettivamente, sinistro) L in x_0 se $f(x)$ è arbitrariamente vicino a L per x sufficientemente vicino a x_0, x maggiore di x_0 (x minore di x_0) di x_0, escludendo x_0.*

Traduciamo questo nella seguente definizione.

Definizione 8.3.1 (Limite destro/sinistro)**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per $D_f \cap (x_0, +\infty)$. Diciamo che f* ha limite destro *L* in *x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0^+$), se la restrizione di f a $D_f \cap (x_0, +\infty)$ tende a L per $x \to x_0$, cioè*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \;\; \forall\, x \in D_f \; \textit{tale che } 0 < x - x_0 < \delta \; \textit{si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{8.3.1}$$

Diciamo che f ha limite sinistro *L* in *x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, o $f(x) \to L$ per $x \to x_0^-$), se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \;\; \forall\, x \in D_f \; \textit{tale che } -\delta < x - x_0 < 0 \; \textit{si ha } |f(x) - L| < \varepsilon\,. \tag{8.3.2}$$

Esempio 8.3.2. Consideriamo la funzione $f(x) := \sqrt{1-x^2}$, definita per $x \in [-1, 1]$. Verifichiamo che $\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e determiniamo $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in [-1,1] \;\; \text{con} \;\; 0 < x - (-1) = x + 1 < \delta \;\; \text{si ha} \\ &\qquad\qquad |\sqrt{1-x^2}| = \sqrt{1-x^2} < \varepsilon \;\; \Leftrightarrow \;\; 1 - x^2 < \varepsilon^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; x^2 > 1 - \varepsilon^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; |x| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\,. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scegliere $\delta > 0$ tale che $x < \delta - 1 \;\Rightarrow\; x < -\sqrt{1-\varepsilon^2}$: cioè, $\delta \leq 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$.
Esercizio!: provare che $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$.

Esempio 8.3.3. Consideriamo la funzione *segno*

$$\text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \text{sign}(x) := \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases}. \tag{8.3.3}$$

Si vede immediatamente[1] che $\lim_{x\to 0^+} \text{sign}(x) = 1$, mentre $\lim_{x\to 0^-} \text{sign}(x) = -1$. D'altra parte, <u>non esiste</u> il limite $\lim_{x\to 0} \text{sign}(x)$: intuitivamente, ciò è proprio dovuto al fatto che $f(x)$ tende a 1 per $x \to 0^+$, e $f(x)$ tende a -1 per $x \to 0^-$.

Quello che accade per la funzione sign è il prototipo di una situazione più generale: **il limite per $x \to x_0$ esiste se e solo se il limite destro e il limite sinistro esistono e sono uguali**. In tal caso, il valore comune dei limiti unilateri fornisce il valore del limite.

Teorema 8.3.4. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano x_0, $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f. Allora*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\,.$$

Dimostrazione. Per quel che riguarda l'implicazione $\Rightarrow$, è immediato dedurre dalla definizione (8.2.7) di $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ la validità sia della (8.3.1) sia della (8.3.2) (cioè le due definizioni di limiti unilateri). Per dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$, supponiamo che valgano sia la (8.3.1) sia la (8.3.2) con lo stesso valore del limite L: si ha quindi che (si noti che la (8.3.1) sia la (8.3.2), in generale, varranno con due δ diversi in corrispondenza allo stesso valore di ε)

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta' > 0 \; : \;\; \forall\, x \in D_f \; \text{tale che } 0 < x - x_0 < \delta' \;\; \text{si ha } |f(x) - L| < \varepsilon, \\ &\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta'' > 0 \; : \;\; \forall\, x \in D_f \; \text{tale che } -\delta'' < x - x_0 < 0 \;\; \text{si ha } |f(x) - L| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sia $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$. Dalle due formule sopra si deduce quindi che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in D_f \; \text{tale che } 0 < |x - x_0| < \delta\,,$$

cioè la definizione (8.2.7) di limite. □

[1] Esercizio: verificarlo usando la Definizione 8.3.1.

Il Teorema 8.3.4 è particolarmente utile quando si devono studiare funzioni *definite a tratti*, e cioè del tipo

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < x_0, \\ f_2(x) & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

con f_1 e f_2 funzioni che, per fissare le idee, possiamo pensare definite su tutto $\mathbb{R}$, e delle quali sono noti i limiti $\lim_{x\to x_0} f_1(x)$ e $\lim_{x\to x_0} f_2(x)$. Allora, si ha che

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x)$$

e quindi $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste se e solo se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x)$.

8.4 Alcuni risultati sui limiti

L'algebra dei limiti. Introduciamo un importante risultato sul legame fra l'operazione di limite e le operazioni algebriche sulle funzioni.

Teorema 8.4.1. *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, $c, L, M \in \mathbb{R}$, e $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M\,.$$

Allora, si ha che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + M\,,\\
&\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to x_0} g(x)\big) = L\cdot M\,,\\
&\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x) = cL\,,\\
&\textit{se } M \neq 0, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}\,,\\
&\lim_{x\to x_0} (f(x))^{m/n} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{m/n} = L^{m/n} \quad \textit{se} \quad \begin{cases} L \geq 0 & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ pari},\\ \forall\, L \in \mathbb{R} & \textit{nel caso } m \geq 0 \textit{ e } n \textit{ dispari},\\ L > 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ pari},\\ \forall\, L \neq 0 & \textit{nel caso } m < 0 \textit{ e } n \textit{ dispari}.\end{cases}
\end{aligned}$$

♣ I risultati enunciati nel Teorema 8.4.1 si adattano con ovvie modifiche al caso in cui a $\lim_{x\to x_0}$ si sostituisca sistematicamente $\lim_{x\to x_0^+}$, oppure, sistematicamente, $\lim_{x\to x_0^-}$. Questi risultati si estenderanno anche al caso di limiti (finiti) all'infinito.

Limiti delle funzioni elementari. Diamo, senza dimostrazione, i seguenti limiti:

Sia $f(x) := x^r$, con $r \in \mathbb{R}$: $\forall\, x_0 \in D_f \quad \lim_{x\to x_0} x^r = x_0^r\,,$

Sia $f(x) := a^x$, con $a > 0$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\,,$

Sia $f(x) := \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$: $\forall\, x_0 \in (0, +\infty) \quad \lim_{x\to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0)\,,$

Siano $f(x) := \sin(x)$ e $g(x) := \cos(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \;$ e $\; \lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)\,,$

Sia $f(x) := \tan(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \lim_{x\to x_0} \tan(x) = \tan(x_0)\,,$

Siano $f(x) := \arcsin(x)$ e $g(x) := \arccos(x)$:
$\forall\, x_0 \in (-1, 1) \quad \lim_{x\to x_0} \arcsin(x) = \arcsin(x_0) \;$ e $\; \lim_{x\to x_0} \arccos(x) = \arccos(x_0)\,,$

Inoltre, $\lim_{x\to -1^+} \arcsin(x) = \arcsin(-1), \qquad \lim_{x\to -1^+} \arccos(x) = \arccos(-1),$

e $\lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \arcsin(1), \qquad \lim_{x\to 1^-} \arccos(x) = \arccos(1).$

Sia $f(x) := \arctan(x)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} \arctan(x) = \arctan(x_0)\,.$

Esempio 8.4.2. Ricordando i limiti (8.2.8)–(8.2.10) e applicando il Teorema 8.4.1, possiamo calcolare

$$\lim_{x\to 2} \left(3x^2 + 5x + \frac{x^2}{x+2}\right) = 3\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 5 \lim_{x\to 2} x + \frac{(\lim_{x\to 2} x)^2}{\lim_{x\to 2} x + 2} = 23\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x-1} - 2\sqrt{4-x}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} x - 1} - 2\sqrt{4 - \lim_{x\to 0^+} x} = -5\,.$$

In generale, abbiamo che

- Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale, della forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Allora
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0\,. \tag{8.4.1}$$

- Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione razionale fratta, della forma $f = P/Q$, con $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni polinomiali. Allora
$$\forall\, x_0 \in D_f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, Q(x) \neq 0\} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\,. \tag{8.4.2}$$

Abbiamo pertanto
$$\lim_{x\to 2} (x^4 - 2x + \pi) = 12 + \pi\,,$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+3}{x-5} = -6\,.$$

8.5 Definizione di $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Premettiamo che ai fini dello sviluppo della teoria dei limiti per $x \to \pm\infty$ sarà utile estendere la nozione di intorno di un punto al caso in cui tale punto (della retta reale estesa) sia $+\infty$ o $-\infty$:

- se $x_0 = +\infty$, per intorno aperto (chiuso) di $+\infty$ si intende una semiretta $(a, +\infty)$ ($[a, +\infty)$, risp.) illimitata a destra;
- se $x_0 = -\infty$, per intorno aperto (chiuso) di $-\infty$ si intende una semiretta $(-\infty, a)$ ($(-\infty, a]$, risp.) illimitata a sinistra.

Possedendo la nozione di intorno di $\pm\infty$, è facile ora dare significato alla proprietà che $\pm\infty$ sia un punto di accumulazione per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

Limiti finiti all'infinito

Introduciamo ora una nozione di limite che descriva il comportamento di una funzione f, definita su una semiretta $(a, +\infty)$ o $(-\infty, a)$, o su $\mathbb{R}$, tale che f assume valori $f(x)$ *arbitrariamente vicini* a $L \in \mathbb{R}$ (cioè f tende al limite finito L), quando x assume valori sufficientemente grandi in valore assoluto, positivi (useremo la locuzione *al tendere di x a* $+\infty$), o negativi (cioè *al tendere di x a* $-\infty$). In questo contesto, useremo le notazioni

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \,. \tag{8.5.1}$$

Nel seguito, useremo la notazione $x \to \pm\infty$ per indicare che x tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Per esempio, esaminando il grafico delle funzioni elementari si vede subito che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \,,$$

e, in generale, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^m} = 0 \,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^m} = 0 \,,$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \,,$$

$$\forall\, a > 1 \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \,,$$

$$\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \,.$$

Diamo ora le definizioni rigorose dei limiti (8.5.1).

Definizione 8.5.1. *Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Diciamo che f* tende al limite *L* per *x* tendente *a $+\infty$ (e scriviamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ o $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$) se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, R \in \mathbb{R} : \ \ \forall\, x \in D_f \ \text{ con } x > R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon \,. \tag{8.5.2}$$

Analogamente, diciamo che $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ tende al limite *L* per *x* tendente a *$-\infty$ se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, R \in \mathbb{R} : \ \ \forall\, x \in D_f \ \text{ con } x < R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon \,. \tag{8.5.3}$$

Osservazione 8.5.2. Osserviamo che nella definizione (8.5.2) avremmo potuto richiedere, equivalentemente, che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, R > 0 : \ \ \forall\, x \in D_f \text{ con } x > R \text{ si ha } |f(x) - L| < \varepsilon$$

visto che, in effetti, stiamo considerando il caso in cui $x \to +\infty$, e quindi x assumerà valori definitivamente positivi. Inoltre, pur di prendere $R > a$ si può omettere di specificare "$\forall\, x \in D_f$". Analogamente, nella (8.5.3) avremmo potuto equivalentemente richiedere che esista $R < 0$, e che $R < a$ (si ricordi che f è definita su $(-\infty, a)$).

Esempio 8.5.3. Usando la definizione, verifichiamo[2] che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Fissiamo allora $\varepsilon > 0$: dobbiamo determinare $R > 0$ tale che

$$\forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \ \text{ con } \ x > R \ \text{ si ha}$$

$$\left| \frac{x+1}{x-1} - 1 \right| = \frac{2}{|x-1|} < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ |x-1| > \frac{2}{\varepsilon} \ \Leftrightarrow \ x > 1 + \frac{2}{\varepsilon} \ \text{o} x < 1 - \frac{2}{\varepsilon} \,.$$

Scegliamo allora $R \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

[2]**Esercizio!**: ragionando allo stesso modo, verificare che $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$.

Limiti all'infinito di funzioni razionali fratte (I). Quanto visto nell'Esempio 8.5.3 è tipico del comportamento all'infinito delle funzioni razionali fratte. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione razionale fratta, della forma $f = P/Q$, con $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni polinomiali, con $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \end{cases}. \tag{8.5.4}$$

Il caso in cui $n > m$ sarà considerato nella Sezione 8.5, alla quale rimandiamo per la dimostrazione della (8.5.4).

Asintoti orizzontali. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $y = L$ per $x \to +\infty$: in questo caso, si dice che *la retta di equazione $y = L$ è un asintoto orizzontale per* graf(f) *a* $+\infty$. Analogamente, se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, *la retta di equazione $y = L$ è un asintoto orizzontale per* graf(f) *a* $-\infty$.

Estensione dei risultati sui limiti. Il Teorema 8.4.1 sul rapporto fra limite e limiti unilateri si estende al caso di limiti finiti all'infinito sostituendo sistematicamente, nell'enunciato, al limite $\lim_{x\to x_0}$

Limiti infiniti per $x \to x_0$

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, punto di accumulazione per D_f. Vogliamo formalizzare il caso in cui f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente grandi in valore assoluto (positivi o negativi) per x sufficientemente vicino a x_0, escludendo il punto x_0*. Scriveremo, rispettivamente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,. \tag{8.5.5}$$

Nel seguito, useremo anche la notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ per indicare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Daremo anche le definizioni di limiti destri/sinistri uguali a $\pm\infty$. Ad esempio, si ha che

$$\begin{aligned}
&\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty\,,\\
&\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2k+1}} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2k+1}} = -\infty\,,\\
&\forall\, a > 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty\,,\\
&\forall\, a \in (0,1) \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Definizione 8.5.4. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Diciamo che f tende a $+\infty$ per x tendente a x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, o $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$), se*

$$\forall\, M > 0\ \ \exists\, \delta > 0 : \ \ \forall\, x \in D_f \ \text{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{si ha}\ f(x) > M\,. \tag{8.5.6}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a x_0 (e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, o $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$), se

$$\forall\, M > 0\ \ \exists\, \delta > 0 : \ \ \forall\, x \in D_f \ \text{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{si ha}\ f(x) < -M\,. \tag{8.5.7}$$

Esempio 8.5.5. Verifichiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$. Fissiamo $M > 0$: dobbiamo determinare $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \ \text{con}\ \ 0 < |x| < \delta \ \ \text{si ha}\ \ \frac{1}{x^4} > M \ \Leftrightarrow\ x^4 < \frac{1}{M} \ \Leftrightarrow\ |x| < \frac{1}{M^{1/4}}\,.$$

Allora, è sufficiente scegliere $\delta \leq \frac{1}{M^{1/4}}$.

Limiti unilateri infiniti. In modo analogo alla 8.5.4, si danno le definizioni dei limiti unilateri $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$: per esempio[3], diciamo che f ha limite sinistro $+\infty$ in x_0 se

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;:\;\; \forall\, x \in D_f \text{ con } -\delta < x - x_0 < 0 \text{ si ha } f(x) > M\,.$$

Il Teorema 8.3.4 si estende al caso di limiti infiniti per $x \to x_0$: per semplicità, lo enunciamo solo nel caso in cui il limite sia $+\infty$.

Teorema 8.5.6. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, e siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f.*

1. Allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\,.$$

2. Allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\,.$$

In particolare, se si ha che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \;\text{ e }\; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

(oppure che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$), allora **non esiste** il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Esempio 8.5.7. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, di dominio $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, **non ammette limite** per $x \to 0$: in effetti, in questo caso $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Allo stesso modo,

$$\begin{aligned}\forall\, m \in \mathbb{N},\ m \text{ dispari} \quad &\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^m}, \\ &\nexists \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x), \quad \nexists \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan(x).\end{aligned}$$

Asintoti verticali. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta verticale di equazione $x = x_0$ per x sufficientemente vicino a x_0: in questo caso, si dice che *la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto (eventualmente destro/sinistro, a seconda che si consideri un limite unilatero) verticale per* graf(f).

Limiti infiniti all'infinito

Infine, formalizziamo il caso in cui f *assume valori $f(x)$ arbitrariamente grandi in valore assoluto (positivi o negativi) quando x assume valori sufficientemente grandi in valore assoluto (positivi o negativi).* Daremo cioè le definizioni dei limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Per esempio, si ha che

$$\begin{aligned}&\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \text{ pari} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty\,,\\ &\forall\, m \in \mathbb{N},\ m \text{ dispari} \quad \lim_{x\to+\infty} x^m = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} x^m = -\infty\,,\\ &\forall\, a > 1 \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\,,\\ &\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty\,,\\ &\forall\, a > 1 \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty\,,\\ &\forall\, a \in (0,1) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty\,.\end{aligned}$$

[3]**Esercizio!**: dare le altre definizioni!

Osserviamo d'altra parte che

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)\,, \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)\,, \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \tan(x)\,.$$

Definizione 8.5.8. *Sia* $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$*. Diciamo che* f tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$*, o* $f(x)\to+\infty$ *per* $x\to+\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x>R \ \textit{si ha } f(x)>M\,. \tag{8.5.8}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$*, o* $f(x)\to-\infty$ *per* $x\to+\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x>R \ \textit{si ha } f(x)<-M\,. \tag{8.5.9}$$

Diciamo che f tende a $+\infty$ per x tendente a $-\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$*, o* $f(x)\to+\infty$ *per* $x\to-\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x<R \ \textit{si ha } f(x)>M\,. \tag{8.5.10}$$

Diciamo che f tende a $-\infty$ per x tendente a $-\infty$ *(e scriviamo* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$*, o* $f(x)\to-\infty$ *per* $x\to-\infty$*), se*

$$\forall\, M>0 \ \ \exists\, R\in\mathbb{R}: \ \ \forall\, x\in D_f \ \textit{con } x<R \ \textit{si ha } f(x)<-M\,. \tag{8.5.11}$$

Sulla scelta di R nelle formule (8.5.8)–(8.5.9) valgono le stesse considerazioni sviluppate dopo la Definizione 8.5.1.

Asintoti obliqui. Introdurremo la nozione di asintoto obliquo (che fornisce delle informazioni più precise sul comportamento di funzioni che, all'infinito, tendono a $+\infty$ o a $-\infty$) solo nel caso di limiti a $+\infty$; le definizioni e i risultati che daremo si estendono in modo immediato al caso di limiti a $-\infty$.

Definizione 8.5.9. *Sia* $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *e supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$*, o che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$*. Diciamo che la retta di equazione* $y=mx+q$*, con* $m,\, q\in\mathbb{R}$ *e* $m\neq 0$*, è un* asintoto obliquo *per* $\mathrm{graf}(f)$ *per* $x\to+\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx-q)=0\,.$$

Graficamente, questo significa che il grafico di f si avvicina arbitrariamente retta $y=mx+q$ per x sufficientemente grande. Chiaramente, si avrà $m>0$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $m<0$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Osserviamo che non sempre una funzione che tende a $\pm\infty$ per $x\to+\infty$ ammette un asintoto obliquo. Per esempio, per ogni $a>1$ la funzione esponenziale $f(x)=a^x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ non ammette alcun asintoto obliquo per $x\to+\infty$: intuitivamente, questo accade perché per $x\to+\infty$ la funzione esponenziale tende a $+\infty$ più velocemente di qualsiasi funzione potenza.

Diamo ora delle condizioni <u>necessarie e sufficienti</u> per l'esistenza di un asintoto obliquo.

Teorema 8.5.10. *Sia* $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *e supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$*, oppure che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$*. Allora, la retta* $y=mx+q$ *(*$m\neq 0$*) è un asintoto obliquo per* $\mathrm{graf}(f)$ *per* $x\to+\infty$ *se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=m\neq 0\,,\\ &\exists \lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-mx\big)=q\,. \end{aligned}$$

Operativamente, data una funzione $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$, per la ricerca di un eventuale asintoto obliquo si procede in questo modo:

- si calcola $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$: se tale limite esiste, finito, ed è uguale a una costante m non nulla, allora m sarà il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo;
- si calcola $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$: se tale limite esiste ed è finito, allora il suo valore individua l'ordinata all'origine dell'asintoto obliquo.

Esempio 8.5.11. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{3}{4}x - \frac{\cos^2(x)}{e^x} + \arctan(x) - \frac{\sin(x)}{x} \qquad \forall\, x \neq 0\,.$$

Osserviamo che

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \cos^2(x)\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}\,, \\ \frac{\sin(x)}{x} = 0\,,\end{gathered} \tag{8.5.12}$$

ove il calcolo del primo limite è giustificato dal Corollario 8.8.7 che vedremo fra qualche pagina, in quanto la funzione $f_1(x) = \cos^2(x)$ è limitata su $\mathbb{R}$, mentre $f_2(x) = (1/e)^x$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Combinando i limiti in (8.5.12) con il fatto che $\frac{3}{4}x \to +\infty$ per $x \to +\infty$ e usando i risultati sull'estensione dell'algebra dei limiti del Teorema 8.6.1, concludiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Per verificare l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{xe^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{3}{4}\,,$$

in quanto gli ultimi tre limiti sono uguali a 0 ancora grazie al Corollario 8.8.7. Infine, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{3}{4}x\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{e^x} + \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Allora, grazie al Teorema 8.5.10 concludiamo che la retta $y = \frac{3}{4}x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per graf(f) per $x \to +\infty$. **Esercizio!**: dimostrare che la retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per graf(f) per $x \to -\infty$.

8.6 L'estensione dell'algebra dei limiti e la nozione di forma indeterminata

Come già anticipato nell'Esempio 8.5.11, vogliamo ora estendere alcuni dei risultati contenuti nel Teorema 8.4.1 al caso in cui almeno una delle funzioni f e g (che sommiamo/moltiplichiamo/dividiamo) tenda a un limite infinito.

♣ Per comodità, enunceremo il Teorema 8.6.1 nel caso di limiti per $x \to x_0$, ma anticipiamo che i risultati che daremo valgono anche nel caso in cui al limite $\lim_{x\to x_0}$ venga sistematicamente sostituito dal $\lim_{x\to x_0^+}$, oppure dal $\lim_{x\to x_0^-}$, oppure dal $\lim_{x\to+\infty}$, oppure dal $\lim_{x\to-\infty}$.

Teorema 8.6.1. *Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, e $L \in \mathbb{R}$. Si ha che:*

[Estensione del limite della somma:]

$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \textit{ allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \pm\infty\,;$$
$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \textit{ allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty\,;$$
$$\textit{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \textit{ allora } \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = -\infty\,;$$

[Estensione del limite del prodotto:]

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \pm\infty$$

$$(+\infty \text{ o } -\infty \text{ a seconda del segno di } f\cdot g)\,;$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = +\infty\,;$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = -\infty\,;$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = +\infty\,;$$

[Estensione del limite del quoziente:]

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0\,;$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$$

$$(+\infty \text{ o } -\infty \text{ a seconda del segno di } \frac{f}{g})\,;$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$$

$$(\text{a seconda del segno di } \frac{f}{g})\,.$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty, \text{ allora } \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

Questo risultato si può riassumere con il seguente schema:

$$\begin{gathered} L \pm \infty = \pm\infty\,, \\ +\infty + \infty = +\infty\,, \\ -\infty - \infty = -\infty \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} L \neq 0: \quad L\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\,, \\ (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,, \\ (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,, \\ (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \frac{L}{\pm\infty} = 0\,, \\ L\neq 0: \ \frac{L}{0} = \pm\infty\,, \\ \frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty\,, \end{gathered}$$

La nozione di forma indeterminata. I casi di mancata estensione dell'algebra dei limiti possono essere così schematizzati:

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad 0\cdot(\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0},$$

(si veda la (6.4.1a)), a cui **si aggiungono le forme indeterminate di tipo esponenziale della** (6.4.1b). Come già visto nel Capitolo 6, per ognuno di questi casi useremo la locuzione *forma indeterminata*. Ricordiamo (rimandando anche a quanto scritto nella Sezione 6.4), che questa espressione non significa che, nei casi qui sopra presentati, il limite non esista, o non sia possibile calcolarlo, ma semplicemente che non vi sono regole generali per dedurre il limite della somma/prodotto/quoziente delle funzioni f e g a partire dai limiti di f e g. Di fatto, tratteremo i diversi tipi di forme indeterminate con tecniche *ad hoc*. Ne presentiamo alcune; per i limiti all'infinito delle funzioni polinomiali e razionali fratte, l'idea di fondo coincide con quanto visto per le successioni (polinomiali e razionali fratte) nella Sez. 6.4.

Limiti all'infinito di funzioni polinomiali

Consideriamo la generica funzione polinomiale $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il limite $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ può dare luogo a una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, che trattiamo **raccogliendo il monomio in x di grado massimo** (cioè x^n):

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + 0 + \ldots + 0\,.
\end{aligned}
$$

Allora concludiamo che

$$
\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \pm\infty\,,
$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del fatto che x tenda a $+\infty$ o a $-\infty$, che n sia pari o dispari, e del segno di a_n). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il termine di grado massimo**.

Esempio 8.6.2. Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \left(-4x^3 + 5x^6 - 2x^7 + 3\right) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^7) = -\infty,\\
&\lim_{x\to-\infty} \left(3x^2 - 4x^4 - 6x^5 + 9x\right) = \lim_{x\to-\infty} (-6x^5) = +\infty.
\end{aligned}
$$

Limiti all'infinito di funzioni razionali fratte

Consideriamo la generica funzione razionale fratta

$$
f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \quad \forall\, x \in D_f\,.
$$

Il limite $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado massimo** (cioè x^n e x^m, rispettivamente):

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + b_{m-1}x^{-1} + \ldots + b_1 x^{-m+1} + b_0 x^{-m}\right)}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + 0 + \ldots + 0}{b_m x^m + 0 + \ldots + 0}
\end{aligned}
$$

Allora concludiamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & m > n, \\ \frac{a_n}{b_m} & m = n, \\ \pm\infty & m < n \end{cases}$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ per $x \to \pm\infty$). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado massimo al numeratore e il termine di grado massimo al denominatore**.

Esempio 8.6.3. Si hanno i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^7 - 5x}{5x^5 - 2x + 3x^6 - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^7}{3x^6} = -\frac{4}{3} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^7}{x^6} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x^4 + 5x - 3}{x^5 - 3x + 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^4}{x^5} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^4 - 5x^5 + 2x - 3x^2}{3x^3 - 6x^5 + 4x^4 - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^5}{-6x^5} = \frac{5}{6},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 2x^3 + 1 - \sin(x)}{4x^2 + x^3 - \arctan(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(3x^{-1} - 2 + x^{-3} - \frac{\sin(x)}{x^3})}{x^3(4x^{-1} + 1 - \frac{\arctan(x)}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2\,,$$

ove la prima uguaguaglianza nel secondo limite segue dal fatto che $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}$.

Limiti per $x \to 0$ di funzioni razionali fratte

Consideriamo una funzione razionale fratta data dal quoziente di due polinomi omogenei (cioè con termine noto nullo):

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x} \quad \forall\, x \in D_f\,.$$

Il limite $\lim_{x\to 0} P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $0/0$, che trattiamo **raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado minimo.**

Per esempio, supponiamo che $a_1 \neq 0$ e che $b_1 = 0$, ma $b_2 \neq 0$. Allora il termine di grado minimo al numeratore è x, mentre al denominatore è x^2: in questo modo abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \big(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1\big)}{x^2 \cdot (b_m x^{m-2} + b_{m-1}x^{m-3} + \ldots + b_2)}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{a_1 x + 0 + \ldots + 0}{b_2 x^2 + 0 + \ldots + 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty\,,$$

ove avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente a_1/b_2. Allo stesso modo si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty \quad \text{a seconda del segno di } \frac{a_1}{b_2},$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a_1}{b_2}\frac{1}{x} = \pm\infty \quad \text{NON esiste.}$$

In generale, possiamo dare la seguente regola: siano

$$\bar{i} \text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } P(x),$$
$$\bar{j} \text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } Q(x).$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^\pm} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x} \\
&= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{a_{\bar{i}} x^{\bar{i}}}{b_{\bar{j}} x^{\bar{j}}} = \begin{cases} 0 & \text{nel caso } \bar{i} > \bar{j}, \\ \frac{a_{\bar{i}}}{b_{\bar{j}}} & \text{nel caso } \bar{i} = \bar{j}, \\ \pm\infty, \text{ oppure non esiste se si ha } \lim_{x\to 0} & \text{nel caso } \bar{i} < \bar{j} \end{cases}
\end{aligned}$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente P/Q). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado minimo al numeratore e il termine di grado minimo al denominatore.**

Esempio 8.6.4. Si ha quindi che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{4x^5 - 3x^4 + 3x^3}{-6x^7 + 7x^8 - 2x^2} = 0, \\
&\lim_{x\to 0} \frac{5x^5 - 3x^2 + 3x}{x^6 - 2x + 3x^2} = -\frac{3}{2}, \\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^3 - 6x^6 + 2x}{5x^5 - 3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{-3x^3} = -\frac{2}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = -\infty\,.
\end{aligned}$$

8.7 Confronti asintotici

Ancora sulle forme indeterminate di tipo quoziente

Vediamo innanzitutto un semplice trucco con il quale ricondurre, a forme indeterminate di tipo quoziente, le forme indeterminate di tipo *esponenziale*

$$(+\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

(cf. la (6.4.1b)), che si presentano quanto si calcola il limite (per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, o per $x \to \pm\infty$, per questo useremo volutamente la notazione imprecisa lim)

$$\lim f(x)^{g(x)} \text{ e } \quad \begin{cases} \lim f(x) = +\infty & \text{con } \lim g(x) = 0, \\ \lim f(x) = 0 & \text{con } \lim g(x) = 0, \\ \lim f(x) = 1 & \text{con } \lim g(x) = \pm\infty \end{cases}$$

(si sottintende, qui, che la funzione $f(x)$, base di una potenza ad esponente reale, sarà strettamente positiva). L'idea è di usare la fondamentale identità

$$f(x)^{g(x)} = \exp(\ln(f(x)^{g(x)})) = \exp(g(x)\ln(f(x)))\,,$$

tramite la quale tuttte le f.i. $(+\infty)^0$, 0^0, e 1^∞ si riconducono all'unica f.i. $0 \cdot \infty$ nell'argomento dell'esponenziale.

A sua volta, la f.i. di tipo prodotto si riconduce a una f.i. quoziente $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ tramite una di queste trasformazioni

$$\text{riscrivo } f(x)g(x) \text{ come } \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ o come } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\,.$$

Quindi, parafrasando un noto detto, si osserva che *tutte le strade portano a una forma indeterminata di tipo quoziente* $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. In questa sezione sviluppiamo una teoria che fornisce **metodi efficienti per affrontare f.i. di tipo** $\frac{0}{0}$.

Il simbolo $\mathrm{o}(\cdot)$

Introduciamo una *relazione* fra funzioni.

Definizione 8.7.1. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, e supponiamo che $g(x) \neq 0$ in tale intorno di x_0 (salvo, eventualmente, che nel punto x_0). Diciamo che *f è trascurabile rispetto a g per x tendente a x_0* se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

In tal caso scriviamo

$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \qquad \text{per } x \to x_0 \tag{8.7.1}$$

(si dice "f è o piccolo di g per x tendente a x_0").

In particolare, la notazione

$$f(x) = \mathrm{o}(1) \qquad \text{per } x \to x_0 \tag{8.7.2}$$

significherà, semplicemente, che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Si noti che, per unificare la definizione nel caso di limiti 'al finito' e 'all'infinito', abbiamo supposto che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Ricordiamo che, se $x_0 \in \mathbb{R}$, la locuzione 'intorno di x_0' ha il significato usuale; se $x_0 = +\infty$, per intorno (aperto) di $+\infty$ si intende una semiretta $(a, +\infty)$ illimitata a destra; se $x_0 = -\infty$, per intorno (aperto) di $-\infty$ si intende una semiretta $(-\infty, a)$ illimitata a sinistra. La richiesta che g non si annulli serve, naturalmente, a dare senso al quoziente $\frac{f}{g}$; al solito non chiediamo nulla al comportamento di g nel punto x_0.

Per lo più, useremo il simbolo di o piccolo nel caso in cui ciascuna delle funzioni f e g è infinitesima per $x \to x_0$, e siamo quindi in presenza di una f.i. di tipo $\frac{0}{0}$, oppure nel caso in cui ciascuna delle funzioni f e g tende all'infinito per $x \to x_0$, e siamo quindi in presenza di una f.i. di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La relazione di o piccolo esprime quindi un confronto fra le velocità con cui le due funzioni f e g tendono a zero, o all'infinito.

Definizione 8.7.2. *Nelle condizioni della Definizione 8.7.1, supponiamo inoltre che entrambe le funzioni f e g siano infinitesime per x tendente a $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Se f è trascurabile rispetto a g per x tendente a x_0, diciamo anche che f* è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g per x tendente a x_0*.*

Gli esempi seguenti sono da *studiare*, anche perché saranno di fondamentale importanza operativa per gli esercizi sul calcolo dei limiti.

Esempio 8.7.3.

1. Si ha che
$$x^4 = \mathrm{o}(x^2) \quad \text{per } x \to 0,$$
poiché $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = 0$. Si noti che entrambe le funzioni sono infinitesime per $x \to 0$: ebbene, stiamo affermando che x^4 è un infinitesimo di ordine superiore a x^2 per $x \to 0$ (cioè, per $x \to 0$ x^4 tende a zero più velocemente di x^2).

2. Si ha che
$$x^3 = \mathrm{o}(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$
Anche questo è evidentemente vero: x^3 è un infinitesimo di ordine superiore a x^2 per $x \to 0$.

3. Si ha che
$$\boxed{\forall\, \alpha > 0\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad x^\alpha = \mathrm{o}(e^{\varepsilon x}) \text{ per } x \to +\infty}$$
Vediamo un'importante ricaduta di questa affermazione, che non dimostriamo (potremo farlo solo dopo aver dato il Teorema di De L'Hôpital). Per $x \to +\infty$, le funzioni x^α e $e^{\varepsilon x}$ tendono a entrambe a $+\infty$, quindi il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\varepsilon x}}$ è, a priori, una f.i. di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Ebbene, stiamo affermando che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\varepsilon x}} = 0.$$

In altri termini, per $x \to +\infty$ la funzione x^α tende a $+\infty$ più lentamente di $e^{\varepsilon x}$, e quindi l'infinito di $e^{\varepsilon x}$ al denominatore 'vince', e manda a zero la frazione. Si noti che ciò è vero per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ (ed è significativo pensare che possiamo prendere α 'molto grande' ed ε 'molto piccolo').

4. Si ha che
$$\boxed{\forall\, \alpha > 0 \; \forall\, \varepsilon > 0 \quad e^{\varepsilon x} = \mathrm{o}(|x|^{-\alpha}) \text{ per } x \to -\infty}$$
cioè
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\varepsilon x}}{|x|^{-\alpha}} = 0.$$
Entrambe le funzioni $e^{\varepsilon x}$ e $|x|^{-\alpha}$ sono infinitesime per $x \to -\infty$, ma l'infinitesimo esponenziale al numeratore è 'più forte', e manda tutta la frazione a zero. Si noti che la f.i. di tipo quoziente può essere riscritta come una f.i. di tipo prodotto, ottenendo che
$$\lim_{x \to -\infty} e^{\varepsilon x} \cdot |x|^\alpha = 0$$
e si ha un'analoga interpretazione: fra l'infinitesimo di $e^{\varepsilon x}$ e l'infinito di $|x|^\alpha$, per $x \to -\infty$, vince il primo, e manda il prodotto a zero.

5. Si ha che
$$\boxed{\forall\, \alpha > 0 \; \forall\, \varepsilon > 0 \quad (\ln(x))^\alpha = \mathrm{o}(x^\varepsilon) \text{ per } x \to +\infty}$$
Entrambe le funzioni $(\ln(x))^\alpha$ e x^ε tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$, ma
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\varepsilon} = 0$$
infatti $(\ln(x))^\alpha$ tende all'infinito più lentamente di come ci tende x^ε, e quindi l'infinito al denominatore vince su quello al numeratore, e manda tutta la frazione a zero.

6. Si ha che
$$\boxed{\forall\, \alpha > 0 \; \forall\, \varepsilon > 0 \quad |\ln(x)|^\alpha = \mathrm{o}(x^{-\varepsilon}) \text{ per } x \to 0^+}$$
cioè
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x \to 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\varepsilon = 0$$
Vediamo l'interpretazione del fatto che $\lim_{x\to 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\varepsilon = 0$: per $x \to 0^+$, la funzione $|\ln(x)|^\alpha$ tende a $+\infty$ più lentamente di quanto x^ε tende a zero. Vince quindi l'infinitesimo di x^ε, e il prodotto tende a zero.

Segnaliamo altre proprietà del simbolo di o piccolo:

- La notazione
$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$
è *inscindibile*: in effetti, la notazione di o piccolo è legata ad un limite, e bisogna specificare, quindi, a cosa tende x in questo limite!

- L'uguaglianza che compare nella notazione di o piccolo non ha le normali proprietà del simbolo di uguaglianza: per esempio
$$\big[f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \text{ e } h(x) = \mathrm{o}(g(x)) \text{ per } x \to x_0\big] \quad \text{NON implica} \quad f(x) = h(x).$$
Si ha infatti che $x^4 = \mathrm{o}(x^2)$ e $x^3 = \mathrm{o}(x^2)$ per $x \to 0$, ma $x^4 \neq x^3$!

- Un'uguaglianza contenente simboli di o piccolo è in realtà un'implicazione. Lo si evince anche dalle regole che presentiamo di seguito.

L'"algebra" del simbolo di o piccolo. Enunciamo il prossimo risultato senza precisare bene le ipotesi: f e g saranno due funzioni definite in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e, quando servirà (cioè, nel caso di una sua comparsa al denominatore) supporremo che $g(x) \neq 0$ nello stesso intorno di x_0.

Proposizione 8.7.4. *Si ha che*

- $k\mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$ *per* $x \to x_0$

- $\mathrm{o}(f) + \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$ *per* $x \to x_0$

- $\mathrm{o}(\mathrm{o}(f)) = \mathrm{o}(f)$ *per* $x \to x_0$

- $\mathrm{o}(f + \mathrm{o}(f)) = \mathrm{o}(f)$ *per* $x \to x_0$

- $f \cdot \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(fg)$ *per* $x \to x_0$

- $\mathrm{o}(f) \cdot \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(fg)$ *per* $x \to x_0$

- $f = \mathrm{o}(g) \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{o}(f)}{g} = \mathrm{o}(\dfrac{f}{g})$ *per* $x \to x_0$.

La dimostrazione di questo risultato verrà tralasciata: essa è una facile conseguenza della definizione di o piccolo e dell'algebra dei limiti. Ci preme invece ribadire che molte delle uguaglianze enunciate devono essere intese come implicazioni. Per esempio, $\mathrm{o}(f) + \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$ *per* $x \to x_0$ significa: "se sommo due funzioni trascurabili rispetto a f per $x \to x_0$, ottengo una funzione trascurabile rispetto a f" per $x \to x_0$, per esempio

$$x^4 + x^3 = \mathrm{o}(x^2) + \mathrm{o}(x^2) = \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Analogamente, $\mathrm{o}(\mathrm{o}(f)) = \mathrm{o}(f)$ *per* $x \to x_0$ significa: "se una funzione è trascurabile rispetto a una funzione che è a sua volta trascurabile rispetto a f per $x \to x_0$, allora essa trascurabile rispetto a f (sempre per $x \to x_0$)".

Infinitesimi dello stesso ordine

Introduciamo una seconda relazione fra funzioni. Si tratta, questa volta, di una *relazione d'equivalenza.*

Definizione 8.7.5. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, e supponiamo che $g(x) \neq 0$ in tale intorno di x_0 (salvo, eventualmente, che nel punto x_0). Diciamo che f *è equivalente a* g *per* x *tendente a* x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

In tal caso scriviamo

$$f(x) \sim g(x) \qquad \text{per } x \to x_0. \tag{8.7.3}$$

In particolare, se entrambe le funzioni f e g sono infinitesime per $x \to x_0$ e se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, allora diremo che f e g sono *infinitesimi dello stesso ordine per* x *tendente a* x_0. Più in generale, diremo che f e g sono infinitesimi dello stesso ordine (e useremo ancora il simbolo $\sim$) nel caso in cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Abbiamo per esempio che

$$\sin(x) \sim x \qquad \text{per } x \to 0, \qquad \text{infatti si ha} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \tag{8.7.4}$$

$$1-\cos(x) \sim x^2 \qquad \text{per } x \to 0, \qquad \text{infatti si ha} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \tag{8.7.5}$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad \text{per } x \to 0, \qquad \text{infatti si ha} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1\,, \tag{8.7.6}$$

$$\ln(1+x) \sim x \qquad \text{per } x \to 0, \qquad \text{infatti si ha} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \tag{8.7.7}$$

$$\arctan(x) \sim x \qquad \text{per } x \to 0, \qquad \text{infatti si ha} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1\,. \tag{8.7.8}$$

Come vedremo, anche questi limiti possono essere dimostrati usando il *Teorema di De l'Hôpital* dato nella Sezione 10.7. Per il momento, accettiamoli come limiti notevoli: memorizzare queste formule sarà utile per lo svolgimento degli esercizi.

8.8 Ulteriori risultati sui limiti

In questa sezione illustriamo come molti dei risultati relativi ai limiti di successione si estendono ai limiti di funzione.

♣ Per tutti i risultati che seguono, si possono facilmente enunciare gli analoghi per il limite destro/sinistro.

Iniziamo con l'analogo del teorema di limitatezza per successioni convergenti (cioè, il Teorema 6.2.15). Premettiamo la seguente

Definizione 8.8.1. *Una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$ si dice limitata se*

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in D_f \qquad |f(x)| \leq M.$$

Nell'enunciato che segue, x_0 è un punto della retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$ (il lettore quindi ricordi che cosa significa intorno di $\pm\infty$); si noti che, anche nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$, la limitatezza di f viene dimostrata in $I \cap D_f \setminus \{x_0\}$: questo perché l'esistenza e la finitezza del limite per $x \to x_0$ non dicono nulla sul comportamento di f nel punto x_0. È ancor più importante precisare che si tratta si un risultato *locale*: si dimostra la limitatezza in un intorno di x_0, non in tutto il dominio della funzione!

Teorema 8.8.2 (Teorema di limitatezza locale)**.** *Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Allora esiste un intorno I di x_0 tale che f è limitata in $I \cap D_f \setminus \{x_0\}$.*

Ribadiamo che la proprietà di limitatezza garantita dal Teorema 8.8.2 non vale su tutto il dominio della funzione: per esempio, la funzione $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, localmente limitata (cioè limitata in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$), ma non è limitata su $\mathbb{R}$, visto che $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.

La dimostrazione del Teorema 8.8.2 è una immediata conseguenza della definizione di limite, e viene quindi lasciata al lettore.

Vediamo ora le controparti dei risultati della Sezione 6.5, relativi al rapporto fra la nozione di limite e la relazione d'ordine.

Teorema 8.8.3 (Teorema del confronto)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che f e g ammettano limite per $x \to x_0$ e che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$. Allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Non vale invece un risultato di confronto stretto, cioè la relazione $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in A\setminus\{x_0\}$ non implica la disuguaglianza stretta fra i limiti: per esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad : \quad \text{si ha che} \quad f(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \text{ ma } \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$

Anche la dimostrazione del Teorema 8.8.3 deriva immediatamente dalla definizione di limite, così come accade per il

Teorema 8.8.4 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. *Se* $\lim_{x\to x_o} f(x) = L \in (0, +\infty]$*, allora*

$$\textit{esiste } I \textit{ intorno di } x_0 \textit{ tale che } f(x) > 0 \;\forall x \in I \setminus \{x_0\} \cap D_f.$$

Si ha un enunciato perfettamente analogo nel caso $L \in [-\infty, 0)$.

Diamo infine, sempre senza dimostrazione, il

Teorema 8.8.5 (Teorema dei due carabinieri)**.** *Siano* f, g, $h : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione per* A, $L \in \overline{\mathbb{R}}$*, e sia* I *un intorno di* x_0. *Supponiamo che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\}\,, \tag{8.8.1}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L\,. \tag{8.8.2}$$

Allora

$$\textit{esiste il } \lim_{x\to x_0} g(x), \textit{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Questo teorema ha un'immediata interpretazione grafica: grazie alla (8.8.1), il grafico di g è compreso fra i grafici di f e di h (i "due carabinieri"): si vede subito, allora, che se per $x \to x_0$ f e h tendono a L, anche g è forzata a tendere a L. Si noti che, nell'ipotesi (8.8.1), si richiede che valga $f \leq g \leq h$ solo in un intorno del punto x_0 (cioè "vicino" a x_0), **tranne che nel punto** x_0, e non in tutto il dominio D; inoltre, nella tesi viene in particolare affermato che esiste $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

Vediamo alcune applicazioni di questo risultato.

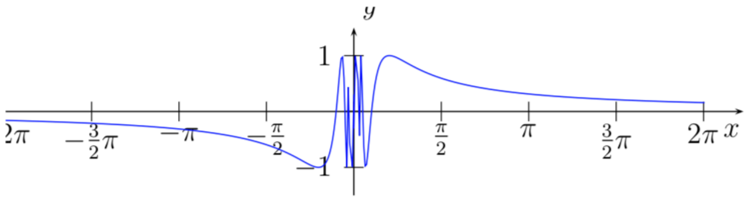
Esempio 8.8.6. 1. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $-|x| \leq g(x) \leq x^4$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora, notando che $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$, concludiamo che esiste $\lim_{x\to 0} g(x)$ e che tale limite è uguale a 0.

2. Si ha che

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,. \tag{8.8.3}$$

Innanzitutto osserviamo che, a priori, non è neppure chiaro che tale limite esista: infatti, esiste il limite $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, ma

$$\nexists \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,. \tag{8.8.4}$$



Per vedere ciò, osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1\,, \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) = -1\,.$$

Prendendo valori sempre più grandi (in modulo) di $k \in \mathbb{Z}$, vediamo che la funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla sempre più velocemente fra i valori 1 e -1. Quindi non è possibile applicare la regola sul limite del prodotto fra due funzioni (si veda il punto 2. del Teorema 8.4.1) alla funzione prodotto $g(x) := x^2 \sin(1/x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D'altra parte, osserviamo che $-1 \le \sin(1/x) \le 1$ per ogni $x \neq 0$: allora

$$-x^2 \le x^2 \sin(1/x) \le x^2 \quad \forall\, x \neq 0\,,$$

quindi, applicando il Teorema dei due carabinieri concludiamo la (8.8.3).

Infine, enunciamo un corollario del Teorema dei due carabinieri che generalizza quanto visto nell'Esempio 8.8.6(2) (si confronti questo enunciato con quello del Corollario 6.5.6).

Corollario 8.8.7. *Siano f, $g : D \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per D, e sia I un intorno di x_0. Supponiamo che:*

- *f sia limitata in $I \setminus \{x_0\}$, cioè esista $K > 0$ tale che*

$$|f(x)| \le K \qquad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\} \cap D\,,$$

- $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Allora esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

In altri termini, questo risultato afferma che il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è una funzione infinitesima. Per esempio, da questo risultato segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^3} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\sin(x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\sin(x)\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0\,.$$

Caratterizzazione del limite in termini dei limiti di successioni

Diamo ora un risultato che lega il limite di una funzione al comportamento di opportune successioni.

Teorema 8.8.8. *Siano dati $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{8.8.5}$$

se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $A \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L. \tag{8.8.6}$$

Si noti che la caratterizzazione del limite (8.8.5) viene data in termini di successioni convergenti a x_0 e verificanti $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: questo riflette il fatto che l'operazione $\lim_{x \to x_0}$ non fornisce informazioni sul, né dipende dal, comportamento di f nel punto x_0.
Dimostrazione. Per fissare le idee, ci limitiamo a discutere il caso $\boxed{L \in \mathbb{R}}$.[4]
Dimostriamo l'implicazione $\Longrightarrow$: supponiamo per ipotesi che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione a valori in $A \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0.

- Dalla (8.8.5) otteniamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \,:\, \forall x \in A \qquad 0 < |x - x_0| \leq \delta, \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

- Da $x_n \to x_0$ con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ otteniamo che

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists\, m > 0 \,:\, \forall n \geq m \qquad 0 < |x_n - x_0| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

- Per verificare la (8.8.6), fissiamo $\varepsilon > 0$ aribtrariamente, troviamo corrispondentemente $\delta > 0$, e ora scegliamo $\tilde{\varepsilon} = \delta$ nella definizione di convergenza per la $\{x_n\}$. Si ha quindi che

$$\exists\, m > 0 \,: \quad \forall n \geq m \qquad 0 < |x_n - x_0| \leq \delta \quad \text{da cui} \quad |f(x_n) - L| \leq \varepsilon\,.$$

  Abbiamo quindi dimostrato che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \,: \quad \forall n \geq m, \quad |f(x_n) - L| \leq \varepsilon, \tag{8.8.7}$$

  cioè la (8.8.6).

Dimostriamo l'implicazione $\Longleftarrow$: supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$ per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $A \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0 e dimostriamo la (8.8.5). Per assurdo la (8.8.5) non valga. Negando la definizione di limite si ha che

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists\, x \in A \,: 0 < |x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon.$$

Preso $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si trova così un punto $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| > \varepsilon$. La successione $\{x_n\}$ converge a x_0, ma non si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$ (poiché $|f(x_n) - L| > \varepsilon > 0$). Siamo quindi giunti ad un assurdo. □

Diamo ora due applicazioni del Teorema 8.8.8.

Esempio 8.8.9. In 'positivo', il Teor. 8.8.8 può essere usato per il calcolo dei limiti di certe successioni. Per esempio, sapendo che $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ deduciamo che per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e convergente a 0 si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1, \qquad \text{in particolare} \qquad \lim_{n \to \infty} n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = 1.$$

Il lettore è invitato a rileggere in questa luce i 'limiti notevoli' dati nella Sezione 8.7, cf. le (8.7.4)–(8.7.8).

[4] Il lettore può provare ad esaminare i casi $L = +\infty$ e $L = -\infty$.

Esempio 8.8.10. In 'negativo', il Teor. 8.8.8 può essere usato per dimostrare che una funzione non ha limite per x che tende a x_0: basterà determinare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ ambedue convergenti a x_0 e tali che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = L, \quad l \neq L.$$

Per esempio, vediamo immediatamente che

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin(x),$$

in quanto la successione $x_n = n\pi$ soddisfa $f(x_n) = \sin(n\pi) \equiv 0$, e quindi $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$, mentre la successione $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ soddisfa $f(y_n) \equiv 1$, e quindi $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$.

8.9 Limiti di funzioni monotone

In questa sezione diamo l'analogo, nel contesto della teoria dei limiti di funzioni, del Teorema fondamentale delle successioni monotone dimostrato nella Sez. 6.6. Premettiamo la definizione delle varie proprietà di monotonia di una funzione.

Definizione 8.9.1. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che:*

(i) f *è* monotona non decrescente[5] *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,; \tag{8.9.1}$$

(ii) f *è* monotona strettamente crescente *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,; \tag{8.9.2}$$

(iii) f *è* monotona non crescente[6] *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,; \tag{8.9.3}$$

(iv) f *è* monotona strettamente decrescente *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,. \tag{8.9.4}$$

Osservazione 8.9.2. - Si noti che ciascuna delle proprietà di monotonia introdotte ha *carattere globale*, in quanto le proprietà (8.9.1)–(8.9.4) devono valere per *ogni coppia di punti* $x_1,\, x_2 \in I$.

- È facile vedere che se $f : I \to \mathbb{R}$ è *strettamente monotona* (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente), allora f è iniettiva, quindi invertibile, su I.

- Chiaramente le proprietà di stretta monotonia implicano le proprietà di larga monotonia: una funzione strettamente crescente (risp., decrescente) è anche non decrescente (risp., non crescente). Non vale ovviamente il viceversa, si veda il seguente l'Esempio 8.9.3.

[5] in alcuni testi si usa la locuzione crescente
[6] in alcuni testi si usa la locuzione decrescente

Monotonia di alcune funzioni elementari

- Consideriamo le funzioni potenza a esponente naturale $f(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{N}$, di dominio $D_f = \mathbb{R}$. Allora:
  - se $k = 0$, si ha $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ogni funzione costante è sia monotona non decrescente, sia monotona non crescente[7];
  - se $k > 0$ e pari, f non ha alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma la restrizione di f a $(-\infty, 0)$ è strettamente decrescente, mentre la restrizione di f a $(0, +\infty)$ è strettamente crescente;
  - se $k > 0$ e dispari, f è strettamente crescente.
- Le funzioni sin e cos non hanno alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma possiedono infinite restrizioni monotone. Per esempio, la funzione sin è strettamente crescente su tutti gli intervalli $(-\pi/2 + 2m\pi, \pi/2 + 2m\pi)$, al variare di $m \in Z$, ed è strettamente decrescente su tutti gli intervalli $(\pi/2 + 2m\pi, 3\pi/2 + 2m\pi)$, al variare di $m \in Z$.
- La funzione tan non ha alcun tipo di monotonia su $\mathbb{R}$, ma possiede infinite restrizioni monotone. In effetti, la funzione tan è strettamente crescente su tutti gli intervalli $(-\pi/2 + m\pi, \pi/2 + m\pi)$, al variare di $m \in Z$.
- Per ogni $a > 1$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; per ogni $a \in (0, 1)$ la funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.
- Per ogni $a > 1$ la funzione logaritmica $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a(x)$ è strettamente crescente su $(0, +\infty)$; per ogni $a \in (0, 1)$ la funzione logaritmica $x \in (0, +\infty) \mapsto \log_a(x)$ è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$.

Esempio 8.9.3. La funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ x & x \in [0, 1]\,, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

è non decrescente su $\mathbb{R}$. Si osservi che f non è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. La funzione $g(x) := -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è non crescente (ma non strettamente decrescente) su $\mathbb{R}$.

Diamo ora, senza dimostrazione, il risultato corrispondente al Teorema fondamentale delle successioni monotone. Lo enunciamo per le funzioni non decrescenti; vale un risultato del tutto analogo (con l'estensione al caso $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$) nel caso di funzioni non crescenti.

Teorema 8.9.4 (Limiti di funzioni monotone)**.** *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un **punto di accumulazione** per D_f. Allora*

$$\boxed{\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$$

e si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D_f, \quad x < x_0\}, \\ &\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \operatorname{dom} f, \quad x > x_0\}. \end{aligned} \tag{8.9.5}$$

Nel caso in cui $x_0 = +\infty$ o $x = -\infty$ vale un risultato analogo, in cui il limite destro viene sostituito dal $\lim_{x\to+\infty}$ e quello sinistro dal $\lim_{x\to-\infty}$. Si noti che nella (8.9.5) l'inf e il sup vanno effettivamente calcolati con il vincolo della disuguaglianza stretta: ancora una volta, ciò riflette il fatto che l'operazione $\lim_{x\to x_0}$ non fornisce informazioni sul, né dipende dal, comportamento di f nel punto x_0.

---

[7] Le funzioni costanti sono le uniche funzioni ad avere entrambe le proprietà.

8.10 La nozione di continuità

Nelle sezioni precedenti abbiamo più volte sottolineato che l'operazione $\lim_{x\to x_0}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$, non fornisce alcuna informazione sul comportamento di f nel punto x_0: la funzione può essere definita, oppure no, nel punto x_0 e, nel caso in cui $x_0 \in D_f$, il valore del limite non ha alcun legame con il valore $f(x_0)$ assunto da f in x_0.

La nozione di funzione continua che ora andiamo a introdurre invece stabilisce un tale legame, come si vedrà nel Teorema 8.10.3. Iniziamo con la

Definizione 8.10.1. *Sia* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e sia* $\boxed{x_0 \in D_f}$. *Diciamo che* f è continua *in* x_0 *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \quad \forall\, x \in D_f \ \textit{tale che}\ 0 \le |x - x_0| < \delta \ \textit{si ha che}\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{8.10.1}$$

Se f *non è continua in* x_0*, diciamo che* f è discontinua *in* x_0 *(o che* f ha un punto di discontinuità in x_0*).*

Osservazione 8.10.2.

1. Notiamo che per dare senso alla definizione (8.10.1) è necessario che il punto x_0 appartenga al dominio D_f, cosicché si possa calcolare f in x_0). **Ci si pone dunque il problema della continuità di una funzione in un punto solo se tale punto vi appartiene**. In altri termini, non ha senso affermare che $f(x) = \frac{1}{x}$, con $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, non è continua in $x_0 = 0$: infatti, **non è sensato chiedersi se f sia continua in $x_0 = 0$, visto che $0 \notin D_f$!!** (Si veda anche l'Esempio 8.10.9)

   Sottolineiamo che con la (8.10.1) stiamo imponendo anche una condizione su f nel punto x_0, a differenza di quanto visto nella definizione di limite, ove il comportamento di f in x_0 è ininfluente.

2. Il significato della (8.10.1) è il seguente: f *assume* $f(x)$ *arbitrariamente vicini a* $f(x_0)$ *pur di prendere* x *sufficientemente vicino a* x_0 *(da entrambi i lati).*

Vediamo ora il legame fra continuità in x_0 e l'operazione di limite $\lim_{x\to x_0}$.

Teorema 8.10.3. *Sia* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e sia* <u>*x_0 un punto di accumulazione per D_f*</u>*, tale che* $\boxed{x_0 \in D_f}$. *Allora,*

$$f \textit{ è continua in } x_0 \textit{ se e solo se } \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{8.10.2}$$

La dimostrazione di questo risultato è omessa: essa segue da un facile confronto fra la (8.10.1) e la definizione (8.2.7) di $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Osservazione 8.10.4.

- Notiamo che, per dar senso alla (8.10.2), è necessario <u>sia</u> che x_0 sia un punto di accumulazione per D_f (in modo che abbia senso considerare il limite di f per $x \to x_0$), <u>sia</u> che $x_0 \in D_f$ (cosicché si possa calcolare f in x_0).

  Ricordiamo che non esistono legami fra il fatto che un punto x_0 sia di accumulazione per D_f e il fatto che $x_0 \in D_f$. Ad esempio,

  1. se $D_f = \{4\} \cup [5, 7]$, il punto $4 \in D_f$ non è di accumulazione per D_f;
  2. se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (come nel caso di $f(x) = \frac{1}{x}$), allora $0 \notin D_f$, ma 0 è un punto di accumulazione per D_f;
  3. se $D_f = I$ è un intervallo (limitato/illimitato, chiuso o semiaperto o aperto), si vede subito che per ogni $x \in I$, x è di accumulazione per I.

- Con la (8.10.2) stiamo richiedendo che valgano (contemporaneamente) queste tre condizioni:

  1. il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esista,
  2. il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ sia finito,
  3. il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ coincida con il valore della funzione in x_0.

  Come vedremo nella Sezione 8.12, la continuità di f in un punto x_0 (di accumulazione e appartenente a D_f) cade non appena cade una delle tre condizioni summenzionate.

Continuità nei punti isolati del dominio. Dimostreremo la seguente affermazione:
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ un punto non *di accumulazione per D_f, cioè un punto isolato di D_f. Allora f è continua in x_0.*
Lo dimostriamo per assurdo, negando la tesi, cioè negando la (8.10.1). Quindi,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ : \quad \forall\, \delta > 0 \ \ \exists\, x \in D_f \text{ tale che } 0 \leq |x - x_0| < \delta \ \text{ e } \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

Questa affermazione contiene già un assurdo: è la proposizione

$$\Big[\exists\, x \in D_f \text{ tale che } 0 \leq |x - x_0| < \delta\Big] \text{ che è equivalente a } \Big[\exists\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f \setminus \{x_0\}\Big].$$

Questo è assurdo perché abbiamo supposto che x_0 sia un punto *isolato* di D_f.

Quanto abbiamo appena visto suggerisce che, se $x_0 \in D_f$ non è di accumulazione per D_f, allora la proprietà che una funzione sia continua in x_0 non è particolarmente significativa: **ogni** funzione è continua in un qualsiasi punto isolato del proprio dominio! Per esempio, la funzione nella (8.2.6) è continua in $x_0 = 0$.

Ecco perché, 'for all intents and purposes', d'ora in poi lavoreremo con la continuità in punti del dominio che siano *anche* di accumulazione per il dominio: allora, vale la caratterizzazione (8.10.2).

Continuità 'unilatera'. Motivati dalle stesse considerazioni che ci hanno portato a introdurre i limiti unilateri, possiamo definire una nozione di continuità a destra/a sinistra di f in un punto $x_0 \in D_f$. In vista di quanto appena detto, confineremo la discussione al caso in cui x_0 sia anche punto di accomulazione per D_f, anche se la definizione si potrebbe dare, più in generale, in un qualsiasi punto $x_0 \in D_f$. Quindi la definizione di continuità a destra/sinistra che daremo sarà in termini dei limiti destro/sinistro.

Definizione 8.10.5. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Diciamo che f* è continua a destra in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\,. \tag{8.10.3}$$

Diciamo che f è continua a sinistra in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,. \tag{8.10.4}$$

Definizione 8.10.6. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia $A \subset D_f$. Diciamo che f* è continua in A *se f è continua (continua a destra/a sinistra, nei punti dove sia possibile calcolare solo limiti unilateri) in tutti i punti di A, e scriviamo $f \in \mathrm{C}^0(A)$.*

Esempio 8.10.7. Consideriamo le seguenti funzioni[8]:

$$f_1(x) := x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$f_2(x) := \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases},$$

$$f_3(x) := \begin{cases} x & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases},$$

$$f_4(x) := \begin{cases} x & x < 2 \\ 3 & x \geq 2 \end{cases}.$$

Si ha che $f_1 \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$; invece, f_2 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$, f non è né continua a destra, né continua a sinistra in 2; inoltre, f_3 è continua

[8] Esercizio!: disegnarne il grafico.

in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 = f(2)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, f non è continua a destra, ma è continua a sinistra in 2; infine, f_4 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e 2 è un punto di discontinuità: poiché $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 = f(2)$, f non è continua a sinistra, ma è continua a destra in 2.

Enunciamo ora un risultato sul legame fra la nozione di continuità e la continuità a destra/sinistra, che è analogo al Teorema 8.3.4 sul rapporto fra limite e limiti unilateri.

Teorema 8.10.8. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per D_f, tale che $x_0 \in D_f$. Supponiamo che esista $r > 0$ tale che l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D_f$*[9]*. Allora*

f è continua in x_0 se e solo se f è sia continua a destra, sia continua a sinistra in x_0.

La dimostrazione di questo risultato discende direttamente dalle Definizioni 8.10.1 e 8.10.5, e dal Teorema 3.2.13. In effetti,

$$\begin{gathered} f \text{ è continua in } x_0 \\ \Updownarrow \\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \\ \Updownarrow \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \\ \Updownarrow \\ f \text{ è continua a destra in } x_0 \quad \text{e} \quad f \text{ è continua a sinistra in } x_0. \end{gathered}$$

Esempio 8.10.9.

1. La funzione $f(x) := |x|$, con $D_f = \mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R}$: in effetti, essa è continua su $(0, +\infty)$ in quanto per $x > 0$ coincide con la funzione continua $g(x) = x$, e analogamente essa è continua su $(-\infty, 0)$ in quanto per $x < 0$ coincide con la funzione continua $h(x) = -x$. Infine, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$.
2. Consideriamo $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$, con $D_f = [-1, 1]$. Allora si verifica subito che f è continua in $(-1, 1)$. Agli estremi dell'intervallo si può solo considerare la continuità a destra/sinistra: ricordando l'Esempio 3.2.11, si conclude subito che f è sia continua a destra in -1, sia continua a sinistra in 1. Quindi $f \in \mathrm{C}^0([-1, 1])$.
3. Consideriamo la *funzione di Heaviside*
$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0\,, \\ 1 & x \geq 0\,. \end{cases} \tag{8.10.5}$$
Si vede subito che $H \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, mentre H è continua a destra, ma non a sinistra in $x_0 = 0$: allora, per il Teorema 8.10.8, H è discontinua in 0. Siccome
$$\nexists \lim_{x\to 0} H(x),$$
comunque si ridefinisca la funzione H in $x = 0$, non vi è modo di ottenere una funzione continua.
4. Consideriamo le funzioni
$$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ -1 & x < 0\,, \end{cases} \qquad \mathrm{sign}_0(x) := \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \\ -1 & x < 0\,. \end{cases}$$

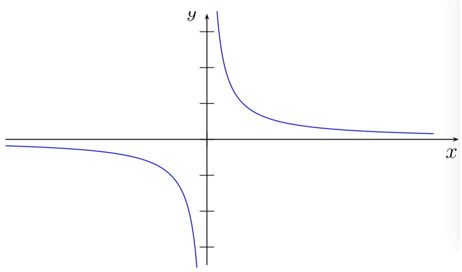
[9] stiamo cioè richiedendo che x_0 sia *interno* a D_f; questo ovviamente ci permette di parlare sia di continuità a destra, sia di continuità a sinistra.

Si ha che sign è continua in dom(sign) $= \mathbb{R} \setminus \{0\} =:$ poiché $0 \notin$ dom(sign), non ha senso porsi il problema della continuità di sign in 0.
D'altra parte, sign_0 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha in 0 un punto di discontinuità: in effetti, poiché $\lim_{x\to 0^+} \text{sign}_0(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \text{sign}_0(x) = -1$, sign_0 non è né continua a destra, né continua a sinistra in 0. *Osserviamo che, comunque si ridefinisca la funzione* sign_0 *in* $x = 0$, *non vi è modo di ottenere una funzione continua: infatti, non esiste* $\lim_{x\to 0} \text{sign}_0(x)$.

5. Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \qquad\qquad f_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0\,, \\ 57 & x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha che f è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siccome $0 \notin \text{dom}(f)$, non ha senso porsi il problema della continuità di f in 0.



e D'altra parte, f_0 è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha in 0 un punto di discontinuità: in effetti, poiché $\lim_{x\to 0^+} f_0(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f_0(x) = -\infty$, f_0 non è né continua a destra, né continua a sinistra in 0. *Osserviamo che, comunque si ridefinisca la funzione* f_0 *in* $x = 0$, *non vi è modo di ottenere una funzione continua.* In effetti, $\nexists \lim_{x\to 0} f_0(x)$.

8.11 Proprietà della classe delle funzioni continue

Continuità delle funzioni elementari. Ricordando l'Esempio 3.2.7, concludiamo che **tutte le funzioni elementari** (cioè le funzioni potenza a esponente reale, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni trigonometriche e le trigonometriche inverse, le funzioni iperboliche) **sono continue in ogni punto del loro dominio.**

Continuità e operazioni su funzioni. Il seguente risultato discende dall'analogo teorema su limiti e operazioni su funzioni (il Teorema 3.3.1).

Teorema 8.11.1. *Siano* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ *un punto di accumulazione per* D, $c \in \mathbb{R}$, *e* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. *Supponiamo che*

$$f \text{ e } g \text{ siano continue in } x_0.$$

Allora,

- *la funzione somma* $f + g$ *è continua in* x_0*;*
- *la funzione prodotto* $f \cdot g$ *è continua in* x_0*;*
- *la funzione* cf *è continua in* x_0*;*
- *se* $g(x_0) \neq 0$, *la funzione quoziente* $\frac{f}{g}$ *è continua in* x_0.

- *la funzione potenza $(f)^{m/n}$ è continua in x_0 se*

$$\begin{cases} f(x_0) \geq 0 & \text{nel caso } m \geq 0 \text{ e } n \text{ pari,} \\ \text{per qualsiasi valore } f(x_0) \in \mathbb{R} & \text{nel caso } m \geq 0 \text{ e } n \text{ dispari,} \\ f(x_0) > 0 & \text{nel caso } m < 0 \text{ e } n \text{ pari,} \\ f(x_0) \neq 0 & \text{nel caso } m < 0 \text{ e } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

In particolare, concludiamo che ogni funzione polinomiale è continua in $\mathbb{R}$, e che ogni funzione razionale fratta è continua nel suo dominio di definizione.

Continuità e composizione di funzioni.

Teorema 8.11.2. *Siano $g : D_g \to \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per $D_{f\circ g}$*[10]*. Abbiamo i tre seguenti risultati:*

1. *Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}\,, \quad L \in D_f\,, \quad L \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,, \tag{8.11.1}$$

$$f \text{ sia continua in } L. \tag{8.11.2}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right). \tag{8.11.3}$$

2. *Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = L \in \mathbb{R}\,, \quad L \text{ sia un punto di accumulazione per } D_f\,, \tag{8.11.4}$$

$$\exists \lim_{y\to L} f(y) = M \in [-\infty, +\infty]\,, \tag{8.11.5}$$

$$\exists\, r > 0 \;:\; \forall\, x \in D_g \cap \Big((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}\Big) \quad g(x) \neq L\,. \tag{8.11.6}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right). \tag{8.11.7}$$

3. *Supponiamo che*[11]

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\,, \tag{8.11.8}$$

$$\exists \lim_{y\to+\infty} f(y) = M \in [-\infty, +\infty]\,. \tag{8.11.9}$$

Allora,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = M\,. \tag{8.11.10}$$

Osservazione 8.11.3.
- Si osservi che la (8.11.6) è verificata se, per esempio, g è iniettiva in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0.
- Questo risultato si estende anche al caso in cui nella (8.11.1), o nella (8.11.4), o nella (8.11.8) si sostituisca a $\lim_{x\to x_0}$ un limite unilatero, oppure un limite per $x \to \pm\infty$.
- Questo risultato si estende anche alla composizione di un numero finito funzioni.

[10] poiché $D_{f\circ g} \subset D_g$, questo implica che $x_0 \in \mathbb{R}$ è anche un punto di accumulazione per D_g.
[11] Vale un enunciato analogo nel caso in cui $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

- Le formule (8.11.3), (8.11.7), (8.11.10) ci permettono, nel caso in cui le rispettive ipotesi siano verificate, di calcolare il limite per $x \to x_0$ della funzione composta $f \circ g$ in due passi: prima di tutto, calcoliamo il $\lim_{x \to x_0}$ della funzione interna g, e poi calcoliamo $f(\lim_{x \to x_0} g(x))$. Siamo cioè autorizzati (sotto le summenzionate ipotesi) a calcolare il limite $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$ effettuando la sostituzione $y = g(x)$ e riducendo il problema al calcolo del limite $\lim f(y)$, per y tendente a L nei casi 1. e 2., e a $+\infty$ o $-\infty$ nel caso 3. Si veda l'Esempio 8.11.5.

- Osserviamo che tutte le ipotesi di entrambi i punti del teorema sono necessarie: in particolare, il prossimo esempio mostra che, se vale la (8.11.1) ma non la (8.11.2), la tesi (8.11.3) può essere falsa.

Esempio 8.11.4. Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0\,, \\ 0 & x < 0\,, \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0\,, \\ 1 & y = 0\,. \end{cases}$$

Allora $\mathrm{im}(g) = [0, +\infty) \subset \mathrm{dom}(f)$ e la composizione è ben definita, con $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$. Prendiamo $x_0 = 0$: chiaramente $0 \in \mathrm{dom}(f \circ g)$ ed è un punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$. Si ha che $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Ma ora f non è continua in $y = 0$ e infatti, calcolando

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x > 0\,, \\ 1 & x \leq 0\,, \end{cases}$$

vediamo che $\nexists \lim_{x \to 0} f(g(x))$.

Vediamo ora qualche applicazione del Teorema 8.11.2 al calcolo dei limiti.

Esempio 8.11.5. Si ha:

1.
$$\lim_{x \to 0} \left(\arctan(x^4) + 2\ln(1 + \sin(x^2)) \right) = 0\,.$$

Infatti, $x^4 \to 0$ per $x \to 0$ ed, essendo la funzione arctan continua in 0, concludiamo che $\lim_{x \to 0} \arctan(x^4) = 0$. Allo stesso modo $x^2 \to 0$ per $x \to 0$, quindi grazie alla continuità di sin abbiamo che $\sin(x^2) \to 0$ e quindi per la continuità di ln concludiamo che $\lim_{x \to 0} \ln(1 + \sin(x^2)) = \ln(1) = 0$.

2.
$$\lim_{x \to 0^+} \left[\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x^3} \right) \right) + \frac{1}{2} \tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1) \right) + e^{-3/x^2} \right] = \frac{1}{2}\,.$$

In effetti, sfruttando la continuità delle funzioni elementari osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x^3} \right) = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x^3} \right) \right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \right) = 0\,, \\ \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\pi}{4}(x+1) \right) = \frac{\pi}{4} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1) \right) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^4 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} \tan^4\left(\frac{\pi}{4}(x+1) \right) = \frac{1}{2}\,, \\ \lim_{x \to 0^+} \left(-3/x^2 \right) = -\infty \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} e^{-3/x^2} = 0\,. \end{aligned}$$

3.
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(\sin(x)) = -\infty\,.$$

È conseguenza del punto 2. del Teorema 8.11.2: in effetti[12], $\sin(x) \to 0$ per $x \to 0^+$, e $\sin(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$, quindi la (8.11.6) è verificata. Allora,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(\sin(x)) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

4.
$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^3 \arctan(\ln(3x))} = +\infty\,.$$

Infatti $\ln(3x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, quindi $\arctan(\ln(3x)) \to \pi/2$ per $x \to +\infty$, e $x^3 \arctan(\ln(3x)) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Applicando la (8.11.10), concludiamo.

Il seguente risultato è un corollario diretto (della prima parte) del Teorema 8.11.2.

Corollario 8.11.6 (Continuità della funzione composta)**.** *Siano $g : D_g \to \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{im}(g) \cap D_f \neq \emptyset$, e sia $x_0 \in D_{f\circ g}$ un punto di accumulazione per $D_{f\circ g}$. Supponiamo che*

$$g \text{ sia continua in } x_0, \tag{8.11.11}$$
$$f \text{ sia continua in } g(x_0). \tag{8.11.12}$$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0, cioè $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$.

Osserviamo che quest'ultimo risultato vale anche più in generale, omettendo la richiesta che x_0 sia un punto di accumulazione per $D_{f\circ g}$.

In particolare, dal Corollario 8.11.6 (che si estende alla composizione di un numero finito di funzioni) deduciamo che **tutte le funzioni date dalla composizione di funzioni elementari sono continue sul loro dominio di definizione**. Sono per esempio continue sul loro dominio

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) := \frac{e^{x^4}}{x^2+3x+2} + 3\sin(\ln(1+x^2)) \qquad \forall\, x \in D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}\,,\\
&f_2(x) := |x| \cdot \frac{x+3}{x-1} \qquad \forall\, x \in D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,\\
&f_3(x) := x \cdot 2^x + \ln(\arctan(x)) + 4\tan(x) \qquad \forall\, x \in D_{f_3} = (0,+\infty) \cap \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}.
\end{aligned}
$$

Vi è una versione del Teorema della permanenza del segno per funzioni continue.

Teorema 8.11.7 (Teorema della permanenza del segno – funzioni continue)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, Supponiamo che f sia continua in x_0 e $f(x_0) > 0$. Allora, allora esiste un intorno I di x_0 tale che*

$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in I \cap A.$$

Analogamente, se $f(x_0) > L$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) > L \quad \text{per ogni } x \in I \cap A.$$

La dimostrazione è lasciata al lettore: come nel caso del teorema della permanenza del segno per i limiti (cioè, il Teor. 8.8.4), essa segue direttamente dalla definizione di continuità in un punto. Si noti bene, però, una fondamentale differenza rispetto al Teorema 8.8.4: in questo caso si ha

$$f(x) > 0 \ \underline{\text{per ogni}}\ x \in I, \text{ e non solo in } I \setminus \{x_0\}!!!!$$

Infatti, la nozione di continuità in x_0 **impone un vincolo su** f in x_0.

lnfine, enunciamo il seguente risultato, la cui dimostrazione, che ancora lasciamo per esercizio, ricalca quella del Teorema 8.8.8.

[12] si noti che, per $x \to 0^+$, $\sin(x)$ assume valori positivi!

Teorema 8.11.8 (Caratterizzazione della continuità per successioni)**.** *Siano dati $f : A \to \mathbb{R}$ e* $\boxed{x_0 \in A}$ *un punto di accumulazione per A. Si ha*

$$\begin{gathered} f \text{ è continua in } x_0 \text{ se e solo se} \\ \text{per ogni successione } \{x_n\} \text{ a valori in } A \text{ e convergente a } x_0, \text{ risulta} \\ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0). \end{gathered} \tag{8.11.13}$$

Quindi, per dimostrare che che una funzione f NON è continua in x_0, è sufficiente trovare una successione

$$\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \text{ con } x_n \to x_0 \text{ e tale che } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

Per esempio, consideriamo la funzione H di Heaviside (cf. (8.10.5)), $x_0 = 0$, e la successione $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$: i dettagli sono lasciati al lettore.

8.12 Classificazione dei punti di discontinuità

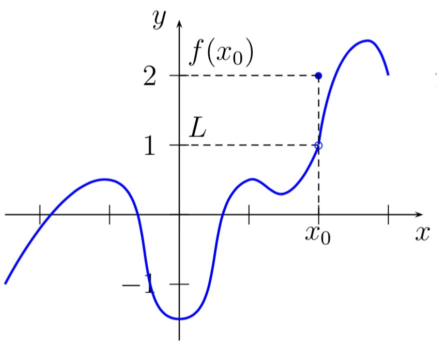
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$ un punto di accumulazione per D_f. Supponiamo che $x_0 \in D_f$ sia un punto di discontinuità per f. Possono allora presentarsi le seguenti situazioni:

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $L \neq f(x_0)$;
- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \notin \mathbb{R}$;
- $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Diamo ora una classificazione più precisa dei punti di discontinuità.
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f$ (x_0 punto di accumulazione per D_f), un punto di discontinuità per f. Allora possono presentarsi questi casi:

♣ *f ha una discontinuità eliminabile in x_0* se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L \neq f(x_0)\,. \tag{8.12.1}$$



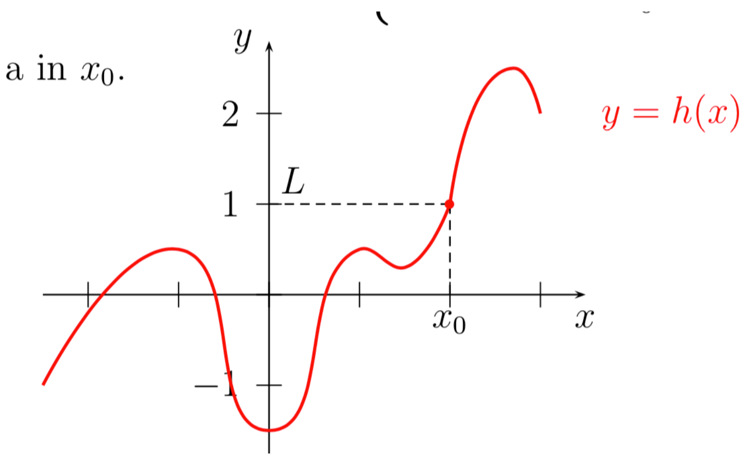
Per esempio, le funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1\,, \\ 57 & x = 1\,, \end{cases}$$

hanno, rispettivamente, un punto di discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$ e in $x_0 = 1$. Questo tipo di discontinuità viene detto "eliminabile" perché, ridefinendo la funzione f in questo modo:

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0\,, \\ \lim_{x\to x_0} f(x) & x = x_0\,, \end{cases}$$

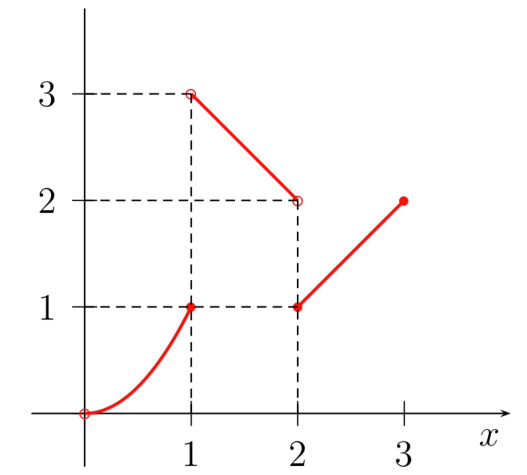
si ottiene una funzione h continua in x_0. Si può cioè *eliminare* la discontinuità nel punto x_0.



♣ *f ha una discontinuità di prima specie (o di tipo salto) in x_0* se

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}, \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad L^+ \neq L^-. \tag{8.12.2}$$

(quindi $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$). Ecco un esempio grafico:



Per esempio, la funzione H di Heavidside definita dalla (8.10.5) ha in $x_0 = 0$ un punto di salto. Un altro esempio è dato da

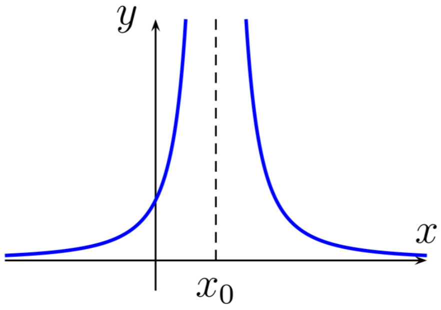
$$f_3(x) := \begin{cases} -x & x \leq 0, \\ x - 2 & x > 0. \end{cases}$$

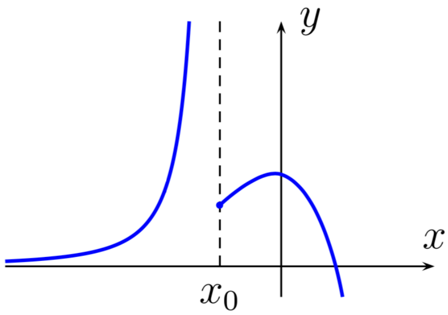
In questo caso $x_0 = 0$ è un punto di salto per f_3, in quanto $\lim_{x \to 0^-} f_3(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = -2$.

♣ *f ha un punto di infinito in x_0* se

$$\begin{gathered} \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+, \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-, \\ \text{e almeno uno fra } L^+ \text{ e } L^- \text{ è infinito.} \end{gathered} \tag{8.12.3}$$

Ecco due esempi grafici:





Per esempio,

$$f_4(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_5(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases} \qquad f_6(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0\,, \\ 0 & x \leq 0\,. \end{cases}$$

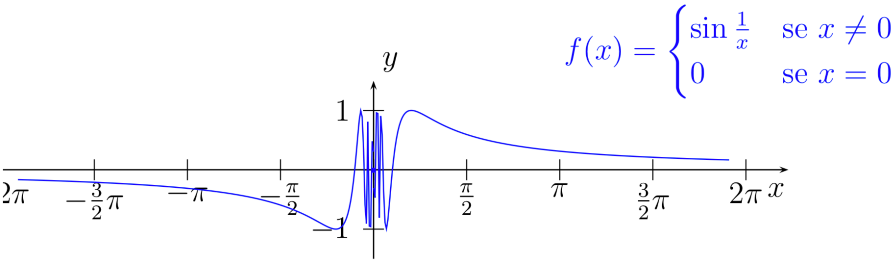
Per tutte queste funzioni $x_0 = 0$ è un punto di infinito. Si noti che $\exists \lim_{x\to 0} f_4(x) = \lim_{x\to 0^+} f_4(x) = \lim_{x\to 0^-} f_4(x) = +\infty$, mentre $\nexists \lim_{x\to 0} f_5(x)$ e $\nexists \lim_{x\to 0} f_6(x)$: in quest'ultimo caso, $\lim_{x\to 0^+} f_6(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to 0^-} f_6(x) = 0$.

♣ *f ha un punto di discontinuità di seconda specie in x_0* se

$$\text{non esiste almeno uno fra } \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to x_0^-} f(x). \tag{8.12.4}$$

Per esempio,

$$f_7(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0\,, \\ 0 & x \leq 0\,, \end{cases} \qquad f_8(x) := \begin{cases} 0 & x \geq 0\,, \\ \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0\,. \end{cases}$$



Si noti in entrambi i casi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie: infatti $\nexists \lim_{x\to 0^+} f_7(x)$ e neppure $\nexists \lim_{x\to 0^-} f_8(x)$; d'altra parte, la funzione f_7 è limitata su $\mathbb{R}$ ($-1 \leq f_7(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$), mentre f_8 non è limitata su $(-\infty, 0)$: per $x < 0$ il suo grafico è infatti compreso fra i grafici delle funzioni $g(x) = -\frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

Capitolo 9

Proprietà globali delle funzioni continue

La definizione di continuità di una funzione in un punto, cosìcome quella di limite su cui è fondata, ha carattere locale: per controllare che una funzione sia continua in un certo punto è sufficiente conoscere quella funzione in un intorno, comunque piccolo, del punto considerato. Pertanto, di per se' la continuità può garantire solo la validità di proprietà *locali*, cioè che valgono nell'intorno del punto considerato: per esempio, si ricordi, a questo proposito, il Teorema di limitatezza locale 8.8.2.

In questo capitolo vogliamo esaminare i legami fra la continuità di una funzione e importanti proprietà *globali* di tale funzione (cioè che valgono su tutto il suo insieme di definizione). Sarà possibile stabilire tali legami combinando la continuità della funzione f considerata con

ipotesi di tipo 'topologico' su D_f: richiederemo che $D_f = I$, con I intervallo generico;

quindi, I potrà in generale essere anche una semiretta, aperta o chiusa, o un intervallo aperto, o un intervallo semiaperto o chiuso. In casi specifici, richiederemo

$I = [a, b]$ sia intervallo <u>chiuso e limitato</u>.

9.1 Il teorema di Weierstrass

Definizione 9.1.1. *Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$. Un punto $x_m \in D_f$ viene detto* punto di minimo assoluto *per f se*

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{9.1.1}$$

e il corrispondente valore $f(x_m)$ viene detto valore di minimo assoluto *per f.*

Un punto $x_M \in D_f$ viene detto punto di massimo assoluto *per f se*

$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,, \tag{9.1.2}$$

e il corrispondente valore $f(x_M)$ viene detto valore di massimo assoluto *per f.*

Osserviamo che, di fatto,

$$f(x_m) = \min\{f(x)\, : x \in D_f\} = \min \mathrm{im}(f)\,, \qquad f(x_M) = \max\{f(x)\, : x \in D_f\} = \max \mathrm{im}(f)\,; \tag{9.1.3}$$

pertanto, oltre che con le espressioni di valore di minimo di massimo assoluto, ci riferiremo a $f(x_m)$ e a $f(x_M)$ come al minimo e al massimo di f (sul suo dominio D_f). Ribadiamo comunque la fondamentale differenza fra

$$x_m \rightsquigarrow \text{PUNTO di minimo assoluto} \qquad \text{e} \qquad f(x_m) \rightsquigarrow \text{VALORE di minimo assoluto}$$

(e idem per x_M e $f(x_M)$).

Per completezza, introduciamo anche

- l'*estremo superiore di* f, cioè l'estremo superiore dell'insieme immagine di f, ossia
$$\sup f = \sup \operatorname{im}(f) = \sup\{f(x) : \quad x \in D_f\};$$
- l'*estremo inferiore di* f, cioè l'estremo inferiore dell'insieme immagine di f, ossia
$$\inf f = \inf \operatorname{im}(f) = \inf\{f(x) : \quad x \in D_f\};$$

Segue dalla (9.1.3) e dall'unicità del massimo e del minimo di una funzione che i valori di massimo assoluto e di minimo assoluto, se esistono, sono univocamente determinati, mentre <u>a priori una funzione potrebbe avere più punti di minimo (massimo) assoluto</u>. Per esempio, la funzione $W : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ data da[1]

$$W(x) := \begin{cases} |x| & x \in [-1, 1]\,, \\ |x-2| & x \in (1, 3]\,, \end{cases}$$

ha in $[-1, 3]$ due punti di minimo assoluto (sono i punti $x_m^1 = 0$ e $x_m^2 = 2$, corrispondenti al valore di minimo assoluto $m = 0$) e tre punti di massimo assoluto (sono $x_M^1 = -1$, $x_M^2 = 1$, e $x_M^3 = 3$, corrispondenti al valore di massimo assoluto $M = 1$).

Ci chiediamo se, data una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$, essa ammette almeno un punto di minimo, e almeno un punto di massimo assoluto. Questo è in generale FALSO, come mostra il seguente

Esempio 9.1.2. Consideriamo le funzioni:

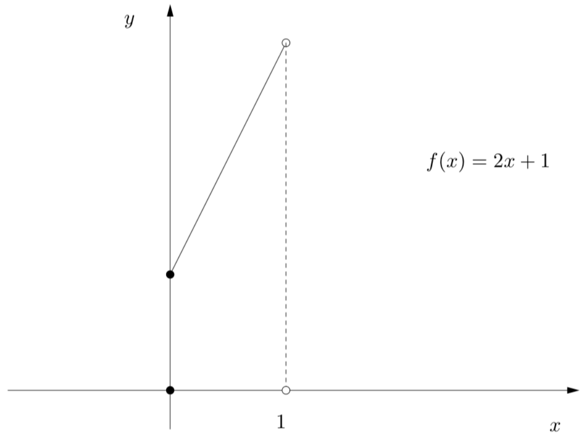
1. $f(x) := e^x$, ristretta all'intervallo $I = [0, +\infty)$. In questo caso si ha che $f(x) \geq f(0) = 1$ per ogni $x \geq 0$, quindi $x_m = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[0, +\infty)$. Poiché $\operatorname{im}(f) = [1, +\infty)$, si ha che $\sup \operatorname{im}(f) = +\infty$ e quindi $\operatorname{im}(f)$ non ammette massimo. Pertanto f non ha alcun punto di massimo assoluto su I.

2. $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che $\operatorname{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi $\inf(\operatorname{im}(f)) = 0 \notin \operatorname{im}(f)$. Pertanto $\operatorname{im}(f)$ non ammette minimo, quindi f non ha né massimo, né minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = \tan(x)$, ristretta all'intervallo $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poiché $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, tan non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto.

4. $f(x) = 2x + 1$, ristretta a $[0, 1)$: vediamo che f ha un unico punto di minimo assoluto, $x_0 = 0$, ma non ammette alcun punto di massimo assoluto.

[1] **Esercizio!**: disegnarne il grafico!



Osserviamo tutte le funzioni in questione sono continue, e che nel primo e nel secondo esempio l'intervallo di definizione è illimitato, mentre nel terzo l'intervallo è limitato, ma aperto; nel quarto esempio l'intervallo di definizione è semiaperto. Diamo ora l'esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato, che però non ammette né minimo né massimo assoluto.

Esempio 9.1.3. Consideriamo la funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 2 & x = 0\,, \\ x & x \in (0,3)\,, \\ 1 & x = 3\,. \end{cases}$$

Disegnandone il grafico, osserviamo che f non ammette né un punto di minimo, né un punto di massimo assoluto. Notiamo che f non è continua in $[0,3]$: in effetti, f è continua su $(0,3)$, ma non è continua a sinistra in $x = 0$, e non è continua a destra in $x = 3$.

Tenendo conto degli esempi precedenti, congetturiamo che l'esistenza o meno di un punto di minimo/massimo assoluto dipenda sia da proprietà della funzione (che dovrà essere continua), sia da proprietà dell'intervallo di definizione, che dovrà essere **chiuso e limitato**. Ricordiamo che denoteremo il generico intervallo chiuso e limitato con $[a,b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Questo è quanto asserito dal

Teorema 9.1.4 (Weierstrass)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f ha almeno un punto di minimo assoluto e almeno un punto di massimo assoluto in $[a,b]$, cioè*

$$\exists\, x_m \in [a,b]\,, \;\; \exists\, x_M \in [a,b] \;: \quad f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \;\; \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{9.1.4}$$

Dimostrazione. Per fissare le idee, dimostreremo che

$$\exists\, x_M \in [a,b] \text{ punto di } \underline{\text{massimo}} \text{ per } f.$$

- **Passo 1:** Costruiamo una *successione massimizzante* per f su $[a,b]$, cioè una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ tale che
$$f(x_n) \to \sup_{[a,b]} f.$$
Nella costruzione distinguiamo due casi:
Caso 1: $\sup_{[a,b]} f < +\infty$. Possiamo ricorrere alla caratterizzazione del $\sup_{[a,b]} f$ (cioè il sup dell'insieme immagine di f):
  1. $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \le \sup_{[a,b]} f$
  2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, x \in [a,b] \,:\, \sup_{[a,b]} f - \varepsilon < f(x)$.

In particolare, scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \geq 1$ troviamo un elemento $x_n \in [a,b]$ tale che

$$\sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \sup_{[a,b]} f \,. \tag{9.1.5}$$

Al variare di n otteniamo quindi una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$. Dalla (9.1.5) e dal Teorema dei due carabinieri segue che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{[a,b]} f$.
Caso 2: $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Allora l'insieme immagine di f non è superiormente limitato, cioè non ammette alcun maggiorante. In altri termini,

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, x \in [a,b] : \quad f(x) > M.$$

Scegliendo $M = n$, $n \in \mathbb{N}$, costruisco una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ tale che $\lim n \to \infty f(x_n) = +\infty = \sup_{[a,b]} f$.

- **Passo 2:** la successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ è <u>limitata</u>, quindi per il teorema di Bolzano Weiestrass

$$\exists \text{ una sottosuccessione } \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \;\exists\, x \in \mathbb{R} : \;\; \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Notare che

$$a \leq x_{n_k} \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq x \leq b.$$

- **Passo 3:** Usiamo che f è continua: quindi, da $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ e dal Teorema 8.8.8 si ha che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$

D'altra parte, abbiamo visto che lungo *tutta* la successione $\{x_n\}$ si ha che $f(x_n) \to \sup_{[a,b]} f$ per $n \to \infty$: quindi, per il Teorema 6.7.4 ho che anche lungo la sottosuccessione $\{f(x_{n_k})\}$ vale che $f(x_{n_k}) \to \sup_{[a,b]} f$ per $k \to \infty$. Allora, per l'unicità del limite delle sottosuccessioni concludiamo che

$$f(x) = \sup_{[a,b]} f\,.$$

Quindi $\sup_{[a,b]} f$ è un valore assunto dalla funzione f, cioè $\sup_{[a,b]} f \in \mathrm{im}(f)$. Quindi $\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$. Ribattezziamo il punto x come x_M: concludiamo quindi che

$$f(x_M) = \max_{[a,b]} f,$$

cioè x_M è un punto di massimo assoluto per f su $[a,b]$.

□

Vediamo subito un'immediata conseguenza del Teorema di Weierstrass.

Corollario 9.1.5. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata su $[a,b]$, cioè*

$$\exists\, K > 0 : \quad -K \leq f(x) \leq K \quad \forall\, x \in [a,b]\,. \tag{9.1.6}$$

Si noti che la (9.1.6) è una proprietà di limitatezza *globale*: vale cioè su <u>tutto</u> l'intervallo $[a,b]$.
Dimostrazione. Dalla (9.1.4) segue che, essendo $m := f(x_m)$ e $M := f(x_M)$, $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la (9.1.6) segue ponendo $K := \max\{|m|, |M|\}$. □

Per esempio, il Teorema 9.1.4 e il Corollario 9.1.5 garantiscono che la funzione[2]

$$f(x) := x^4 + \arctan\big(\sin(3x^2)\big) + \frac{x\cos(x)}{x^2+2} \quad \forall\, x \in D_f = \mathbb{R}\,,$$

[2]lo studio del suo grafico qualitativo potrebbe essere complesso.

è limitata ed ammette almeno un punto di minimo e almeno un punto di massimo assoluto su ogni intervallo del tipo $[a, b]$, con a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. In effetti, essa è continua (sul suo dominio, che è $\mathbb{R}$, quindi in particolare su $[a, b]$) in quanto data da somme/prodotti/quozienti/composizioni di funzioni continue. Allo stesso modo, la funzione

$$f(x) = \exp\left(x^3 + 1\right)\arctan(x) + \arcsin(\tan(x)),$$

definita su

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z},\, |\tan(x)| \leq 1\right\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] = \ldots \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \cup \ldots \end{aligned}$$

è continua su D_f, in quanto data dalla somma/prodotto/composizione di funzioni continue. Quindi f ammette almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo assoluto su ogni intervallo (chiuso e limitato) della forma $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 9.1.6. Osserviamo che il Teorema di Weierstrass garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di minimo/massimo assoluto. Per esempio, la funzione

$$f(x) := |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ha sull'intervallo $[-1, 1]$ un (unico) punto di minimo assoluto: $x_m = 0$, e due punti di massimo assoluto: $x_M^1 = 1$ e $x_M^2 = -1$. D'altra parte, la funzione $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0], \\ x & \text{se } x \in (0, 1], \\ 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

ha infiniti punti di minimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[-1, 0]$) e infiniti punti di massimo assoluto (tutti i punti dell'intervallo $[1, 2]$).

Osservazione 9.1.7. Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie: in altri termini, tralasciandone anche solo una, la tesi non vale. Invitiamo il lettore a tracciare il grafico delle funzioni presentate nei seguenti esempi.

- La funzione $f_1(x) = \frac{1}{x}$, che consideriamo sull'intervallo $I_1 = (0, 1]$, è continua su I_1, ha in $x_m = 1$ un punto di minimo assoluto, ma non ammette alcun punto di massimo assoluto. Si noti però che I_1, pur essendo limitato, non è chiuso.

- La funzione $f_2(x) = x^2$ è continua su $I_2 = \mathbb{R}$, ha in $x_m = 0$ l'unico punto di minimo assoluto, ma non ammette punti di massimo assoluto. In effetti, I_2 non è limitato.

- La funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & x \in [0, 1)\,, \\ 1 & x = 1\,, \\ x - 1 & x \in (1, 2]\,, \end{cases}$$

  non ha né un punto di minimo né un punto di massimo assoluto su $[0, 2]$. Si noti però che f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mentre ha in 1 un punto di discontinuità di tipo salto. Quindi è sufficiente far cadere la continuità anche in un solo punto dell'intervallo di definizione, per rendere falsa la (9.1.4).

9.2 Il teorema di Bolzano (o degli zeri)

In questa sezione diamo risultati relativi alla risolubilità di equazioni legate a funzioni continue, si veda in particolare l'Esempio 9.2.4 più in avanti. Il 'capostipite' di tali risultati è il

Teorema 9.2.1 (Bolzano)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che*

$$f(a) \cdot f(b) < 0 . \tag{9.2.1}$$

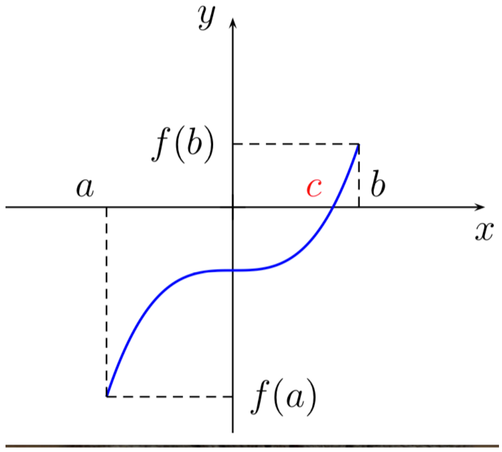
Allora

$$\exists\, x_0 \in (a, b) : \quad f(x_0) = 0 . \tag{9.2.2}$$

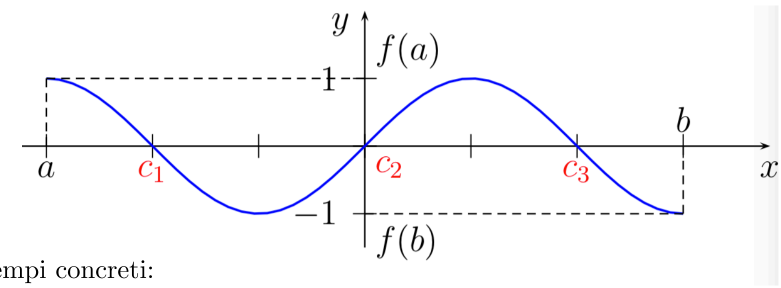
Il punto x_0 *di annullamento di* f *viene anche detto* zero di f*.*

Osservazione 9.2.2. - Notare che con la (9.2.1) stiamo richiedendo che, agli estremi dell'intervallo di definizione, f deve assumere valori discordi! Dalla (9.2.1) segue in particolare che $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$: quindi lo zero x_0 di f "deve trovarsi" in (a, b).

- L'interpretazione geometrica è la seguente: se f assume valori discordi agli estremi di un intervallo, allora il suo grafico interseca l'asse dell'ascisse in almeno un punto (interno a tale intervallo).



- Il teorema di Bolzano garantisce **solo l'esistenza, e non l'unicità** dei punti di annullamento di f. Vediamo un esempio grafico



e alcuni esempi concreti:

– la funzione $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := x - 2$ per ogni $x \in [1, 3]$ ha in $x_0 = 2$ il suo unico zero.

– La funzione $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := x^3 - x = x(x^2 - 1)$ per ogni $x \in [-2, 2]$ ha tre zeri: $x_0^1 = -1$, $x_0^2 = 0$, e $x_0^3 = 1$.

– La funzione $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ definita da[3]

$$h(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [0,1]\,, \\ 0 & x \in (1,2]\,, \\ x-2 & x \in (2,3]\,, \end{cases}$$

ha infiniti zeri (tutti i punti dell'intervallo $[1,2]$).

Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie, come mostrano i seguenti controesempi:

Esempio 9.2.3. 1. La funzione $f_1 : [-2,1] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -2 \le x < 0\,, \\ 1 & 0 \le x \le 1\,, \end{cases}$$

verifica la (9.2.1), ma non ammette alcun punto di annullamento. Si noti che f è continua su $[-2,1] \setminus \{0\}$. Quindi l'esistenza di un solo punto di discontinuità è sufficiente a far cadere la (9.2.2), cioè l'esistenza di uno zero,

2. Consideriamo la funzione $f_2(x) = e^{-x}$, con $x \in [-1,1]$. Si ha che $f_2 \in C^0([-1,1])$, ma f_2 non si annulla in nessun punto di $[-1,1]$. Notiamo che $f_2(-1) = e > 0$ e $f_2(1) = 1/e > 0$, quindi la (9.2.1) è violata.

Mostriamo ora un'applicazione del teorema di Bolzano alla localizzazione degli zeri di una funzione f continua; consideremo una particolare funzione continua, e cioè un polinomio. Gli zeri di tale polinomio sono quindi le soluzioni dell'associata equazione algebrica. Ecco quindi un esempio di **applicazione del Teorema degli zeri alla risoluzione di equazioni algebriche** (più precisamente, alla dimostrazione dell'esistenza di soluzioni di equazioni algebriche).

Come vedremo, l'idea alla base dei conti nell'Esempio 9.2.4 è che il Teorema 9.2.1 non viene applicato sull'intero dominio di definizione di f, ma alla restrizione di f a un sottointervallo (chiuso e limitato), agli estremi del quale è verificata la condizione (9.2.1).

Esempio 9.2.4 (Localizzazione degli zeri di un polinomio)**.** Dimostriamo che esiste una radice x_0 dell'equazione $x^4 - x - 2 = 0$ verificante $x_0 \in [1,2]$. A questo scopo, consideriamo la funzione polinomiale $P(x) := x^4 - x - 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: P è continua su $\mathbb{R}$ e $P(1) = -2$, mentre $P(2) = 12$. Quindi, grazie al Teorema 9.2.1 concludiamo che, di fatto, l'equazione ammette almeno una radice $x_0 \in (1,2)$.

Il teorema dei valori intermedi. È il corollario più significativo del Teorema di Bolzano.

Teorema 9.2.5 (Valori intermedi (I))**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, f assume almeno una volta ogni valore y compreso fra il suo valore m di minimo assoluto su $[a,b]$ e il suo valore M di massimo assoluto su $[a,b]$.*

Facciamo qualche commento su questo enunciato: ricordiamo che, grazie al Teorema di Weierstrass, poiché $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$ esistono $x_m \in [a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ tali che $m = f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) = M$ per ogni $x \in [a,b]$. In altri termini,

$$\mathrm{im}(f) \subset [m,M]\,. \tag{9.2.3}$$

Ora, il Teorema 9.2.5 afferma che, se $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$, per ogni $y \in [m,M]$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$. In altri termini, per ogni $y \in [m,M]$ si ha che $y \in \mathrm{im}(f)$, cioè vale

$$[m,M] \subset \mathrm{im}(f)\,. \tag{9.2.4}$$

Combinando la (9.2.3) e la (9.2.4), si conclude che $\mathrm{im}(f) = [m,M]$, cioè che **l'insieme immagine di f è un intervallo** (più precisamente, l'intervallo $[m,M]$).

In effetti, il Teorema dei valori intermedi si potrebbe anche enunciare in questa forma *alternativa*:

[3]**Esercizio!**: disegnarne il grafico!

Teorema 9.2.6 (Valori intermedi (II)). *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora,* $\mathrm{im}(f)$ *è un intervallo.*

L'interpretazione grafica di questo risultato è immediata: il grafico di una funzione continua su un intervallo non presenta interruzioni e può essere tracciato senza staccare la matita dal foglio.

Dimostrazione del Teorema 9.2.5. Siano $x_m \in [a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ un punto di minimo e, rispettivamente, di massimo assoluto per f su $[a,b]$. Per fissare le idee, supponiamo che $x_m < x_M$. Dimostriamo che vale la (9.2.4), cioè che

$$\forall\, y \in (m,M) \ \ \exists\, x \in [a,b] : \quad y = f(x) \ \Leftrightarrow \ y - f(x) = 0. \tag{9.2.5}$$

(si noti che è sufficiente dimostrare che $(m,M) \subset \mathrm{im}(f)$ in quanto, essendo $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, chiaramente si ha che $m,\, M \in \mathrm{im}(f)$). Per dimostrare la (9.2.5), fissato $y \in (m,M)$ introduciamo la funzione

$$g_y : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{data da} \quad g_y(x) := y - f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Osserviamo che g_y è continua, in quanto è data dalla differenza di una costante e di una funzione continua. Applichiamo il Teorema degli zeri alla restrizione di g_y all'intervallo $[x_m, x_M]$. Usando la (9.1.4), si vede subito che $g_y(x_m) = y - f(x_m) > 0$ e $g_y(x_M) = y - f(x_M) < 0$. Allora, grazie al Teorema 9.2.1 concludiamo che esiste $x \in (x_m, x_M)$ tale che $y = f(x)$. Ripetendo il ragionamento per ogni $y \in (m,M)$, concludiamo la (9.2.5). □

9.3 Inverse di funzioni continue

In questa sezione esamineremo il seguente

Problema: Sia

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ continua in } A \text{ e iniettiva.}$$

Sappiamo quindi che f è invertibile su A, con funzione inversa

$$f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$$

(ricordiamo infatti che il dominio della funzione inversa è l'insieme immagine di f, e l'insieme immagine della funzione inversa è il dominio di f, e cioè A). Ci chiediamo se

$$\boxed{f^{-1} \text{ è continua in } \mathrm{im}(f)?} \tag{9.3.1}$$

Questo non è vero in generale, come dimostra il seguente

Esempio 9.3.1. Sia $A = [0,1] \cup (2,3]$ (unione di due intervalli) e sia $f : A \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$

Allora f è continua in A, con insieme immagine dato dall'intervallo $[0,2]$. La sua inversa $f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}$ (con insieme immagine dato da $[0,1] \cup (2,3]$) è facilmente calcolabile: si tratta della funzione

$$f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x+1 & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Si noti che f^{-1} è discontinua in $x = 1$.

Anche nel contesto di questo problema, vedremo che sarà possibile dare una risposta affermativa alla (9.3.1) combinando l'ipotesi di continuità di f con l'ipotesi che il suo dominio sia un intervallo. Notiamo che il dominio della funzione dell'Esempio 9.3.1 non è un intervallo, in quanto è dato dall'unione di due intervalli disgiunti.

D'ora in poi considereremo solo funzioni continue definite su intervalli. In questo caso, abbiamo innanzitutto una caratterizzazione dell'invertibilità (di funzioni continue definite su intervalli): si ha invertibilità solo in corrispondenza a una proprietà di stretta monotonia. Diamo il seguente risultato senza dimostrazione.

Teorema 9.3.2 (Caratterizzazione delle funzioni continue invertibili)**.** Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I. Allora

$$f \text{ è invertibile} \iff f \text{ è strettamente monotona.}$$

Osservazione 9.3.3. L'ipotesi che I sia un intervallo è essenziale, infatti $f : [0, 1] \cup (2, 3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x & \text{se } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

è continua, invertibile ma non è monotona.

Ricordiamo che, se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona, allora la funzione inversa $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$ è ancora monotona, con una monotonia dello stesso tipo di f. Essa è anche continua (possiamo cioè dare una risposta affermativa alla (9.3.1))? Il seguente risultato, sempre senza dimostrazione, dà una risposta a questa domanda.

Teorema 9.3.4. *Siano*

- *I intervallo*
- *$f : I \to \mathbb{R}$ continua su I*
- *$f : I \to \mathbb{R}$ invertibile*

Allora $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$ è continua.

Capitolo 10

Derivate

Il concetto di derivata è intrinsecamente legato a quello di limite. Esso entra naturalmente in gioco nella **modellizzazione matematica** di tutti quei problemi in cui interviene lo studio della variazione di una grandezza rispetto ad un'altra.

10.1 Definizione di derivata

Prima di dare la definizione di derivata, precisiamo che, d'ora in poi, per semplificare gli enunciati, considereremo solo funzioni definite su un generico intervallo $I \subset \mathbb{R}$; tutto quello che diremo si potrebbe comunque adattare al caso di funzioni definite sull'unione di più intervalli, pur di considerarne le restrizioni ai singoli sotto-intervalli del dominio di definizione.

Ricordiamo la definizione di punto interno già data nella Sezione 8.2.

Definizione 10.1.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto. Un punto $x_0 \in I$ si dice* interno ad I *se esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Se x_0 non è un punto interno ad I, si dice* esterno.

Per esempio, se $I = (a, b]$, tutti i punti in (a, b) sono interni, mentre il punto $x_0 = b$ è esterno. Se $I = [a, b]$, allora i punti a e b sono esterni, e tutti i punti in (a, b) sono interni. Se $I = (a, +\infty)$, tutti i punti di I sono interni a I, mentre se $I = (-\infty, a]$, sono interni a I i punti in $(-\infty, a)$, mentre il punto a è esterno a I.

Definizione 10.1.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che x_0 sia un punto interno ad I. Dato $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tale che $x_0 + h \in I$[1], chiamiamo* rapporto incrementale di f relativo al punto x_0 e all'incremento h *il quoziente*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{10.1.1}$$

Se esiste (finito o no) il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{10.1.2}$$

tale limite si chiama derivata di f nel punto x_0 *e si denota con il simbolo $f'(x_0)$.*

Inoltre, se il limite (10.1.2) *(esiste ed) è finito, la funzione f si dice* derivabile nel punto x_0.

Notazioni alternative a $f'(x_0)$ sono

$$\frac{d}{dx} f(x_0), \qquad Df(x_0);$$

tuttavia, non useremo quasi mai la seconda.

[1] e questo è verificato per $|h|$ sufficientemente piccolo, si veda l'Osservazione 10.1.3.

Osservazione 10.1.3. È chiaro dalla definizione (10.1.1) che, per poter considerare il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale di f relativo a x_0, è necessario supporre che x_0 sia un punto interno, cioè che esista $r > 0$ con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Allora il quoziente (10.1.1) è ben definito per ogni $h \in \mathbb{R}$ verificante $0 < |h| < r$: in effetti, quest'ultima disuguaglianza assicura proprio che $x_0 + h$ appartiene all'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$, il quale è un sottoinsieme del dominio I.

La derivata di f in x_0 (punto interno) viene anche definita come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,. \tag{10.1.3}$$

Ovviamente, se il limite (10.1.3) esiste, esso coincide con (10.1.2), pur di effettuare il cambiamento di variabile $h = x - x_0$, quindi la definizione (10.1.3) è del tutto equivalente alla (10.1.2).

Definizione 10.1.4. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $I' \subset I$ un sottointervallo di I. Supponiamo che per ogni $x \in I'$ f sia derivabile in x. Allora si dice che f* è derivabile su I'. *Chiamiamo* funzione derivata *la funzione*

$$f' : I' \to \mathbb{R} \text{ definita da } \quad x \in I' \mapsto f'(x)\,.$$

Si noti che, in generale, si potrebbe avere $I' \neq I$.

Significato geometrico della nozione di derivata. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno a I. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora,

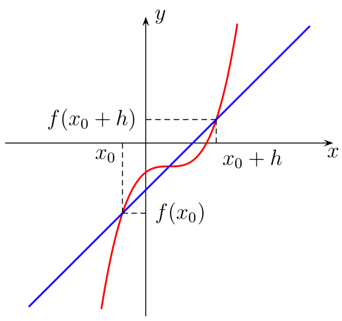
$$\begin{array}{c} f'(x_0) \textbf{ è il coefficiente angolare della} \\ \textbf{retta tangente al grafico di } f \textbf{ nel punto } (x_0, f(x_0)). \end{array} \tag{10.1.4}$$

Il lettore presti bene attenzione alla locuzione usata: si dice

retta tangente al grafico di f nel punto (del grafico) $(x_0, f(x_0))$

e **non** *retta tangente ad f in x_0*...., per esempio!

La (10.1.4) è in accordo con l'interpretazione della retta tangente come "retta limite" delle rette secanti graf(f), passanti per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, al tendere di h a zero.



In effetti, per ogni $h \neq 0$ il coefficiente angolare della corda secante graf(f) e passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è dato da

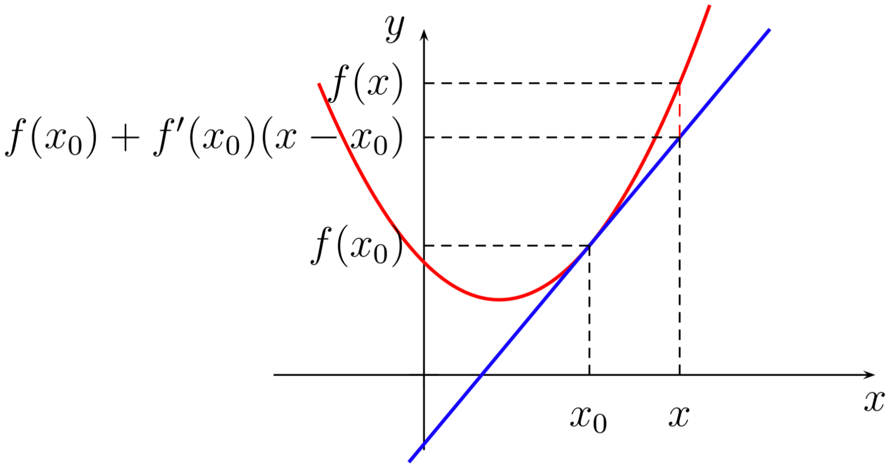
$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

cioè è il rapporto incrementale di f relativo a x_0 e all'incremento h. Al tendere di h a zero, il limite di m_h sarà il coefficiente angolare della retta tangente a graf(f) nel punto $(x_0, f(x_0))$. Ma il limite di m_h, quando esiste, è proprio la derivata di f in x_0, il che giustifica la (10.1.4).

Ne risulta che l'equazione della retta tangente a graf(f) nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,. \tag{10.1.5}$$

Questa infatti è proprio l'equazione della retta avente coefficiente angolare $f'(x_0)$ e passante per il punto $(x_0, f(x_0))$.



Esempio 10.1.5. 1. Per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ nel punto $(-2, -8)$, calcoliamo

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-2)^3 - (-2)^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 - 6h^2 + 12h}{h} = 12\,.$$

Allora, otteniamo $y = 12(x+2) - 8$.

2. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = e^x$ nel punto $(0, f(0)) = (0, 1)$ è

$$y = x + 1\,.$$

In effetti,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$$

per un ben noto limite notevole.

Infine, ricordiamo che, data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno a I, se esiste $f'(x_0) = \pm\infty$, allora la retta tangente a $\mathrm{graf}(f)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta verticale di equazione $x = x_0$, e si dice che $(x_0, f(x_0))$ *è un punto a tangente verticale per* $\mathrm{graf}(f)$. D'ora in poi, diremo anche più semplicemente che x_0 *è un punto*[2] *a tangente verticale per* f.

Derivate destre e sinistre. Le stesse motivazioni addotte per limiti unilateri ci portano a introdurre due nozioni di "derivate unilatere", definite come limiti unilateri del rapporto incrementale di f relativo a un dato punto $x_0 \in I$.

Definizione 10.1.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.*

- *Supponiamo che $x_0 \in I$ sia interno a I, o che x_0 sia l'estremo sinistro di I. Se il limite del rapporto incrementale di f, relativo a x_0 e all'incremento h, al tendere di h a 0^+:*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste, finito o no, allora tale limite viene detto derivata destra di f in x_0 *e denotato con il simbolo $f'_+(x_0)$.*

[2] si usa anche la locuzione *flesso a tangente verticale*

- *Supponiamo che $x_0 \in I$ sia interno a I, o che x_0 sia l'estremo destro di I. Se il limite del rapporto incrementale di f, relativo a x_0 e all'incremento h, al tendere di h a 0^-:*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

esiste, finito o no, allora tale limite viene detto derivata sinistra di f in x_0 *e denotato con il simbolo $f'_-(x_0)$.*

In effetti, la nozione di derivata destra (rispettivamente, di derivata sinistra) è l'unica nozione di derivata che si possa dare in x_0, se x_0 è l'estremo sinistro (rispettivamente, destro) dell'intervallo di definizione. Inoltre, come vedremo per esempio nel calcolo della derivata della funzione modulo, anche in un punto interno all'intervallo di definizione può essere significativo distinguere la derivata destra dalla derivata sinistra: ciò può infatti fornire delle informazioni più precise sul comportamento della funzione in tale punto.

Vale il seguente risultato, che è una conseguenza immediata delle Definizioni 10.1.2 e 10.1.6, e inoltre del Teorema 8.3.4 sui rapporti fra limite e limite destro/sinistro.

Teorema 10.1.7. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ un punto interno a I. Allora,*

$$\exists\, f'(x_0) \ \text{ finita o infinita } \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \text{ finita o infinita}.$$

In tal caso, si ha $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Grazie alle nozioni di derivata destra/sinistra, possiamo estendere ora la definizione di derivabilità di una funzione al caso in cui essa sia definita su un intervallo chiuso e limitato.

Definizione 10.1.8. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice* derivabile su $[a,b]$ *se:*

- *per ogni $x \in (a,b)$ esiste finita la derivata $f'(x)$,*
- *esistono finite le derivate unilatere $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$.*

10.2 Calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari

Diamo ora qualche esempio di calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari tramite la Definizione 10.1.2.

Derivata delle funzione costante. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante

$$f(x) \equiv c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si ha che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = 0. \tag{10.2.1}$$

Quindi, la funzione derivata f' è definita su $\mathbb{R}$ ed è la funzione identicamente nulla. Per verificare la (10.2.1), osserviamo che

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0\,.$$

Tenendo conto dell'interpretazione geometrica della nozione di derivata, la formula (10.2.1) ha un chiaro significato: in effetti, nel caso della funzione costante, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente a graf(f) (che è la retta $y = c$) nel punto $(x, f(x))$ è chiaramente la retta $y = c$ stessa.

Derivata della funzione lineare. Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, e consideriamo la funzione *lineare* $f(x) := ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha che:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = a. \tag{10.2.2}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}
\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h) + b - ax_0 - b}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a\,.
\end{aligned}$$

Tenendo conto dell'interpretazione geometrica della nozione di derivata, la formula (10.2.2) ha un chiaro significato: in effetti, nel caso della funzione lineare, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente a $\mathrm{graf}(f)$ (che è la retta $y = ax + b$) nel punto $(x, f(x))$ è chiaramente la retta $y = ax + b$ stessa.

Derivata della funzione modulo. Sia $f(x) := |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
&\nexists\, f'(0)\,, \qquad \text{mentre } f \text{ è derivabile su } \mathbb{R}\setminus\{0\}, \text{ e si ha} \\
&f'(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.
\end{aligned} \tag{10.2.3}$$

In effetti, tenendo conto della definizione della funzione modulo $|\cdot|$

$$\forall\, x_0 > 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,,$$

ove abbiamo usato che, per h sufficientemente piccolo, se $x_0 > 0$ anche il numero $x_0 + h$ è strettamente positivo. Ragionando allo stesso modo si verifica che per ogni $x_0 < 0$ si ha $f'(x_0) = -1$: in effetti,

$$\forall\, x_0 < 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x_0+h) - x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1\,,$$

ove abbiamo usato che, per h sufficientemente piccolo, se $x_0 < 0$ anche il numero $x_0 + h$ è strettamente negativo.

Osserviamo ora che

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1\,.$$

Analogamente, si ha

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1\,.$$

Grazie al Teorema 10.1.7, concludiamo che, essendo derivata destra e derivata sinistra diverse,

$$\nexists\, f'(0)\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = x^2$. Sia $f(x) := x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = 2x. \tag{10.2.4}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} = 2x_0\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Sia $f(x) := \sqrt{x}$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora

$$f'_+(0) = +\infty\,, \quad \text{e} \quad \forall\, x \in (0, +\infty)\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{10.2.5}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}
\forall\, x_0 > 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,,
\end{aligned}$$

mentre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty\,.$$

Derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Sia $f(x) := \frac{1}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \tag{10.2.6}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0-(x_0+h)}{h(x_0+h)x_0} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}\,.$$

Derivata delle funzioni potenza. In generale, si può dimostrare che, data la generica funzione potenza (a esponente reale) $f(x) = x^r$, con $r \in \mathbb{R}$ e dominio D_f, allora

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^r \text{ è derivabile, con derivata} \\
&f'(x) = r x^{r-1} \quad \forall\, x \in D_f \text{ tale che } x^{r-1} \text{ è ben definita.}
\end{aligned} \tag{10.2.7}$$

Per esempio, si ha che la funzione $f(x) := x^{4/3}$, con $D_f = \mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (si noti che $\mathbb{R}$ è il dominio naturale di f'). Analogamente, la funzione $f(x) := x^{1/2}$, di dominio $[0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$ con derivata $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ (si noti che $(0, +\infty)$ è il dominio naturale di f').

Derivate delle funzioni trigonometriche. Sia $f(x) := \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \cos(x). \tag{10.2.8}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}
\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h)-1)+\cos(x_0)\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\,,
\end{aligned}$$

ove la prima uguaglianza segue dalle formule di addizione per il seno, la seconda e la terza da calcoli elementari, e infine la quarta dai limiti notevoli che danno, rispettivamente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h^2}\, h = 0\,.$$

Sia $f(x) := \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = -\sin(x). \tag{10.2.9}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)\sin(h)-\cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h)-1)-\sin(x_0)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x_0)\,.\end{aligned}$$

Derivata della funzione $f(x) = e^x$. Sia $f(x) := e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = e^x. \tag{10.2.10}$$

In effetti,

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}\,,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal limite notevole $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$.

Derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$. Sia $f(x) := \ln(x)$ per ogni $x \in (0,+\infty)$. Allora

$$\forall\, x \in (0,+\infty) \ f \text{ è derivabile in } x, \text{ con } f'(x) = \frac{1}{x}. \tag{10.2.11}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}\forall\, x_0 \in (0,+\infty) \quad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\,,\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ e dalla sostituzione $x = h/x_0$.

10.3 Alcuni risultati sulle derivate

Derivabilità e continuità

Proposizione 10.3.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, o, equivalentemente, che $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0$. A questo scopo, osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0\,,$$

e l'ultima uguaglianza segue dalla formula per il limite del prodotto di due funzioni: si noti che, in questo caso, non si incappa in una forma indeterminata $\infty\cdot 0$, in quanto la funzione $h(x) := (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ tende al limite finito $f'(x_0)$ per $x \to x_0$. $\square$

Osservazione 10.3.2. - Il viceversa della Proposizione 10.3.1 non vale. In altri termini, è falso che, se una funzione è continua in un punto x_0, essa sia anche ivi derivabile (e neppure è vero che la continuità in un punto implica l'esistenza della derivata in tale punto): basti pensare alla funzione $f(x) = |x|$, che è continua in $x_0 = 0$ ma non ammette ivi derivata.

- La Proposizione 10.3.1 si estende anche al caso in cui

  1. f sia derivabile solo a destra in x_0, cioè si abbia per ipotesi solo che esiste finita la derivata destra $f'_+(x_0)$: allora, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 10.3.1, si conclude che f è continua a destra in x_0;
  2. f sia derivabile solo a sinistra in x_0, cioè si abbia per ipotesi solo che esiste finita la derivata sinistra $f'_-(x_0)$: allora, ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 10.3.1, si conclude che f è continua a sinistra in x_0.

Derivate e operazioni su funzioni

I calcoli sviluppati nella Sezione 10.2 mostrano che la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale non è lo strumento più agevole per il calcolo delle derivate. Come nel caso della teoria dei limiti, anche per il calcolo delle derivate si dispone di alcuni fondamentali risultati sul legame fra l'operazione di derivazione e la somma/prodotto/quoziente/composizione/inversione di funzioni. Omettiamo la dimostrazione di questo risultato: essa discente facilmente dall'applicazione della definizione di derivata.

Teorema 10.3.3 (Algebra delle derivate)**.** *Siano f, $g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ un punto interno ad I, e $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } x_0.$$

Allora,

- *la funzione somma $f + g$ è derivabile in x_0, e vale*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{10.3.1}$$

- *la funzione cf è derivabile in x_0, e vale*

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0); \tag{10.3.2}$$

- *la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile in x_0, e vale*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0); \tag{10.3.3}$$

- *se $g(x_0) \neq 0$, la funzione quoziente $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e vale*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{10.3.4}$$

Osservazione 10.3.4. • Notiamo che ciascuna parte della tesi si articola a sua volta in due punti: il primo è un risultato di derivabilità della funzione somma/prodotto/quoziente, mentre il secondo è una formula per il calcolo della derivata.

- Le formule (10.3.1)–(10.3.4), che non dimostriamo, possono essere ricavate usando direttamente la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (per (10.3.1)–(10.3.2)), eventualmente operando anche alcune opportune manipolazioni algebriche (per (10.3.3)–(10.3.4)).

Esempio 10.3.5. 1. La funzione $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$, con dominio $D_f = (0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$, e, applicando le formule (10.2.5), (10.2.6), (10.3.1) e (10.3.2), si ha

$$f'(x) = 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) - 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2} \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

2. La generica funzione polinomiale $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ è derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata

$$P'(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

3. La funzione $f(x) = (x^2 + 3\sqrt{x})(x^{-3} - 4x^3)$, con dominio $D_f = (0, +\infty)$, è derivabile su $(0, +\infty)$, e, applicando le formule (10.2.7), (10.3.1), (10.3.2), e (10.3.3) si ha

$$f'(x) = \left(2x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)(x^{-3} - 4x^3) + (x^2 + 3\sqrt{x})\left(\frac{3}{x^4} - 12x^2\right) \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

4. La funzione $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2x^4+1}$, con dominio $D_f = \mathbb{R}$, è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(2x^4+1) - 8\sqrt[3]{x}\,x^3}{(2x^4+1)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Esempio 10.3.6 (Derivata della funzione tangente)**.** La funzione $f(x) := \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, con dominio $D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, è derivabile in ogni $x \in D_{\tan}$, con (usando la formula (10.3.4) e le derivate di sin e cos),

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \qquad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

Esempio 10.3.7 (Derivata della funzione $\log_a$, con $a > 0$, $a \neq 1$)**.** Sia $a > 0$, $a \neq 1$, e si consideri la funzione $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Si ha che

$$\log_a \text{ è derivabile su } (0, +\infty), \text{ e } \quad \log_a'(x) = \log_a(e)\frac{1}{x} \quad \forall\, x \in (0, +\infty). \tag{10.3.6}$$

La (10.3.6) si dimostra osservando che, per la proprietà di cambiamento di base dei logaritmi,

$$\forall\, a > 0,\ a \neq 1 \quad \log_a(x) = \log_a(e) \cdot \log_e(x) = \log_a(e) \cdot \ln(x) \quad \forall\, x > 0.$$

Allora la (10.3.6) segue dalla formula per la derivata di ln e dalla (10.3.2).

Derivabilità della composizione di funzioni.

Teorema 10.3.8. *Siano $g : I_g \to \mathbb{R}$ e $f : I_f \to \mathbb{R}$ (con I_g, I_f intervalli non vuoti) tali che $\mathrm{im}(g) \cap I_f \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in I_g$ un punto interno a I_g, e supponiamo che g sia derivabile in x_0. Supponiamo che $g(x_0)$ sia un punto interno a I_f, e che f sia derivabile in $g(x_0)$. Allora, $f \circ g$ è derivabile in x_0, e vale la formula*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,. \tag{10.3.7}$$

Chiaramente, questo risultato si estende, con ovvie modifiche, al caso in cui si debba derivare la composizione di un numero N di funzioni, $N \geq 1$. Per esempio, si ha che, date tre funzioni derivabili sui loro domini $g : I_g \to \mathbb{R}$, $f : I_f \to \mathbb{R}$, $h : I_h \to \mathbb{R}$, (I_g, I_f e I_h intervalli aperti, cosicché tutti i loro punti sono interni) tali che la composizione $h \circ f \circ g$ sia ben definita, la funzione $h \circ f \circ g$ è derivabile, con

$$(h \circ f \circ g)'(x) = h'(f(g(x))) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \forall\, x \in I_g\,.$$

Esempio 10.3.9. 1. Calcoliamo la derivata della funzione $h(x) = \cos(x^3 - 3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Si vede immediatamente che h è data dalla composizione $f \circ g$, con $g(x) = x^3 - 3x$ e $f(x) = \cos(x)$. Essendo g e f funzioni derivabili su $\mathbb{R}$, concludiamo che la funzione h è anch'essa derivabile su $\mathbb{R}$, con derivata data dalla formula (10.3.7). Pertanto

$$h'(x) = (-\sin(x^3 - 3x))(3x^2 - 3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Calcoliamo la derivata della funzione $k(x) = \sin^2\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)$, $x \in \mathbb{R}$, che è data dalla composizione di quattro funzioni. Infatti, $k = j \circ h \circ f \circ g$, con $g(x) = x^4 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ per ogni $x > 0$, $h(x) = \sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $j(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si vede subito che la composizione $j \circ h \circ f \circ g$ è ben definita, ed è una funzione derivabile, in quanto tutte le funzioni componende sono derivabili sui rispettivi domini. Pertanto

$$k'(x) = 2\sin\left(\ln\left(x^4+1\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 10.3.10 (Derivata della funzione a^x, con $a > 0$)**.** Sia $a > 0$, e si consideri la funzione a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè l'esponenziale di base a). Per calcolarne la derivata, usiamo la relazione di inversione fra logaritmo in base e e l'esponenziale exp, cioè

$$y = \exp(\ln(y)) \quad \forall\, y \in (0, +\infty).$$

Allora

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x\ln(a)) = e^{x\ln(a)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Applicando la (10.3.7), otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{10.3.8}$$

Derivata della funzione inversa. Consideriamo una funzione

$$f : I \to \mathbb{R}\,, \quad f \text{ invertibile e continua su } I. \tag{10.3.9}$$

Per il Teorema dei valori intermedi, concludiamo che $\mathrm{im}(f)$ è un intervallo J. La funzione inversa f^{-1} è quindi definita su J, e assume valori nell'intervallo I, verificando

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in (a, b)\,. \tag{10.3.10}$$

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti affinché f^{-1} sia a sua volta derivabile.

Teorema 10.3.11. *Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ verifichi la* (10.3.9)*. Sia $x_0 \in I$ (interno) tale che f è derivabile in x_0, con derivata $f'(x_0) \neq 0$. Allora, f^{-1} è anche derivabile in $f(x_0)$, e vale*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{10.3.11}$$

In particolare, concludiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è invertibile e derivabile su I e se $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, allora $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \doteq J \to I$ è a sua volta derivabile su J, con derivata

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall\, y \in \mathrm{im}(f) = J\,. \tag{10.3.12}$$

♣ Il lettore tenga comunque presente che la formula per la derivata della funzione inversa (cioè la (10.3.11)) vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0) = \pm\infty$. In tal caso si avrà

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 \qquad &\Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = \pm\infty, \\ f'(x_0) = \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = 0. \end{aligned}$$

Dopodiché, se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} **è derivabile in** $f(x_0)$.

Per esempio, usando la (10.3.12) ritroviamo la formula (10.2.11) per la derivata della funzione ln, che è l'inversa dell'esponenziale di base e: in effetti, tenendo conto della (10.2.10), si ha

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y} \qquad \forall\, y \in (0, +\infty)\,.$$

Esempio 10.3.12 (Derivate delle funzioni trigonometriche inverse). 1. Ricordiamo che la funzione $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è l'inversa della restrizione della funzione (derivabile) sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ora osserviamo che per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si ha $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Allora segue dal Teorema 10.3.11 che la funzione arcsin è derivabile sull'insieme $\{y \in [-1,1] : y = \arcsin(x),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ (cioè sull'insieme immagine della restrizione di sin a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), e questo insieme coincide con $(-1,1)$. In conclusione, si ha che

$$\begin{aligned} &\text{arcsin è derivabile su } (-1,1), \text{ e} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in (-1,1)\,, \end{aligned}$$

ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $\sin' = \cos$, la terza dall'identità fondamentale della trigonometria e dal fatto che, essendo $x \in (-1,1)$, $\arcsin(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ e la restrizione di cos a $(-\pi/2, \pi/2)$ assume valori positivi, di modo che dall'identità della trigonometria possiamo ricavare la formula $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$ per ogni $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Infine, l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\sin(\arcsin(x)) = x$ per ogni $x \in (-1,1)$.

2. Allo stesso modo, si verifica che la funzione $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ (inversa della restrizione della funzione (derivabile) cos all'intervallo $[0,\pi]$), è derivabile sull'intervallo $(-1,1)$ e verifica

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \\ &= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in (-1,1) \quad , \end{aligned}$$

ove abbiamo usato che, essendo $x \in (-1,1)$, $\arccos(x) \in (0,\pi)$, cosicché, visto che sin assume valori positivi se ristretta a $(0,\pi)$, dall'identità della trigonometria si ha che $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}$ per ogni $x \in (-1,1)$.

3. Consideriamo $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, cioè l'inversa della restrizione di tan a $(-\pi/2, \pi/2)$. Siccome $\tan'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(\tan)$ (in effetti, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(\tan)$), si vede che arctan è derivabile su $\mathbb{R}$, con

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

ove abbiamo usato la formula (10.3.5) per la derivata di tan.

10.4 Classificazione dei punti di non derivabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ un punto interno a I. Supponiamo che

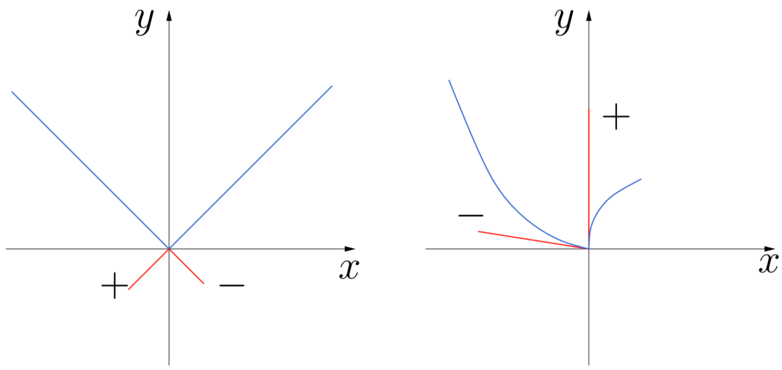
$$f \textit{ sia continua in } x_0, \textit{ e che } f \textit{ non sia derivabile in } x_0.$$

Allora, possono presentarsi le seguenti situazioni:

1. *il punto x_0 è angoloso per f* se

$$\begin{aligned} \exists\, f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}\,, \quad \exists\, f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}\,, \quad &\text{almeno una fra } f'_+(x_0) \text{ e } f'_-(x_0) \text{ è finita, e} \\ &f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \end{aligned} \tag{10.4.1}$$

(in particolare, $\nexists\, f'(x_0)$). Ecco due esempi grafici:



Per esempio, il punto $x_0 = 0$ è angoloso per la funzione $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Anche la funzione

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0, \\ x^{1/3} & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

ha in 0 un punto angoloso, in quanto $g'_-(0) = 0$ e $g'_+(0) = +\infty$.

2. *x_0 è un punto*[3] *a tangente verticale per f* se

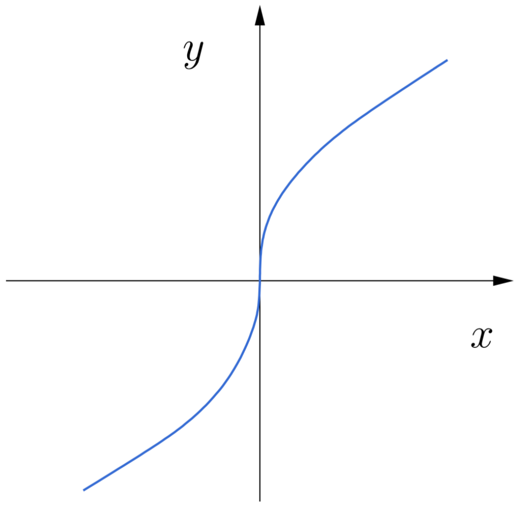
$$\exists\, f'(x_0) = +\infty\,, \quad \text{o} \quad \exists\, f'(x_0) = -\infty. \tag{10.4.2}$$

Per esempio, la funzione

$$f(x) = x^{1/3} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

è tale che $f'(0) = +\infty$ (in effetti, $f'(0) = \lim_{h\to 0} h^{1/3}/h = \lim_{h\to 0} h^{-2/3} = +\infty$). Il punto 0 è a tangente verticale per f.

[3]si usa anche la locuzione *flesso a tangente verticale*

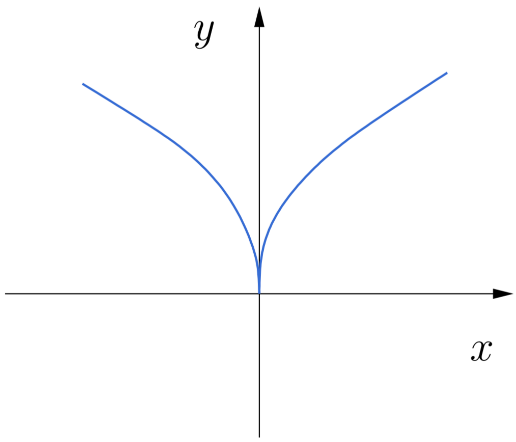


Analogamente, si verifica immediatamente che la funzione $g(x) = -x^{1/3}$, con $x \in \mathbb{R}$, ha $g'(0) = -\infty$. Anche in questo caso, il punto 0 è a tangente verticale per g.

3. *il punto* x_0 *è una cuspide per* f se

$$\exists\, f'_+(x_0)\,, \quad \exists\, f'_-(x_0)\,, \quad \text{entrambe sono infinite, e} \quad f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \tag{10.4.3}$$

(in particolare, $\nexists\, f'(x_0)$).



Per esempio, la funzione $f(x) = x^{2/3}$, con dominio $\mathbb{R}$, ha una cuspide in $x_0 = 0$, in quanto

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1/3}} = +\infty, \quad \text{e} \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{1/3}} = -\infty.$$

Chiaramente, la funzione $g(x) = -x^{2/3}$ ha anch'essa in 0 un punto di cuspide, con caratteristiche opposte: $g'_+(0) = -\infty$ e $g'_-(0) = +\infty$.

Il lettore abbia ben chiaro che se x_0 è un punto angoloso o un punto di cuspide, **non esiste** $f'(x_0)$!

Esempio 10.4.1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{1/3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ \arcsin(x) - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x \in (-1,1), \\ -\pi & \text{se } x = -1, \\ (x+1)^{4/5} - \pi & \text{se } x < -1. \end{cases} \tag{10.4.4}$$

- Osserviamo che f è continua su $\mathbb{R}$: in effetti,
  - f è continua su $(1,+\infty)$, in quanto composizione di funzioni continue;
  - si ha
  $$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/3} = 0 \\ f(1) = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$
  e quindi f è continua in 1;
  - f è continua su $(-1,1)$, in quanto arcsin è ivi continua e f si ottiene traslando arcsin;
  - si ha
  $$\begin{cases} \lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} \left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \\ f(-1) = -\pi \\ \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} \left((x+1)^{4/5} - \pi\right) = -\pi \end{cases}$$
  e quindi f è continua in -1;
  - f è continua su $(-\infty,-1)$, in quanto data dalla differenza e composizione di funzioni continue.
- Osserviamo che f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$: in effetti,
  - f è derivabile su $(1,+\infty)$, in quanto composizione di funzioni derivabili;
  - f è derivabile su $(-1,1)$, in quanto arcsin è ivi derivabile e f si ottiene traslando arcsin;
  - f è derivabile su $(-\infty,-1)$, in quanto data dalla differenza e composizione di funzioni derivabili.
- Classifichiamo, dal punto di vista della derivabilità, i punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$:
  - f non è derivabile in $x_1 = 1$: in effetti,
  $$\begin{aligned} f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h-1)^{1/3}-0}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{1/3}-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty, \end{aligned}$$
  e
  $$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\arcsin(1+h)-\frac{\pi}{2}}{h} = +\infty$$
  come vedremo nell'Esempio 10.7.4 fra qualche pagina. Quindi $\exists\, f'(1) = +\infty$ e f ha in $x_1 = 1$ un punto a tangente verticale.

– f non è derivabile in $x_2 = -1$: in effetti,

$$\begin{aligned} f'_+(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+h) - \frac{\pi}{2} + \pi}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\arcsin(-1+h) + \frac{\pi}{2}}{h} = +\infty \end{aligned}$$

come vedremo nell'Esempio 10.7.4 fra qualche pagina, e

$$\begin{aligned} f'_-(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(-1+h+1)^{4/5} - \pi - (-\pi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{4/5}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^{1/5}} = -\infty. \end{aligned}$$

come vedremo nell'Esempio 10.7.4 fra qualche pagina. Quindi f ha in $x_2 = -1$ una cuspide. Si noti che $\nexists\, f'(-1)$.

Non tutti i punti con comportamento 'patologico' dal punto di vista della derivabilità possono essere classificati come punti angolosi/a tangente verticale/cuspidi. Infatti, In tutti i casi classificati almeno una, fra derivata destra e derivata sinistra della funzione nel punto, esiste (finita o infinita). Nel prossimo esempio esibiremo una funzione f continua in un punto x_0 del suo dominio, ma tale che

$$\nexists\, f'_-(x_0), \quad \nexists\, f'_+(x_0)$$

Questo caso non rientra nella classificazione dei punti di non derivabilità che abbiamo dato.

Esempio 10.4.2. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

Notiamo che

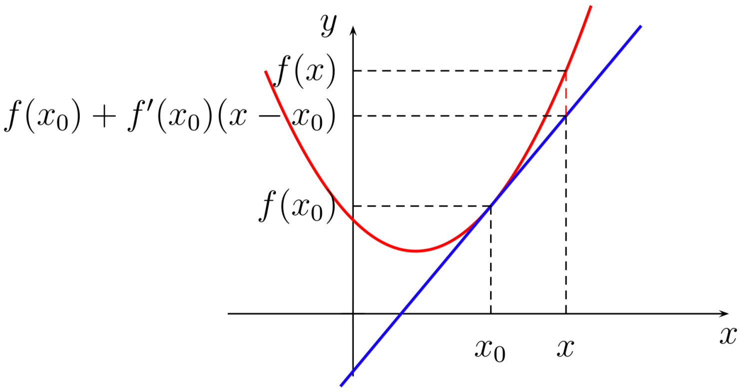
1. f è continua in $x_0 = 0$: infatti, per il Corollario 8.8.7 al Teorema dei due carabinieri si ha che
$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$
(essendo la funzione in questione data dal prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima);

2. $\nexists\, f'_+(0)$, infatti
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\cdot h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \longleftarrow \nexists$$
Analogamente si vede che $\nexists\, f'_-(0)$.

10.5 Differenziabilità

Dopo aver introdotto la derivabilità, presentiamo anche il fondamentale concetto di differenziabilità. Per motivarlo, ricordiamo che, dato un intervallo aperto I e una $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$, l'**equazione della retta tangente al grafico di f in** $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Poniamo ora

$$R(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Possiamo interpretare $R(x)$ come l'errore che si commette sostituendo a f la funzione P data $x \mapsto P(x) := f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Si noti che P è un polinomio di primo grado, che dà quindi luogo a una funzione lineare: il suo grafico è proprio dato dalla retta tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Segue dalla definizione di derivata $f'(x_0)$ che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right) = 0.$$

Quindi, approssimando $f(x)$ con la funzione polinomiale $P(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ si commette

$$\text{un errore } R(x) \text{che è } o(x - x_0) \text{ (cioè un infinitesimo di ordine superiore a } (x - x_0)) \text{ per } x \to x_0 \tag{10.5.1}$$

(equivalentemente, $R(x)$ è $o(|x - x_0|)$).

Questa osservazione motiva la seguente definizione generale:

Definizione 10.5.1. *Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è* differenziabile *in x_0 quando* <u>*esiste*</u> *$\lambda \in \mathbb{R}$ tale che valga lo sviluppo*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \textit{per } x \to x_0. \tag{10.5.2}$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ viene detto <u>*differenziale*</u> *di f nel punto x_0.*

Il **significato geometrico** della Definizione 10.5.1 è il seguente: se $f : I \to \mathbb{R}$ è <u>differenziabile</u> in x_0 con differenziale λ, allora, fra tutte le rette del fascio di centro $(x_0, f(x_0))$,

$$\begin{gathered}\text{per } x \to x_0, \text{ la retta } y = f(x_0) + \lambda(x - x_0) \text{ approssima} \\ \text{graf}(f) \text{ ad un ordine superiore a } |x - x_0|,\end{gathered} \tag{10.5.3}$$

cioè sostituendo a $f(x)$ il valore $f(x_0) + \lambda(x - x_0)$, per $\boxed{x \to x_0}$ si commette un errore che è un infinitesimo di ordine superiore a $|x - x_0|$.

Ora, dalla discussione che abbiamo sviluppato prima della Definizione 10.5.1 (e che ci ha portato a dedurre la (10.5.1)) si evince che la retta tangente a graf(f) in $(x_0, f(x_0))$ soddisfa la (10.5.3). Inoltre, non è difficile convincersi che <u>l'unica retta</u> $y = f(x_0)+\lambda(x-x_0)$ con la proprietà (10.5.3) è proprio la retta tangente. Questo fatto, intuitivo, è enunciato rigorosamente nel prossimo risultato.

Teorema 10.5.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Allora*

$$f \text{ è differenziabile in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ derivabile in } x_0.$$

In tal caso il differenziale di f è $\lambda = f'(x_0)$.

Dimostrazione. Per definizione, f è differenziabile in x_0 se e solo se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che valga la (10.5.2), cioè

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \;&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\lambda(x - x_0)}{x - x_0}\\ &\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \;\Leftrightarrow\; \exists\, f'(x_0) = \lambda\,.\end{aligned}$$

□

Visto che, per le funzioni di una variabile affrontate in questo corso, la differenziabilità coincide, di fatto, con la derivabilità, è legittimo chiedersi perché questo concetto sia stato introdotto. La ragione è la seguente: quando il lettore, nel corso di Analisi Matematica 2, incontrerà le funzioni di n variabili, egli/ella vedrà immediatamente che per funzioni di più variabili derivabilità e differenziabilità non coincidono. Il concetto di differenziabilità è quello più forte, fra i due, e sarà importante capirne bene la definizione, *anche andando a rivedere questa Sezione degli appunti di Analisi* 1...

10.6 Derivate di ordine successivo

Introduciamo ora la derivata della funzione derivata.

Definizione 10.6.1 (Derivate seconde)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo una funzione derivabile su I, cosicché è ben definita la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Sia $x_0 \in I$ un punto* interno *ad I. Chiamiamo* derivata seconda *di f in x_0 la derivata, se esiste, di f' in x_0, e la indichiamo con il simbolo $f''(x_0)$.*
2. *Diciamo che f è* derivabile due volte *in x_0 se f' è derivabile in x_0, cioè se la derivata seconda $f''(x_0)$ esiste finita.*
3. *Diciamo che f è* derivabile due volte in I *se f' è derivabile in I. In questo modo, resta definita la funzione derivata seconda $f'' : I \to \mathbb{R}$.*

Quando sono in gioco sia la derivata di f che la sua derivata seconda, ci si riferisce a f' come alla *derivata prima* di f.

Esempio 10.6.2. 1. La funzione

$$f(x) = x^2 + 4x - 2 + \cos(x) + 3\ln(x), \qquad x \in (0, +\infty),$$

è derivabile due volte su $(0, +\infty)$. Infatti, f è derivabile una volta su $\mathbb{R}$, con $f'(x) = 2x + 4 - \sin(x) + \frac{3}{x}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. A sua volta, f' è derivabile su $(0, +\infty)$, con $f''(x) = 2 - \cos(x) - \frac{3}{x^2}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

2. La funzione $f(x) = e^x$ è derivabile due volte su $\mathbb{R}$, con $f''(x) = f'(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. La funzione

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

è derivabile su $\mathbb{R}$. Infatti, essa è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e verifichiamo la derivabiltà di f in $x_0 = 0$ con la definizione

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = 0\,.$$

Allora f' è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -2x & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad f'(x) = 2|x|\,.$$

Siccome f' è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concludiamo che f è derivabile due volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per *induzione* possiamo definire la derivata di ordine k di f.

Definizione 10.6.3 (Derivata k-esima)**.** *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $k \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile k volte e che la sua derivata di ordine k sia a sua volta derivabile: diciamo allora che f è derivabile $k+1$ volte e chiamiamo derivata $(k+1)$-esima di f la derivata della derivata k-esima di f.*

L'indice k è detto l'<u>ordine di derivazione</u>.

Diciamo che f è infinitamente derivabile quando è derivabile k volte per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Difatti, possiamo definire anche la *derivata* 0*-ima* di f (cioè la derivata di ordine 0), ponendo

$$\boxed{f^{(0)} := f}\,.$$

Esempio 10.6.4. 1. Data $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$f^{(k)}(x) = a^x (\ln(a))^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Questa formula si dimostra per induzione:

- caso iniziale: $f^{(0)}(x) = f(x) = a^x = a^x(\ln(a))^0$ è verificato;
- passo induttivo: supponendo la validità della formula per $f^{(k)}$, vediamo che

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x(\ln(a))^k) = a^x \ln(a) \cdot (\ln(a))^k = a^x(\ln(a))^{k+1}\,.$$

2. Data $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, Allora $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(4k)}(x) = \sin x, \qquad f^{(4k+1)}(x) = \cos x,$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

Queste formule si calcolano facilmente per $k = 1$ e poi si dimostrano per induzione.

Introduciamo ora le **proprietà di regolarità** e le classi di funzioni C^k.

Definizione 10.6.5 (Funzioni C^k)**.** *Sia I intervallo. Per $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con $\mathrm{C}^k(I)$ l'insieme*

$$\mathrm{C}^k(I) = \big\{ f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ è derivabile } k \text{ volte su } I, \text{ e } \\ f^{(k)} : I \to \mathbb{R} \text{ è continua su } I \big\}.$$

Ogni $f \in \mathrm{C}^k(I)$ è detta funzione di classe C^k su I.

Quindi:

- $C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;
- $C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I, con $f' : I \to \mathbb{R}$ continua su I;
- $C^2(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili due volte su I, con $f'' : I \to \mathbb{R}$ continua su I.....

Si ha $\forall\, k \in \mathbb{N}$
$$C^k(I) \subset C^{k-1}(I).$$
Infatti, se f è di classe C^k su I, in particolare f è derivabile k volte su I, cioè $f^{(k-1)}$ è derivabile su I, quindi in particolare $f^{(k-1)}$ è continua su I, cioè f è di classe C^{k-1} su I. L'inclusione $C^k(I) \subset C^{k-1}(I)$ è **stretta**. Vediamolo nel seguente

Esempio 10.6.6. Le inclusioni
$$\ldots \subset C^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \text{ sono strette.}$$
Abbiamo visto che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non ammette derivata in $x_0 = 0$ ($\nexists\, f'(0)$). Quindi $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

La funzione
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
è continua su $\mathbb{R}$ (si vede come per f). Inoltre,
$$\exists\, g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$
Si ha quindi
$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0\,. \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Si ha quindi che g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Ma g' non è continua in $x_0 = 0$ poiché $\nexists \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, e quindi $\nexists \lim_{x \to 0} g'(x)$.

Consideriamo ora la funzione
$$j(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$
Essa è continua su $\mathbb{R}$ (si vede come per f). Inoltre,
$$\exists\, j'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{j(h) - j(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$
Si ha quindi
$$j'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0\,. \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
ed è immediato vedere che j' è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e che j' è continua in $x_0 = 0$. Quindi $j \in C^1(\mathbb{R})$. Invitiamo il lettore a verificare che $j \notin C^2(\mathbb{R})$.

Proprietà di struttura degli spazi $\mathrm{C}^k(I)$: Ragionando per induzione, si estende il teorema di linearità alle derivate k-esime. In particolare,

$$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{C}^k(I), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathrm{C}^k(I).$$

Definizione 10.6.7 (Funzioni C^∞)**.** *Sia I intervallo. Denotiamo con $\mathrm{C}^\infty(I)$*

$$\mathrm{C}^\infty(I) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{C}^k(I) = \Big\{ f : I \to \mathbb{R} : \boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}} \ f \text{ è derivabile } k \text{ su } I, \text{ e } f^{(k)} : I \to \mathbb{R} \text{ è continua su } I \Big\}.$$

- I polinomi, la funzione esponenziale a^x $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$, le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, appartengono a $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- La funzione $\log_a x$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ appartiene a $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$.

10.7 Il teorema di De l'Hôpital

Il risultato che presenteremo è, di fatto, un complemento alla teoria dei limiti, e più precisamente al problema della risoluzione delle forme indeterminate di tipo quoziente $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$. Naturalmente, esso si applica quindi anche alla risoluzione delle f.i. di tipo esponenziale che, come visto nella Sezione 8.7, sono riconducibili a f.i. quoziente.

La dimostrazione del seguente risultato è omessa.

Teorema 10.7.1 (De l'Hôpital (I))**.** *Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0\,, \tag{10.7.1}$$

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } (a,b), \text{ con } g'(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \tag{10.7.2}$$

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{10.7.3}$$

Allora, esiste il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{10.7.4}$$

♣ L'enunciato del teorema continua a valere se al limite $\lim_{x\to a^+}$ viene sistematicamente sostituito il limite $\lim_{x\to b^-}$, oppure il limite ("bilatero") $\lim_{x\to x_0}$, oppure (nel caso in cui le funzioni f e g siano definite su semirette) i limiti $\lim_{x\to+\infty}$ o $\lim_{x\to-\infty}$.

Osservazione 10.7.2. Osserviamo che la tesi si compone di due parti: innanzitutto, viene enunciata l'esistenza del limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e poi il suo calcolo viene ricondotto al calcolo del limite del **quoziente fra le derivate** $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, sotto la condizione che quest'ultimo limite esista!

Esempio 10.7.3 (Ritroviamo i limiti notevoli). Usando il teorema di De l'Hôpital, è possibile dimostrare i limiti notevoli dati nelle (8.7.4)–(8.7.8). Per esempio, si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1\,,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1\,,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,
\end{aligned}
$$

ove il simbolo $\overset{H}{=}$ indica che in quel passaggio viene applicata la formula (10.7.4). Si ha anche

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

il che mostra che può essere necessario applicare il teorema di De l'Hôpital più volte.

Esempio 10.7.4. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\arcsin(1+x)-\frac{\pi}{2}}{x}.$$

Si noti che si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, alla quale applichiamo il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\arcsin(1+x)-\frac{\pi}{2}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}}}{1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}} = +\infty.$$

Allo stesso modo risolviamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ associata a

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}}{x}$$

e dimostriamo che (**esercizio!**)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}}{x} = +\infty.$$

Osservazione 10.7.5. Tutte le ipotesi del teorema sono necessarie. In particolare, se valgono le (10.7.1)–(10.7.2) ma non la (10.7.3), la (10.7.4) è, in generale, falsa, come mostra il seguente controesempio: consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,. \tag{10.7.5}$$

Vediamo che si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ora consideriamo il limite del rapporto fra le derivate del numeratore e del denominatore: si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 0^+}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,,$$

e tale limite non esiste, in quanto $\nexists \lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Se applicassi (erroneamente) l'uguaglianza (10.7.4) data dal teorema di De l'Hôpital, concluderei che il limite in (10.7.5) non esiste. **Invece, il limite in** (10.7.5) **esiste,** poiché

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

ove la seconda uguaglianza segue dal fatto che la funzione $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata, mentre la funzione $x\mapsto x$ è infinitesima per $x\to 0^+$.

Diamo ora la versione del Teorema di De l'Hôpital relativa alla risoluzione delle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Anche in questo caso, enunceremo il teorema solo per limiti destri, ma precisiamo che esso vale anche per limiti sinistri, per limiti "bilateri", e per limiti per $x \to \pm\infty$.

Teorema 10.7.6 (De l'Hôpital (II))**.** *Siano a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty\,, \tag{10.7.6}$$

$$f \text{ e } g \text{ siano derivabili in } (a,b), \text{ con } g'(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \tag{10.7.7}$$

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{10.7.8}$$

Allora, esiste il limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, e si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{10.7.9}$$

Osserviamo che la (10.7.6) significa che la funzione f e la g devono tendere, per $x \to a^+$, o a $+\infty$ o a $-\infty$ (dando per l'appunto origine a una forma indeterminata $\pm\infty/\pm\infty$). In particolare, osserviamo che f e g possono tendere a due infiniti di segno diverso.

Esempio 10.7.7.

1. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$
In effetti,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty\,.$$
In generale, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, e per ogni base $a > 1$ si ha che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \tag{10.7.10}$$
(si noti che, se k è un numero naturale, la (10.7.10) si dimostra applicando k volte la formula (10.7.9)).

2. Si ha per ogni $k > 0$ e per ogni $b > 1$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log_b(x)} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b(x)}{x^k} = 0\,. \tag{10.7.11}$$
Per esempio, verifichiamolo nel caso $k = 1/2$ e $b = e$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{\ln(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{x^{-1/2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^{1/2} = +\infty\,.$$

3. Come ovvio corollario della (10.7.10) e della (10.7.11) abbiamo che per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 1$ si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\log_b(x)} = +\infty\,, \qquad \text{da cui} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b(x)}{a^x} = 0\,. \tag{10.7.12}$$

4. Si ha per ogni $k > 0$ e per ogni $b > 1$
$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = 0\,.$$
Si noti che il $\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x)$ da luogo a una forma indeterminata di tipo $0 \cdot \infty$, e non a una forma indeterminata di tipo quoziente. Per applicare il teorema di De l'Hôpital in una delle due forme viste, è quindi necessario ricondursi a una forma indeterminata di tipo quoziente. Questo può essere fatto in due modi:

- effettuando il cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$ (cosicché $\log_b(x) = -\log_b(z)$), ci si riconduce a una forma indeterminata di tipo ∞/∞ e si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = \lim_{z\to +\infty} \frac{-\log_b(z)}{z^k} = 0$$

(e l'ultima uguaglianza segue da (10.7.11));
- scrivendo il prodotto come un quoziente, cioè

$$x^k \log_b(x) = \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}},$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_b(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}}$$

(ci siamo così ricondotti a una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$), e applicando a quest'ultimo limite il teorema di De l'Hôpital. In effetti,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(x)}{\frac{1}{x^k}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_b(e)\frac{1}{x}}{-k\frac{1}{x^{k+1}}} = -\frac{\log_b(e)}{k} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{k+1}}{x} = -\frac{\log_b(e)}{k} \lim_{x\to 0^+} x^k = 0.$$

Il teorema del limite della derivata

Concludiamo questa sezione sul Teorema di De L'Hôpital con una sua applicazione di carattere teorico e, nel contempo, di interesse pratico. Alla base di tale applicazione vi è il seguente risultato, che enunciamo nel caso del limite destro; vale una versione analoga per il limite sinistro.

Teorema 10.7.8 (Teorema del limite della derivata)**.** *Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in a e derivabile in (a, b). Se esiste, finito o no, il limite $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, allora esiste anche $f'_+(a)$ e si ha che*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Dimostrazione. Si ha che

$$f'_+(a) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to a^+} f'(x),$$

ove (1) segue dalla definizione di derivata destra, e (2) dal Teorema di De L'Hôpital per le f.i. $\frac{0}{0}$. □

Sinteticamente, il Teorema 10.7.8 asserisce che (sotto opportune ipotesi) il limite destro della funzione derivata coincide con la derivata destra. Combinando il risultato per il limite destro con quello per il limite sinistro si ha che

se f è derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in x_0 e se
i due limiti $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ esistono,
allora $f'(x_0)$ esiste se e solo se $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, e in tal caso

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

Nella pratica, questo risultato ci permette di controllare (nelle situazioni in cui sia applicabile) l'esistenza della derivata in un punto andando a studiare i limiti destro e sinistro (in tale punto) della funzione derivata.

Esempio 10.7.9. In questo modo si vede che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ammette derivata in $x_0 = 0$: essa è continua in $x_0 = 0$; si calcola che $f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \neq 0$, e si vede che $\exists \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. Quindi $\exists\, f'(0) = 0$.

Iterando questo argomento è possibile dimostrare che f è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$, con $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Capitolo 11

Studio di funzioni

Anche la derivabilità, come la continuità, è un concetto locale: esso fornisce informazioni sul comportamento della funzione solo 'vicino' al punto considerato (in un suo intorno) e, viceversa, è sufficiente conoscere la funzione solo in un intorno di un punto per poter parlare, o meno, dell'esistenza della sua derivata in tale punto.

In questo capitolo ci occuperemo dello studio di proprietà *globali* di funzioni derivabili: proprietà, cioè, che valgono su tutto un intervallo. In particolare, saremo interessati a sviluppare strumenti teorici, basati sulle derivate, per determinare gli intervalli su cui una funzione è monotona oppure convessa/concava. Questo sarà finalizzato allo studio del grafico qualitativo delle funzioni.

Come nel caso della continuità (si veda il Capitolo 9), l'ipotesi di derivabilità e le proprietà delle derivate porteranno alla conclusione di proprietà di carattere *globale* solo se accompagnate dall'ipotesi che le funzioni in questione siano definite su intervalli, e quindi confineremo la discussione a *funzioni definite su intervalli*: nelle applicazioni concrete in cui il dominio di f sia costituito dall'unione di più intervalli, i risultati che daremo vanno applicati a ciascuno dei sottointervalli del dominio.

I risultati centrali del Capitolo sono i Teoremi di Lagrange, Rolle e Cauchy: da essi dedurremo gli enunciati su monotonia e segno della derivata prima, e convessità e segno della derivata seconda. Prima di entrare nel vivo della teoria, però, chiariamo il concetto di punto di estremo relativo, e vediamo un primo risultato che fornisce una condizione *necessaria* per la ricerca di punti di estremo relativo.

11.1 Estremi relativi

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che un punto $x_0 \in I$ si dice di *punto di massimo assoluto* per f su I se

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Analogamente, $x_0 \in I$ si dice di *punto di minimo assoluto* per f su I se

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall\, x \in I\,.$$

Genericamente, chiameremo *punti di estremo assoluto* i punti di massimo/minimo assoluto. I punti di estremo assoluto vengono anche detti *punti di estremo (massimo/minimo) globale*, in quanto nella loro definizione è insito un controllo del comportamento della funzione su tutto il dominio di definizione I. Questo distingue i punti di estremo globale da quelli di *estremo locale*, che ora introduciamo.

Definizione 11.1.1 (Estremi relativi (o locali))**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice*

- di minimo relativo (o locale) *per f su I se*

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - r, x_0 + r)\,; \tag{11.1.1}$$

- di massimo relativo (o locale) *per f su I se*

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - r, x_0 + r)\,. \tag{11.1.2}$$

Se x_0 è un punto di estremo (minimo o massimo) relativo (o locale) per f, il corrispondente valore $f(x_0)$ si chiama valore di minimo/massimo relativo (o locale)*.*

Chiaramente, se $x_0 \in I$ è un punti di massimo (minimo, risp.) assoluto, x_0 è anche un punto di massimo (minimo, risp.) relativo, mentre non vale il viceversa.

Esempio 11.1.2 (La funzione doppio pozzo)**.** La disamina del grafico della funzione doppio pozzo $W : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$W(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{4}$$

mostra che (si osservi che W è pari!)

$$\begin{aligned} W \ \ & \text{ha due punti di minimo relativo in } x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1 \\ & \text{e ha un punto di massimo relativo in } x_0 = 0. \end{aligned}$$

Chiaramente, x_1 (e, per parità, anche x_2) è un punto di minimo assoluto per W, in quanto

$$W(x_1) = 0 \leq W(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{4} \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

Invece, $x_0 = 0$ è solo un punto di massimo relativo, e non assoluto, per W, in quanto

$$W(0) = \frac{1}{4} < W(2) = \frac{9}{4}.$$

Esempio 11.1.3.

1. Consideriamo $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   I punti $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ sono di massimo relativo; $x_3 = 0$ è di massimo assoluto; la funzione non ammette punti di minimo, né relativo né assoluto.

2. Per la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \in]-1, 1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   $x_0 = 0$ è punto di minimo assoluto, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ sono di massimo relativo, e non ci sono punti di massimo assoluto.

3. Per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   $x_0 = 0$ è di minimo assoluto. Non ci sono punti di massimo assoluto.

4. Per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \le -1, \\ -x & \text{se } -1 < x < 1, \\ x-2 & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$
il punto $x_1 = -1$ è di massimo relativo, mentre $x_2 = 1$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

Nel seguito, svilupperemo il cosiddetto *metodo differenziale* per la ricerca degli (eventuali) punti di estremo relativo di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (con I intervallo!): più precisamente, troveremo delle condizioni necessarie/sufficienti che leghino il fatto che un dato punto è un estremo relativo per f alla derivata f'.

Il teorema di Fermat, o di annullamento della derivata

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definita su un intervallo chiuso (per fissare le idee) e limitato. Distinguiamo quattro categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x)$ (finita o infinita), $f'(x) \neq 0$;
4. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Il prossimo teorema, noto come *Teorema di Fermat*, ci permette, di fatto, di eliminare una di queste categorie dall'elenco dei punti da 'controllare' ai fini della ricerca dei punti di estremo. Lo enunciamo per funzioni definite su in generico intervallo I. Esso afferma che, se $x_0 \in I$, è un punto interno a I in cui esiste $f'(x)$ (cioè un punto nella categoria 3. o 4.), e x_0 è un punto di estremo relativo per f, necessariamente $f'(x_0) = 0$.

Definizione 11.1.4. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno in cui esiste la derivata. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 viene detto *punto critico (o stazionario)* per f.

Teorema 11.1.5 (Teorema di Fermat)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno. Supponiamo che $\exists\, f'(x_0)$.*

Se x_0 è punto di minimo o di massimo <u>relativo</u> per f su I,

allora $f'(x_0) = 0$.

Si noti che è stato solo supposto che nel punto x_0 esista la derivata $f'(x_0)$: non è stata richiesta la derivabilità (cioè che la derivata esista finita) in x_0.

Osserviamo che l'annullamento della derivata è <u>solo una condizione necessaria</u>, non sufficiente, affinché un dato punto (interno all'intervallo di definizione) x_0 sia di estremo relativo, come mostra il seguente

Esempio 11.1.6. 1. La funzione $f(x) := x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ha derivata $f'(x) = 3x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi l'unico punto critico di f è $x_0 = 0$. Osserviamo che, però, x_0 non è un punto di estremo relativo. Di fatto, f non ha alcun punto di estremo relativo.

2. La funzione
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
soddisfa $f'(0) = 0$ (si veda l'Esempio 10.6.6), ma il punto $x_0 = 0$ non è né di massimon né di minimo relativo.

Dimostrazione del Teorema di Fermat. Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia un punto di minimo relativo (la dimostrazione si sviluppa in modo del tutto analogo - verificarlo per **esercizio!** - nel caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo). Allora, per la (11.1.1) ed il fatto che x_0 è interno ad I si ha che esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Consideriamo ora il rapporto incrementale di f relativo al punto x_0, cioè il quoziente $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, con $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Si ha che

$$\text{per ogni } x \in (x_0, x_0 + r) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,. \tag{11.1.3}$$

In effetti, il numeratore è non negativo grazie alla (11.1.1), e d'altra parte il denominatore è strettamente positivo poiché stiamo prendendo x nell'intervallo $(x_0, x_0 + r)$. Allo stesso modo, si verifica che

$$\text{per ogni } x \in (x_0 - r, x_0) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,. \tag{11.1.4}$$

Passando al limite per $x \to x_0^+$ in (11.1.3), e per $x \to x_0^-$ in (11.1.4), si deduce che

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Poiché, d'altra parte, per ipotesi esiste $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (si ricordi il teorema che lega derivata e derivate unilatere), deduciamo che, necessariamente, $f'(x_0) = 0$. □

Notiamo che l'ipotesi che x_0 fosse un punto interno all'intervallo I ha giocato un ruolo chiave nella dimostrazione: questo ci ha permesso infatti di considerare "incrementi bilateri" relativi al punto x_0, e quindi di calcolare sia la derivata destra, sia la derivata sinistra di f in x_0. Nel caso in cui un punto di estremo relativo sia in uno degli estremi dell'intervallo di definizione, possiamo solo dare risultati sul segno della corrispondente "derivata unilatera". A questo proposito, diamo la seguente proposizione, la cui facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Proposizione 11.1.7. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Supponiamo che a sia un punto di estremo relativo per f e che esista $f'_+(a)$. Si ha che:*
   - *se a è un punto di massimo relativo per f, allora $f'_+(a) \leq 0$;*
   - *se a è un punto di minimo relativo per f, allora $f'_+(a) \geq 0$.*
2. *Supponiamo che b sia un punto di estremo relativo per f e che esista $f'_-(b)$. Si ha che:*
   - *se b è un punto di massimo relativo per f, allora $f'_-(b) \geq 0$;*
   - *se b è un punto di minimo relativo per f, allora $f'_-(b) \leq 0$.*

Applicazioni del Teorema di Fermat allo studio dei punti di estremo relativo. Ritorniamo a considerare un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Segue dal Teorema di Fermat che i punti di estremo relativo, se[1] esistono, devono ricadere in queste tre categorie di punti:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

[1] E ricordiamo che, se si suppone anche che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia continua, allora per il Teorema di Weierstrass essa ammetterà punti di estremo assoluto (che sono in particolare di estremo relativo)..

Il lettore presti quindi bene attenzione a questo fatto: i punti di estremo relativo non andranno ricercati solo nella categoria 3., ma anche nella 1. e nella 2., come dimostrano le funzioni dell'Esempio 11.1.3.

Chiaramente questo discorso si estende a funzioni definite su intervalli non necessariamente limitati: il teorema di Fermat garantisce allora che gli eventuali punti di estremo relativo vanno ricercati solo nelle categorie 2. e 3..

Allora una possibile strategia per la ricerca dei punti di estremo assoluto di f su $[a, b]$ potrebbe consistere nel considerare tutti i punti nelle tre suddette categorie, calcolare il valore di f in ciascuno di essi, e confrontare i valori ottenuti.

Esempio 11.1.8. Consideriamo la funzione $f(x) := x^2 - 2$, con dominio $D_f = [-3, 2]$. Essa è continua su $[-3, 2]$, chiuso e limitato, quindi ammetterà punti di estremo assoluto.

Si ha che $f(-3) = 7$, mentre $f(2) = 2$. Inoltre osserviamo che f è derivabile su $(-3, 2)$ (quindi la categoria 2. è vuota), con derivata $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in (-3, 2)$. Quindi f ha un unico punto di annullamento della derivata, dato da $x_0 = 0$. Siccome $f(0) = -2$, concludiamo che 0 è l'unico punto di minimo assoluto per f su $[-3, 2]$. D'altra parte, per confronto fra $f(-3)$ e $f(2)$ vediamo che $x_1 = -3$ è l'unico punto di massimo assoluto per f su $[-3, 2]$.

Osservazione 11.1.9. Il metodo appena illustrato ha due svantaggi: innanzitutto, consente di sviluppare la ricerca solo dei punti di estremo assoluto, e non dei punti di estremo relativo. Secondariamente, può essere disagevole, in quanto implica diversi conti (non solo la ricerca dei punti di annullamento della derivata, ma anche il calcolo di f nei punti delle categorie $1. - 3.$).

In effetti, il Teorema di Fermat, su cui è basato questo metodo, è un risultato relativamente debole, in quanto fornisce condizioni solo necessarie affinché un dato punto sia di estremo relativo.

Nel seguito, svilupperemo degli strumenti più potenti del Teorema di Fermat per la ricerca dei punti di estremo relativo di una data funzione f. In particolare, forniremo delle **condizioni sufficienti** che garantiscano che un dato punto stazionario è un punto di massimo o di minimo relativo, si veda il Teorema 11.3.7 alla fine della Sezione 11.3.

Per dimostrare il Teorema 11.3.7, ci baseremo alcuni risultati, relativamente al legame fra f e la sua derivata f', di natura diversa da quelli visti finora. Sostanzialmente, quest'ultimi risultati (si veda ad esempio il Teorema 11.1.5) hanno un carattere *locale*, in altri termini riguardano solo proprietà locali della funzione (cioè proprietà che valgono solo "vicino" a un punto).

Invece, vedremo nella prossima sezione dei risultati sul legame fra la derivata f' e proprietà *globali* di f (cioè, proprietà che non valgano solo "vicino" a un dato punto, ma globalmente su un intervallo). Segnatamente, ci stiamo riferendo al Teorema 11.3.1, al Teorema 11.3.3, e al Teorema 11.3.7. La dimostrazione di tali risultati sarà basata sul Teorema di Lagrange (anche detto *Teorema del valor medio*), che daremo insieme a due risultati ad esso equivalenti: il Teorema di Rolle e di Cauchy.

11.2 I teoremi di Lagrange, Rolle e Cauchy

Il teorema di Lagrange

Teorema 11.2.1 (Lagrange). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante*

$$f \text{ è continua in } [a, b] \ (f \in \mathrm{C}^0([a, b])), \tag{11.2.1a}$$

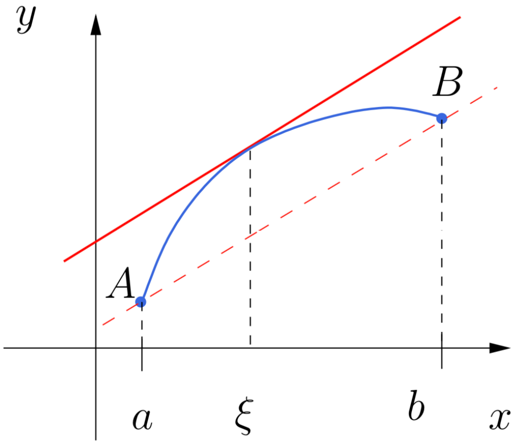
$$f \text{ è derivabile in } (a, b). \tag{11.2.1b}$$

Allora,

$$\exists\, c \in (a, b) : \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,. \tag{11.2.2}$$

Chiaramente il punto c di cui nella (11.2.2) "deve" trovarsi in (a, b), perché solo in (a, b) è stata richiesta la derivabilità di f.

Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange. Ricordiamo che la derivata di f in un dato punto è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel corrispondente punto del grafico. Osserviamo che, d'altra parte, il quoziente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della corda congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Allora, la tesi del Teorema di Lagrange è che, sotto le condizioni (11.2.1a)–(11.2.1b), esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ abbia coefficiente angolare uguale alla retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Quindi, esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ sia parallela alla retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Osservazioni sul Teorema di Lagrange. Il Teorema 11.2.1 garantisce solo **l'esistenza, e non l'unicità** dei punti c aventi la proprietà specificata dalla (11.2.2), come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 11.2.2.

1. Consideriamo la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2 \quad \forall\, x \in [-1, 1] .$$

In questo caso, $f(1) = f(-1) = 1$, ed esiste un unico punto x_0 tale che $f'(x_0) = (f(1) - f(-1))/(1 - (-1)) = 0$: essendo $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in [-1, 1]$, vediamo che $x_0 = 0$.

2. Consideriamo la funzione

$$W : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad W(x) := \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2 \quad \forall\, x \in [-2, 2] .$$

Ora, $W(-2) = W(2)$, quindi $(W(2) - W(-2))/(2 - (-2)) = 0$. Essendo $W'(x) = x^3 - x$, esistono tre punti $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, e $x_3 = 1$ tali che $W'(x_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$.

3. Consideriamo la funzione

$$F : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in [-2, -1] , \\ -1 & x \in (-1, 1) , \\ -x^2 & x \in [1, 2] \end{cases} .$$

Ora, $F(-2) = F(2)$, quindi $(F(2) - F(-2))/(2 - (-2)) = 0$. Osserviamo anche che F è continua su $[-2, 2]$ e derivabile su (-2,2)[2]. Inoltre, per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha che $F'(x) = 0$, quindi esistono infiniti punti che verifichino la (11.2.2).

[2] chiaramente F è derivabile sui singoli intervalli $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, e $(1, 2)$. Resta da controllare la derivabilità in $x = \pm 1$. Per esempio in $x = 1$ (essendo F pari, otterremo automaticamente anche la derivabilità in $x = -1$). A questo scopo, si verifichi (**Esercizio!**) che $F'_-(1) = 0 = F'_+(1)$.

Le ipotesi del Teorema 11.2.1 sono ottimali: in effetti, i seguenti esempi mostrano che è sufficiente togliere anche una sola di tali ipotesi perché la (11.2.2) non sia più verificata.

Esempio 11.2.3. 1. La funzione

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in [-1,0)\,, \\ 3 & x = 0\,, \\ -x^2 & x \in (0,1]\,, \end{cases}$$

è continua su $[-1,1] \setminus \{0\}$ e derivabile su $(-1,1) \setminus \{0\}$. Si ha $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, quindi in particolare $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$. D'altra parte, $f(-1) = f(1)$, e quindi $(f(1) - f(-1))/(1-(-1)) = 0$. Pertanto non esiste alcun punto che verifichi la (11.2.2).

2. La funzione

$$h : [0,2] \to \mathbb{R} \quad h(x) := \begin{cases} x+1 & x \in [0,2)\,, \\ \frac{1}{2} & x = 2 \end{cases},$$

è continua su $[0,2)$ e derivabile su $(0,2)$, con derivata $h'(x) = 1$ per ogni $x \in (0,2)$. Si ha che $(h(2) - h(0))/2 = -1/4$, quindi non esiste alcun $c \in (0,2)$ verificante la (11.2.2).

3. La funzione $g(x) = |x|$, con dominio $D_g = [-1,1]$, è continua su $[-1,1]$ e derivabile su $(-1,1) \setminus \{0\}$. Osserviamo che $g(-1) = g(1)$, quindi $(g(1) - g(-1))/(1-(-1)) = 0$. D'altra parte, g è derivabile su $(-1,1) \setminus \{0\}$, con $g'(x) = \mathrm{sign}(x)$ per ogni $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ (quindi $g'(x) = 1$ se $x \in (0,1)$ e $g'(x) = -1$ se $x \in (-1,0)$), e quindi non esiste alcun punto $c \in (-1,1)$ verificante la (11.2.2).

Il Teorema di Rolle

Per sviluppare la dimostrazione del Teorema di Lagrange, ci serviremo del seguente risultato.

Teorema 11.2.4 (Rolle)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ verificante*

$$f \text{ è continua in } [a,b] \ (f \in \mathrm{C}^0([a,b])), \tag{11.2.3a}$$

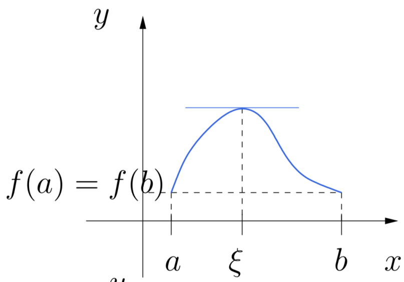
$$f \text{ è derivabile in } (a,b), \tag{11.2.3b}$$

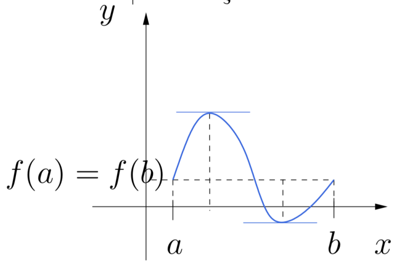
$$f(a) = f(b)\,. \tag{11.2.3c}$$

Allora,

$$\exists\, c \in (a,b) : \quad f'(c) = 0\,. \tag{11.2.4}$$

Osserviamo che il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange e, conseguentemente, si presta alla medesima interpretazione grafica.





Inoltre, valgono le medesime considerazioni fatte per il Teorema di Lagrange relativamente al fatto che tutte le ipotesi del Teorema di Rolle sono necessarie (peraltro, si noti che le funzioni ai punti (1) e (3) dell'Esempio 11.2.3 forniscono anche controesempi alla tesi del Teorema di Rolle qualora si indeboliscano le richieste di continuità/derivabilità).

Anche questo il teorema di Rolle garantisce solo l'esistenza, e non l'unicità, di punti di annullamento della derivata (si veda l'Esempio 11.2.2).

Dimostrazione. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, chiaramente f ha derivata identicamente nulla su $[a, b]$, e quindi la (11.2.4) è banalmente verificata.

Supponiamo allora che f non sia costante su $[a, b]$. Ora, essendo f continua su $[a, b]$, segue dal Teorema di Weierstrass che f ha almeno un punto di minimo assoluto $x_m \in [a, b]$ e almeno un punto di massimo assoluto $x_M \in [a, b]$. Dimostriamo che

$$x_m \in (a, b) \quad \text{o} \quad x_M \in (a, b)\,. \tag{11.2.5}$$

Per assurdo ciò sia falso, quindi $x_m,\, x_M \in \{a, b\}$. Segue dalla (11.2.3c) che

$$f(x_m) = f(x_M). \tag{11.2.6}$$

Tenendo conto della definizione di punto di minimo e punto di massimo assoluto, deduciamo dalla (11.2.6) che f è costante su $[a, b]$, contro la nostra ipotesi iniziale. Allora la (11.2.5) deve essere vera. Supponiamo per esempio che $x_m \in (a, b)$. Allora, per il Teorema di Fermat $f'(x_m) = 0$. Scegliamo quindi $c = x_m$. □

Dimostrazione del Teorema di Lagrange. Introduciamo la funzione ausiliaria

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right) \quad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Si noti che g è di fatto data dalla differenza fra f e la funzione (lineare) il cui grafico è la retta congiungente i punti del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
Osserviamo che:

- $g \in \mathrm{C}^0([a, b])$ (in quanto è data da somme/prodotti di funzioni continue su $[a, b]$);
- g è derivabile su (a, b) (in quanto è data da somme/prodotti di funzioni derivabili su (a, b));
- $g(a) = g(b) = 0$.

Allora g soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle. Essendo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall\, x \in (a, b)\,,$$

dalla (11.2.4) segue che esiste $c \in (a, b)$ tale che $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cioè la (11.2.2). □

Il Teorema di Cauchy

Concludiamo questa sezione con un risultato strettamente legato ai Teoremi di Rolle e Lagrange.

Teorema 11.2.5 (Cauchy)**.** *Siano f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificanti*

$$f \text{ e } g \text{ sono continue in } [a, b], \tag{11.2.7a}$$

$$f \text{ e } g \text{ sono derivabili in } (a, b). \tag{11.2.7b}$$

Allora

$$\exists\, c \in (a, b) \text{ tale che } f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)). \tag{11.2.8}$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare il teorema di Rolle alla funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Segue dai teoremi sulle classi di funzioni continue e derivabili che $h \in \mathrm{C}^0([a, b])$, e che h è derivabile in (a, b). Inoltre, è immediato vedere che $h(a) = h(b)$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$, da cui la (11.2.8). □

Legami fra i Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Abbiamo visto che dalla dimostrazione del Teorema di Rolle discendono quelle dei Teoremi di Lagrange e Cauchy. Quindi la validità del Teorema di Rolle implica quella dei Teoremi di Lagrange e Cauchy, cioè *Rolle 'implica' Lagrange e Cauchy.*

D'altra parte, abbiamo osservato che il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange (quello in cui $f(a) = f(b)$), pertanto la validità del Teorema di Lagrange implica quella del Teorema di Rolle, cioè *Lagrange implica Rolle.*

A sua volta, *Lagrange è implicato da Cauchy*: infatti, è un caso particolare del Teorema di Cauchy, con la scelta $g(x) = x$. Abbiamo quindi la seguente catena di implicazioni

$$\text{Rolle} \;\Rightarrow\; \text{Cauchy} \;\Rightarrow\; \text{Lagrange} \;\Rightarrow\; \text{Rolle},$$

da cui si deduce che i tre teoremi sono equivalenti.

11.3 Applicazioni del Teorema di Lagrange allo studio di proprietà globali

Come abbiamo già accennato, le principali applicazioni del teorema di Lagrange sono risultati che permettono di dedurre proprietà globali di una data funzione a partire da proprietà della sua derivata. Si noti che, nelle dimostrazioni di questi risultati, il Teorema di Lagrange non viene applicato su tutto l'intervallo di definizione, ma su opportuni sottointervalli.

Il teorema della derivata nulla

Teorema 11.3.1. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sul (a,b). Supponiamo che*

$$f'(x) = 0 \qquad \forall\, x \in (a,b)\,. \tag{11.3.1}$$

Allora, f è costante su (a,b), cioè esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = K$ per ogni $x \in (a,b)$.

Osservazione 11.3.2. Osserviamo che l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è cruciale: in effetti, la funzione sign (cf. la (8.3.3)) è derivabile sul suo dominio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con derivata nulla. Ma sign non è costante.

Un altro esempio è dato dalla funzione

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ definita da } f(x) := \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

che verifica $f'(x) \equiv 0$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma che non è costante, dacché

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, fissato $\bar{x} \in (a,b)$, si ha che

$$f(x) = f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in (a,b) \tag{11.3.2}$$

(chiaramente supporremo $\bar{x} \neq x$). Fissiamo allora, per esempio, $x \in (\bar{x}, b)$ e applichiamo il teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[\bar{x}, x] \subset (a,b)$. È chiaro che tale restrizione soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 11.2.1: in quanto restrizione di una funzione derivabile su (a,b), essa è derivabile (e quindi in particolare continua) su $[\bar{x}.x]$. Troviamo quindi $c \in (\bar{x}, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(c) = 0\,,$$

grazie alla (11.3.1). Quindi $f(x) - f(\bar{x}) = 0$. Essendo x arbitrario in $(\bar{x}, b)$, concludiamo che $f(x) = f(\bar{x})$ per ogni $x \in (\bar{x}, b)$. Ragionando allo stesso modo per ogni $x \in (a, \bar{x})$, concludiamo dunque la (11.3.2). □

Il lettore si chiederà dove sia stata usata, nella dimostrazione appena vista, l'ipotesi che il dominio della funzione sia un intervallo (a,b). Questa condizione è stata usata per garantire che, *fissati arbitrariamente $x < \bar{x}$, l'intervallo $[\bar{x}, x]$ è ancora contenuto in* (a,b).

Monotonia e segno della derivata

Per facilitare la lettura, riprendiamo la definizione di funzione monotona data nel Capitolo 8.

Definizione. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che:*

(i) f è monotona non decrescente *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)\,; \tag{11.3.3}$$

(ii) f è monotona strettamente crescente *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,; \tag{11.3.4}$$

(iii) f è monotona non crescente *in A se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2)\,; \tag{11.3.5}$$

(iv) f è monotona strettamente decrescente *in* A *se:*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,. \tag{11.3.6}$$

Invitiamo il lettore a riflettere nuovamente sul fatto che la monotonia è una proprietà di tipo *globale*.

Il seguente risultato mette in relazione le proprietà di monotonia di una funzione derivabile con il segno della sua derivata.

Teorema 11.3.3. *Sia* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *una funzione derivabile. Allora:*

1. *f è monotona non decrescente su (a,b) se e solo se $f'(x)\ge 0$ per ogni $x\in(a,b)$;*
2. *f è monotona non crescente su (a,b) se e solo se $f'(x)\le 0$ per ogni $x\in(a,b)$;*
3. *se $f'(x)>0$ per ogni $x\in(a,b)$, allora f è strettamente crescente su (a,b);*
4. *se $f'(x)<0$ per ogni $x\in(a,b)$, allora f è strettamente decrescente su (a,b).*

Osservazione 11.3.4. Osserviamo che nei punti 3. e 4. non vale una doppia implicazione (si veda anche l'Osservazione 11.3.6): per esempio, la funzione $f(x)=x^3$, con $D_f=\mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma è falso che $f'(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$: infatti, $f'(0)=0$. Rimane però vero che $f'(x)=3x^2\ge 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Osservazione 11.3.5. Si noti che il Teorema 11.3.3 è solo vero sugli intervalli: per esempio, la funzione

$$\tan \quad \text{verifica} \quad \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}>0 \qquad \forall\, x\in \mathrm{dom}(\tan)=\mathbb{R}\setminus\Big\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Big\}$$

Però tan non è strettamente crescente su dom(tan), anzi sul suo dominio non gode di alcuna proprietà di monotonia. È però vero che, per ogni $k\in\mathbb{Z}$, la restrizione di tan a ogni intervallo $\big(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\big)$ è strettamente crescente.

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1. (la dimostrazione del punto 2. si sviluppa in modo analogo). Supponiamo che f sia non decrescente su (a,b): allora

$$\forall\, x_0\in(a,b) \qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0\,, \tag{11.3.7}$$

in quanto il rapporto incrementale ha segno positivo e il limite per $x\to x_0^+$ preserva il segno. Siccome f è derivabile in x_0, si ha che $f'(x_0)=f'_+(x_0)\ge 0$. Essendo x_0 arbitrario, concludiamo che la funzione derivata assume valori non negativi. Viceversa, dimostriamo che vale la (11.3.3). Fissiamo dunque $x_1,\, x_2\in I$ con $x_1<x_2$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1,x_2]$ (è facile vedere che tutte le ipotesi sono verificate). Concludiamo dunque che esiste $c\in(x_1,x_2)$ tale che

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,.$$

Essendo $f'(c)\ge 0$ (poiché per ipotesi f' assume valori non negativi), ed essendo $x_2>x_1$, concludiamo che, necessariamente, $f(x_2)\ge f(x_1)$.

Sviluppando proprio quest'ultimo argomento, si dimostra anche il punto 3. In effetti, fissiamo ancora $x_1,\, x_2\in I$ con $x_1<x_2$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x_1,x_2]$. Otteniamo che esiste $c\in(x_1,x_2)$ tale che

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,.$$

Essendo $f'(c)>0$ per ipotesi, ed essendo $x_2>x_1$, concludiamo che $f(x_2)>f(x_1)$. Si ragiona analogamente per il punto 4. □

Osservazione 11.3.6. In ultima analisi, la ragione per la quale non vale la doppia implicazione nel punto 3., e cioè stretta crescenza NON implica stretta positività della derivata, è la seguente: per ogni $x_0 \in (a, b)$, pur essendo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall\, x \in (x_0, b),$$

non si può concludere da questo la stretta positività di $f'_+(x_0)$, in quanto il passaggio al limite non preserva le disuguaglianze strette. Identiche considerazioni valgono in relazione al punto 4.

Applicazione allo studio dei punti di estremo relativo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che il Teorema di Fermat comporta che i punti "candidati" a essere di estremo relativo ricadono, tutti e soli, in queste tre categorie:

1. gli estremi a, b dell'intervallo di definizione;
2. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che $\nexists\, f'(x)$;
3. i punti interni $x \in (a, b)$ tali che esiste $f'(x) = 0$.

Il seguente risultato fornisce condizioni sufficienti affinché un assegnato punto $x_0 \in (a, b)$, punto critico per f oppure in cui non esiste la derivata f', sia di estremo relativo per f (di fatto, assoluto): sostanzialmente, per stabilire la natura di x_0 è sufficiente studiare il segno di f' (cioè la monotonia di f) nell'intorno di x_0.

Teorema 11.3.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario (o critico) per f (cioè $f'(x_0) = 0$), oppure tale che $\nexists\, f'(x_0)$. Si ha che*

1. *se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica*
$$f'(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in (a, x_0) \quad e \quad f'(x) \leq 0 \ \ \forall\, x \in (x_0, b)\,, \tag{11.3.8}$$
allora x_0 è un punto di massimo relativo per f su (a, b);
2. *se f è derivabile sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) e verifica*
$$f'(x) \leq 0 \ \ \forall\, x \in (a, x_0) \quad e \quad f'(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in (x_0, b)\,, \tag{11.3.9}$$
allora x_0 è un punto di minimo relativo per f su (a, b).

Dimostrazione. Dimostriamo per esempio che, se vale la (11.3.8), il punto x_0 è di massimo relativo per f. Fissiamo quindi $x \in (a, x_0)$ e applichiamo il Teorema di Lagrange alla restrizione di f all'intervallo $[x, x_0]$ (si noti che la restrizione di f a $[x, x_0]$ è continua -questo è garantito proprio dall'ipotesi che f sia continua su tutto l'intervallo (a, b)- e derivabile su (x, x_0), quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Lagrange). Allora concludiamo che esiste $c \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(c) \geq 0\,,$$

grazie alla (11.3.8). Essendo $x < x_0$, concludiamo che il numeratore deve essere $f(x_0) - f(x) \geq 0$, da cui $f(x) \leq f(x_0)$. Essendo x arbitrario, abbiamo che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (a, x_0)\,.$$

Ragionando in modo analogo, dimostriamo anche che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0, b)\,,$$

da cui la tesi. □

Esempio 11.3.8. Verifichiamo che la funzione $W : [-2, 2] \to \mathbb{R}$

$$W(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4} \quad \text{ha due punti di minimo assoluto in } x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1$$
$$\text{e ha un punto di massimo relativo in } x_0 = 0.$$

In effetti, $W'(x) = x^3 - x$ per ogni $x \in [-2, 2]$, e si vede subito che

$$W'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1, 0) \text{ o se } x \in (1, 2), \\ = 0 & \text{se } x = -1, \text{ o } x = 0, \text{ o } x = 1, \\ < 0 & \text{se } x \in (-2, -1) \text{ o se } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Applicando i Teoremi 11.3.3 e 11.3.7, concludiamo che W è strettamente decrescente su $(-\infty, -1)$ e strettamente crescente su $(-1, 0)$, pertanto il punto stazionario $x_1 = -1$ è di minimo relativo (discorsi identici si fanno per $x_2 = 1$). Analogamente, essendo W strettamente crescente su $(-1, 0)$ e strettamente decrescente su $(0, 1)$, deduciamo che $x_0 = 0$ è un punto di massimo relativo. Poiché $W(x_1) = W(x_2) = 0$ e $W(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-2, 2]$, x_1 e x_2 sono di fatto punti di minimo assoluto.

Esempio 11.3.9. Osserviamo che non si può rinunciare all'ipotesi che f sia continua sull'intervallo (a, b), come dimostra il seguente esempio: la funzione

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} -x^2 & x \in (-1, 0)\,, \\ -\frac{1}{2} & x = 0\,, \\ -x^2 - 1 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

è continua e derivabile su $(-1, 1) \setminus \{0\}$, e verifica $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, cosicché

$$f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in (-1, 0), \qquad f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (0, 1).$$

Si vede subito, però, che il punto $x_0 = 0$ non è di estremo relativo per f.

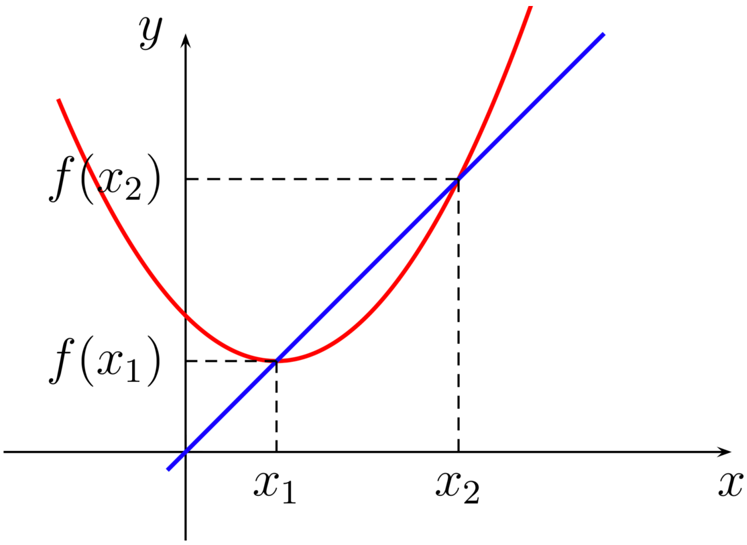
11.4 Convessità, concavità, e derivate seconde

Introduciamo un'altra proprietà *globale* delle funzioni. Come nel caso delle proprietà di monotonia, introduciamo sia la convessità/concavità sia la stretta convessità/concavità.

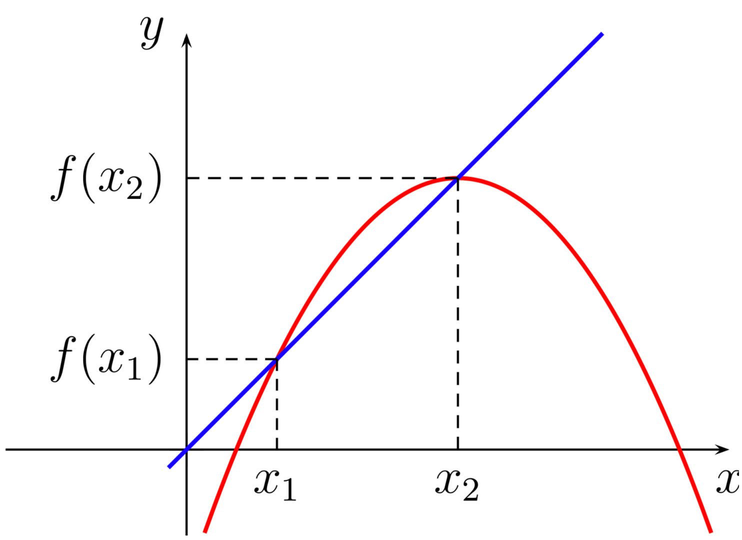
Definizione 11.4.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo.*

1. *Diciamo che f è* convessa *su I se per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ non sta al di sotto del grafico di f ristretta all'intervallo (x_1, x_2): in formule*
$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2).$$
2. *Diciamo che f è* strettamente convessa *su I se per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ sta strettamente al di sopra del grafico di f ristretta all'intervallo (x_1, x_2): in formule*
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2).$$
3. *Diciamo che f è* concava *su I se per ogni coppia di punti x_1, $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ non sta al di sopra del grafico di f ristretta all'intervallo $x \in (x_1, x_2)$: in formule*
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2).$$

4. *Diciamo che f è* strettamente concava *su I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, il segmento congiungente i corrispondenti punti sul grafico $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ sta strettamente al di sotto del grafico di f ristretta all'intervallo $x \in (x_1, x_2)$: in formule*
$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_2).$$



È evidente che
$$f : I \to \mathbb{R} \text{ è (strettamente) convessa} \quad \Leftrightarrow \quad (-f) : I \to \mathbb{R} \text{ è (strettamente) concava.} \qquad (11.4.1)$$



Esempio 11.4.2 (Convessità e concavità di **alcune** funzioni elementari)**.**

1. La funzione $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $\mathbb{R}$ (della stessa proprietà godono tutte le funzioni potenza a esponente pari);
2. La funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $[0, +\infty)$ e concava su $(-\infty, 0]$ (questo è anche l'andamento di tutte le funzioni potenza con esponente dispari maggiore o uguale a 3);
3. la funzione $f(x) = x^{1/2}$, $x \in [0, +\infty)$, è concava su $[0, +\infty)$;
4. la funzione $f(x) = x$ è sia convessa sia concava su $\mathbb{R}$ (le funzioni lineari sono le uniche funzioni sia convesse sia concave);

5. per ogni $a > 0$ la funzione esponenziale $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa su $\mathbb{R}$;

6. per ogni $a > 1$ la funzione logaritmica $x \mapsto \log_a(x)$, $x \in (0, +\infty)$, è concava su $(0, +\infty)$; per $a \in (0, 1)$ la funzione $\log_a$ è convessa su $(0, +\infty)$.

Diamo un primo risultato, senza dimostrazione, sulle proprietà delle funzioni convesse; tenendo conto della (11.4.1), esso vale ovviamente anche per le funzioni concave.

Proposizione 11.4.3. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ convessa. Allora*

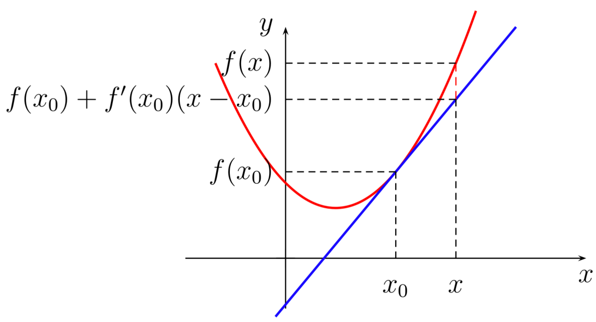
1. *f è continua in ogni punto* interno *a I e gli unici punti di eventuale discontinuità sono gli estremi dell'intervallo I;*

2. *supponiamo che f non sia derivabile in un punto x_0 interno ad I: allora x_0 è un punto angoloso.*

Ci vogliamo ora occupare del problema di fornire condizioni *sufficienti* per la convessità/concavità, in modo da poter determinare gli eventuali sotto-intervalli del suo dominio di definizione in cui una data funzione è convessa/concava. Abbiamo una prima caratterizzazione (cioè condizione necessaria e sufficiente) della convessità; lasciamo al lettore il compito di enunciare l'analogo risultato per la concavità, tenendo conto della (11.4.1). Notiamo che questa caratterizzazione vale per le funzioni *derivabili* sul loro intervallo di definizione.

Proposizione 11.4.4. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$* derivabile *in I. Allora, f è convessa su I se e solo se si ha*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \forall\, x,\, x_0 \in I. \tag{11.4.2}$$



In altri termini, f è convessa se e solo se ogni retta tangente al suo grafico sta sempre sotto al grafico stesso. Abbiamo un'interessante conseguenza di questo risultato.

Corollario 11.4.5. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$,* derivabile *in I,*

- *una funzione convessa. Sia $x_0 \in I$ un punto stazionario per f. Allora x_0 è un punto di minimo assoluto per f;*

- *una funzione concava. Sia $x_0 \in I$ un punto stazionario per f. Allora x_0 è un punto di massimo assoluto per f.*

Accenniamo alla dimostrazione nel caso in cui la funzione sia concava: dall'analogo della (11.4.2) e dal fatto che $f'(x_0) = 0$ segue che

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f(x_0) \qquad \forall\, x \in I,$$

da cui la tesi.

Il risultato alla base del "metodo differenziale" per lo studio della convessità/concavità è il seguente teorema, di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 11.4.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*derivabile*</u> *in I. Si ha che*

1. *f è convessa su (a, b) se e solo se la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ è non decrescente;*

2. *f è concava su (a, b) se e solo se la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ è non crescente.*

Quindi lo studio della convessità/concavità di una funzione derivabile f viene ricondotto allo studio della monotonia della sua funzione derivata f'. Ora, se la funzione f' è a sua volta derivabile, in virtù del Teorema 11.3.3 la monotonia di f' dipende dal segno della derivata di f'. Combinando queste informazioni, si conclude che lo studio del segno della derivata di f', cioè della *derivata seconda di f* (cf. la Sez. 10.6) determina gli intervalli di convessità/concavità di f.

Possiamo ora formalizzare i legami fra segno della derivata seconda e convessità/concavità.

Teorema 11.4.7 (Criterio per convessità/concavità)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*derivabile due volte*</u>*. Si ha che*

1. *f è convessa su I se e solo se la funzione derivata seconda f'' è non negativa su I, cioè $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$;*

2. *f è concava su I se e solo se la funzione derivata seconda f'' è non positiva su I, cioè $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$;*

3. *se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente convessa;*

4. *se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è strettamente concava.*

Osservazione 11.4.8. Si osservi che, come il Teorema 11.3.3, anche il Teorema 11.4.7 vale solo su intervalli: per esempio, la funzione $f(x) = x^{2/3}$, derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, verifica $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si noti però che f non è globalmente concava su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (che non è un intervallo!): le restrizioni di f agli intervalli $(0, +\infty)$ e a $(-\infty, 0)$ sono però concave.

Esempio 11.4.9. Ritroviamo analiticamente le proprietà di convessità/concavità delle funzioni elementari.

1. Sia $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Si ha
$$f'(x) = a^x \ln a \quad \text{e} \quad \boxed{f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$
Quindi f è strettamente convessa su $\mathbb{R}$.

2. Sia $f(x) = \log_a x$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $x \in D_f = \mathbb{R}^+$. Si ha
$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{e} \quad \boxed{f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}.}$$
Quindi
   - se $0 < a < 1$ allora $\ln a < 0$, quindi $f''(x) > 0$ $\forall x \in D_f$ e f è strettamente convessa;
   - se $a > 1$ allora $\ln a > 0$, quindi $f''(x) < 0$ $\forall x \in \mathrm{dom} f$ e f è strettamente concava.

3. Sia $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Si ha
$$\boxed{f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}.}$$
Quindi
   - se $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, allora $f''(x) > 0 \quad \forall x > 0$ e f è strettamente convessa
   - se $0 < \alpha < 1$, allora $f''(x) < 0 \quad \forall x > 0$ e f è strettamente concava
   - se $\alpha = 0$, allora $f(x) \equiv 1$ e f è sia convessa che concava
   - se $\alpha = 1$, $f(x) = x$ e f è sia convessa che concava.

Punti di flesso. Infine, diamo la seguente

Definizione 11.4.10. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di continuità per f. Supponiamo che $\exists\, f'(x_0) \in [-\infty, +\infty]$ (cioè esista la derivata di f in x_0, finita oppure no). Diciamo che x_0 è* un punto di flesso *se f ha concavità opposta a destra e a sinistra di x_0, cioè se il punto $(x_0, f(x_0))$ separa una regione di convessità di* $\mathrm{graf}(f)$ *da una regione di concavità.*

Esempio 11.4.11.

1. La funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, ha in 0 un punto di flesso a tangente orizzontale (in quanto $f'(0) = 0$: la retta tangente in $(0,0)$ è l'asse delle x).
2. La funzione $f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, ha in 0 un punto di flesso a tangente verticale (in quanto $f'(0) = +\infty$).
3. La funzione $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ha in 0 un punto di flesso a tangente obliqua (in quanto $f'(0) = 1$: la retta tangente in $(0,0)$ è la retta $y = x$).
4. Si noti che il punto $x_0 = 0$ NON è di flesso per la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x^{1/3} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
   In effetti, $(0,0)$ separa una regione di convessità da una regione di concavità, ma $\nexists\, f'(0)$.

Concludiamo con la seguente condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un dato punto sia di flesso.

Proposizione 11.4.12. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che il punto $(x_0, f(x_0))$ è di flesso. Se $f''(x_0)$ esiste, allora $f''(x_0) = 0$.*

L'annullamento della derivata seconda è solo una condizione necessaria e non sufficiente per avere un punto di flesso. Per esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha derivata seconda nulla in $x_0 = 0$, ma il punto 0 non è di flesso, in quanto f è convessa su $\mathbb{R}$.

Il criterio della derivata seconda

Concludiamo questa sezione enunciando un risultato che fornisce condizioni sufficienti per avere un punto di estremo relativo, in termini del segno della derivata seconda.

Teorema 11.4.13 (Criterio della derivata seconda)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile; sia x_0 interno ad I, stazionario per f ($f'(x_0) = 0$) e supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0. Allora,*

1. *se $f''(x_0) > 0$, allora f ha in x_0 un punto di minimo relativo;*
2. *se $f''(x_0) < 0$, allora f ha in x_0 un punto di massimo relativo.*

La dimostrazione di questo risultato sarà data nel Capitolo 12 sui polinomi di Taylor. Notiamo che la stretta positività (negatività) di f'' è solo una condizione sufficiente, e non necessaria, per avere un punto di minimo (massimo) relativo: $f(x) = x^4$ ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo assoluto con derivata seconda nulla.

11.5 *Appunti operativi:* Schema per lo studio di funzione

Data $f(x)$

1. determinare il dominio D_f
2. stabilire se f è pari?/ f è dispari?
   (Ha senso solo se D_f è simmetrico rispetto a 0!!)
3. segno di f:
   - regioni dove $f > 0$
   - regioni dove $f < 0$
   - punti dove $f = 0 \Rightarrow$ intersezioni di graf(f) con asse x

   N.B. l'unica intersezione di graf(f) con asse y è nel punto $(0, f(0))$ (se $0 \in D_f$)
4. limiti di f "agli estremi" di D_f, per esempio:
   - se $D_f = (a, +\infty)$ calcolo
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) \ \& \ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
   - se $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ con $a < b$ calcolo
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x), \ \lim_{x\to a^-} f(x), \ \lim_{x\to a^+} f(x),$$
   $$\lim_{x\to b^-} f(x), \ \lim_{x\to b^+} f(x), \ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
5. asintoti verticali, orizzontali, obliqui per graf(f)
6. continuità di f & classificazione eventuali punti di discontinuità
7. derivabilità di f & classificazione eventuali punti di non derivabilità
8. segno di f':
   - regioni dove $f' > 0 \Rightarrow f$ strett. crescente
   - regioni dove $f' < 0 \Rightarrow f$ strett. decrescente
   - punti dove $f' = 0 \Rightarrow$ punti stazionari
9. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) dei punti stazionari, studiando segno di f'
10. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) dei punti interni a D_f dove f non è derivabile, studiando segno di f'
11. classificazione (max. rel./min. rel./né max. né min.) degli eventuali estremi di D_f
12. segno di f'':
    - regioni dove $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convessa
    - regioni dove $f'' \leq 0 \Rightarrow f$ concava
13. punti di sella
14. tracciare il grafico qualitativo di f

Capitolo 12

Sviluppi di Taylor

Ricordiamo i limiti notevoli visti nella Sezione 8.7 (cf. le (8.7.4)–(8.7.8)):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \qquad \text{e cioè} \qquad \sin(x) = x + \mathrm{o}(x) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.0.1a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{e cioè} \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.0.1b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\,, \qquad \text{e cioè} \qquad e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.0.1c}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \qquad \text{e cioè} \qquad \ln(1+x) = x + \mathrm{o}(x) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.0.1d}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1\,, \qquad \text{e cioè} \qquad \arctan(x) = x + \mathrm{o}(x) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.0.1e}$$

In questo Capitolo, giustificheremo questi limiti notevoli, che impareremo a leggere come *sviluppi asintotici* (questa terminologia fa riferimento alla seconda scrittura in ognuna delle formule sopra: per esempio, $\sin(x) = x + \mathrm{o}(x)$ è uno sviluppo asintotico), e che inquadreremo nel contesto più generale del problema dell'approssimabilità di una funzione f tramite polinomi. Come vedremo, tale approssimabilità è legata alle proprietà di regolarità di f, e gli sviluppi asintotici, noti come *sviluppi di Taylor*, si possono dare per una *qualunque funzione f, purché regolare.*

12.1 La formula di Taylor con il resto di Peano

Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, e sia $x_0 \in I$. Esaminiamo i seguenti problemi:

- come approssimare $f(x)$, per $x \to x_0$, con un polinomio?
- come stimare l'ordine di infinitesimo, al tendere di x a x_0, della differenza fra la funzione e il polinomio approssimante?

Gli sviluppi (12.0.1) forniscono soluzioni a questi problemi: per esempio da

$$\sin(x) = x + \mathrm{o}(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

si evince che, per $x \to 0$, il polinomio $P(x) = x$ fornisce un'approssimazione di $f(x) = \sin(x)$ tale che $f(x) - P(x) = \sin(x) - x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x (per $x \to 0$). Più in generale, la risposta ai problemi summenzionati è legata a

$$\boxed{\text{proprietà di regolarità di } f} \sim \boxed{\text{ordine di derivabilità di } f}.$$

Iniziamo a capire questo ragionando su alcuni casi particolari.

Esempio 12.1.1. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia continua in x_0. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

e cioè $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, e cioè

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(1) \qquad \text{per } x \to x_0, \quad \text{con } P(x) := f(x_0)\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{12.1.1}$$

In altri termini, per $x \to x_0$ approssimiamo f con il polinomio (di grado 0, cioè costante) $P(x) \equiv f(x_0)$, commettendo un errore che è $\mathrm{o}(1)$, cioè infinitesimo.

Esempio 12.1.2. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Equivalentemente, f è differenziabile in x_0 (si ricordi la Sezione 10.5), cioè

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0,$$

in altri termini

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0, \quad \text{con } P(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{12.1.2}$$

Si noti che la (12.1.2) implica la (12.1.1), cioè la (12.1.2) è più forte della (12.1.1). Infatti, aumentando le richieste di regolarità su f in x_0 (siamo passati da f continua in x_0 a f differenziabile in x_0), abbiamo ottenuto un'informazione più precisa sull'approssimabilità di f tramite una funzione polinomiale: la (12.1.2) garantisce che f, nell'intorno di x_0, può essere approssimata da un polinomio di grado 1, e che l'errore che si commette sostituendo a f tale polinomio è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)$, quando x tende a x_0.

Dalla disamina dei due esempi visti, ci aspettiamo che, con l'aumentare dell'ordine di derivabilità di f in x_0,

- aumenti il grado del polinomio che approssima f nell'intorno di x_0
- aumenti l'ordine di infinitesimo, per $x \to x_0$, dell'errore che si commette sostituendo a f il suo polinomio approssimante nell'intorno di x_0

Nel seguito, generalizzeremo le formule (12.1.1) e (12.1.2) a funzioni n volte derivabili in x_0

1. troveremo un polinomio P_n di grado $\boxed{\leq}$ n tale che **valga lo sviluppo**

$$f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0,$$

2. esprimeremo P_n mediante le derivate di f in x_0 fino all'ordine n.

È quanto assicurato dal seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 12.1.3 (Sviluppo di Taylor con il resto di Peano)**.** *Siano $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e supponiamo che una f sia derivabile $\boxed{n}$ volte in x_0, con $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico polinomio P_n di grado $\boxed{\leq n}$ tale che*

$$f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \quad \textit{per } x \to x_0. \tag{12.1.3}$$

Si ha che

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \textit{per } k = 0, \ldots, n,$$

quindi P_n è dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

P_n viene detto polinomio di Taylor di f di ordine n e di centro x_0 e indicato con

$$T^n_{x_0} f.$$

Se $x_0 = 0$, P_n è detto polinomio di Mac Laurin di f di ordine n e di centro 0 *e indicato con $T^n f$.*

Sostituendo l'espressione di P_n nella (12.1.3) si ricava la formula di Taylor con il resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0 \tag{12.1.4}$$

È immediato ritrovare le (12.1.1) e (12.1.2) come casi particolari della (12.1.4):

- se $n = 0$, allora

$$T^0_{x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 = f^{(0)}(x_0) = f(x_0),$$

  e quindi la (12.1.4) fornisce la (12.1.1);

- se $n = 1$, allora

$$T^1_{x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

  e quindi la (12.1.4) fornisce la (12.1.2).

Osservazione 12.1.4. Si noti che nell'enunciato del Teorema 12.1.3 si parla di *polinomio di ordine n*, e non di *polinomio di grado n*! In effetti, il polinomio di Taylor (di f, con centro in x_0) di ordine n ha, in generale, grado $\leq n$, e può effettivamente avere grado strettamente minore di n. Lo vedremo negli esempi della Sezione 12.2.

In quel che segue, vedremo

- alcuni esempi di calcolo di polinomi di Taylor e quindi di sviluppi di Taylor (Sez. 12.2);
- alcuni esempi di applicazione degli sviluppi di Taylor a limiti di funzioni e allo studio del carattere di una serie (Sez. 12.3);
- l'applicazione degli sviluppi di Taylor allo studio del grafico qualitativo di funzioni tramite il criterio della derivata n-esima (Sez. 12.4).

Infine, nella Sezione 12.4 daremo un altro tipo di sviluppo asintotico, in cui il cosiddetto *resto di Peano* $\mathrm{o}((x-x_0)^n)$ nella formula (12.1.4) viene sostituito da un termine che fornisce *informazioni di tipo quantitativo* sulla differenza fra la funzione e l'associato polinomio di Taylor e quindi, in ultima analisi, informazioni quantitative sui valori della funzione.

12.2 Sviluppi di Taylor

Vediamo alcuni specifici esempi di calcolo di polimomi di Taylor, prima di fornire i polinomi di Taylor (anzi, di Mac Laurin) delle funzioni elementari.

Esempio 12.2.1. Sia

$$f(x) = 3x + 2x^2 - 3x^4 + 5x^7 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

- Il polinomio di Mac Laurin (cioè, centrato in $x_0 = 0$) della funzione f di ordine 2 è
$$T_0^2(f)(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2,$$
pertanto, essendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 4$, si ha che
$$T_0^2(f)(x) = 3x + 2x^2,$$
da cui si ricava lo sviluppo di Mac Laurin
$$f(x) = 3x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.2.1}$$
che in questo caso (particolarissimo! f è infatti una funzione polinomiale) fornisce un'informazione ovvia, dacché i restanti termini di f, cioè $-3x^4 + 5x^7$, sono effettivamente $\mathrm{o}(x^2)$ per $x \to 0$.

- Il polinomio di Mac Laurin di f di ordine 3 è
$$T_0^3(f)(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$
pertanto, essendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 4$, $f'''(0) = 0$, si ha che che
$$T_0^3(f)(x) = T_0^2(f)(x) = 3x + 2x^2.$$
Si noti quindi che il polinomio di Mac Laurin di ordine 3 ha effettivamente grado $2 < 3$!!! L'associato sviluppo di Mac Laurin
$$f(x) = 3x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{per } x \to 0, \tag{12.2.2}$$
fornisce ancora un'informazione ovvia, ma comunque più precisa dello sviluppo (12.2.1), visto che, infatti, $-3x^4 + 5x^7 = \mathrm{o}(x^3)$ per $x \to 0$.

- Si verifica facilmente che polinomio di Mac Laurin di f di ordine 8 è
$$T_0^8(f)(x) = T_0^7(f)(x) = 3x + 2x^2 - 3x^4 + 5x^7.$$
In generale, $\forall\, n \geq 8$ si ha che $T_0^n(f) = T_0^7(f)$ quindi il grado di $T_0^n(f)$ è $\boxed{7 < n}$.

Esempio 12.2.2. Calcoliamo il polinomio di Mac Laurin di cos, dato da
$$T_0^n(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
Si ha $\forall\, j \in \mathbb{N}$
$$\begin{array}{ll} \cos^{(4j)}(x) = \cos x, & \cos^{(4j+1)}(x) = -\sin x, \\ \cos^{(4j+2)}(x) = -\cos x, & \cos^{(4j+3)}(x) = \sin x. \end{array}$$
Quindi
$$\cos^{(4j)}(0) = 1, \qquad \cos^{(4j+1)}(0) = 0 \qquad \cos^{(4j+2)}(0) = -1, \qquad \cos^{(4j+3)}(0) = 0,$$
e allora nella formula per $T_0^n(\cos)$ "sopravvivono" solo i contributi con indice $k = 4j$ o $k = 4j+2$, cioè con <u>INDICE PARI</u>!! Per esempio
$$\begin{aligned} T_0^1(\cos)(x) &= \cos(0) + \cos'(0)x = \cos(0) = 1 = T_0^0(\cos)(x), \\ T_0^2(\cos)(x) &= T_0^1(\cos)(x) + \frac{\cos''(0)}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2, \\ T_0^3(\cos)(x) &= T_0^2(\cos)(x) + \frac{\cos'''(0)}{6}x^3 = T_0^2(\cos)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2, \\ T_0^4(\cos)(x) &= T_0^3(\cos)(x) + \frac{\cos^{(4)}(0)}{24}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \end{aligned}$$

In forma compatta si scrive

$$T_0^{2n}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \tag{12.2.3}$$

e si ha che

$$T^{2n+1}(\cos)(x) = T_0^{2n}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

(cioè, il polinomio di Mac Laurin di ordine $2n+1$ grado $2n < 2n+1!$). Il lettore è invitato a calcolare i polinomi di Mac Laurin della funzione sin, ricordando le formule

$$f^{(4k)}(x) = \sin x, \qquad f^{(4k+1)}(x) = \cos x,$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

per le sue derivate successive.

Esempio 12.2.3. Possiamo calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della funzione $f(x) := \exp(x^2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ due modi:

1. ricordando la formula $T_0^2(f)(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$ e calcolando

   $$f'(x) = 2x\exp(x^2), \qquad f''(x) = 2\exp(x^2) + 4x^2\exp(x^2),$$

   da cui $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$. Essendo $f(0) = 0$ si ha immediatamente

   $$T_0^2(f)(x) = 1 + x^2;$$

2. ragionando in questo modo: nello sviluppo $e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x)$ possiamo sostituire x con x^2, ottenendo quindi

   $$e^{x^2} = 1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{12.2.4}$$

   Ora, il Teorema 12.1.3 garantisce che (per $n = 2$) esiste un *unico* polinomio di grado ≤ 2 per cui vale lo sviluppo (12.1.3), cioè

   $$e^{x^2} = P(x) + \mathrm{o}(x^2)$$

   Quindi, tenendo conto della (12.2.4) e dell'unicità del polinomio, deve essere $P(x) = T_0^2(f)(x) = 1 + x^2$.

Questo esempio mostra che, in taluni casi, si possono ricavare i polinomi di Taylor in modo "artigianale", a partire dai polinomi di Taylor noti che riportiamo qui nel seguito.

Polinomi e sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari

LE FORMULE SEGUENTI DEVONO ESSERE MEMORIZZATE

Polinomi di Mac Laurin delle funzioni elementari D'ora in poi, scriveremo semplicemente T^n al posto di T_0^n.

$$
\begin{aligned}
&T^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
&T^n(\ln(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} && x \neq -1 \\
&T^{2n+1}(\sin x) = T^{2n+2}(\sin x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&T^{2n}(\cos x) = T^{2n+1}(\cos x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\
&T^{2n+1}(\sinh x) = T^{2n+2}(\sinh x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&T^{2n}(\cosh x) = T^{2n+1}(\cosh x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&T^n((1+x)^\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k && \text{per } x > -1,\ \alpha > 0 \\
&T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k && \text{per } x \neq 1 \\
&T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)}
\end{aligned}
$$

Osservazione 12.2.4. Abbiamo già calcolato i polinomi di Mac Laurin di cos, e visto che $T^{2n+1}(\cos)(x) = T_0^{2n}(\cos)(x)$. Formule di questo tipo sono vere anche per i polinomi Mac Laurin di sin, sinh e cosh. Queste funzioni elementari forniscono quindi esempi di polinomi di Mac Laurin per i quali, per taluni valori dell'ordine, il grado è effettivamente strettamente minore dell'ordine.

Esempio 12.2.5. Riprendiamo l'esempio dato dalla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := \exp(x^2)$. Da

$$T^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

segue che

$$T^{2n}(e^{x^2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^{2k}}{k!} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \ldots + \frac{1}{n!}x^{2n}$$

Sviluppo di Mac Laurin delle funzioni elementari Tenendo conto delle espressioni dei polinomi di Mac Laurin, si hanno i seguenti sviluppi asintotici, $\boxed{\text{per } x \to 0}$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) && \text{per } x \to 0 \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) && \text{per } x \to 0 \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) && \text{per } x \to 0 \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) && \text{per } x \to 0 \\
\sinh(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}) && \text{per } x \to 0 \\
\cosh(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) && \text{per } x \to 0 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n) && \text{per } x \to 0 \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n) && \text{per } x \to 0 \\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) && \text{per } x \to 0
\end{aligned}
$$

Commentiamo solo lo sviluppo di Mac Laurin di sin: si tratta dello sviluppo fino all'ordine $2n+2$, con resto di Peano dato da $\mathrm{o}(x^{2n+2})$ per $x \to 0$. In tale sviluppo interviene il polinomio di Mac Laurin di ordine $2n+2$ di sin, che coincide con quello di ordine $2n+1$, e cioè $= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Esempio 12.2.6. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$
f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}
$$

Ricordando che si ha

$$
\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \quad \text{per } x \to 0
$$

e che $\ln(1+y) = y + \mathrm{o}(y)$ per $y \to 0$, si ha

$$
\ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right) = -\frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{per } x \to 0
$$

cioè

$$
T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.
$$

Esempio 12.2.7. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$
f(x) = \ln(1+x^2) - x^2 \cos x.
$$

Ricordiamo che

$$
\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \mathrm{o}(z^3) \quad \text{per } z \to 0,
$$

per cui

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + \mathrm{o}(x^6) \quad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{per } x \to 0,$$

da cui

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + \mathrm{o}(x^6) \quad \text{per } x \to 0.$$

Quindi si ha

$$f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) x^6 + \mathrm{o}(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + \mathrm{o}(x^6) \quad \text{per } x \to 0,$$

e dunque, sempre per l'unicità del polinomio per il quale valga lo sviluppo (12.1.3), si ha

$$T^6 f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) x^6 = -\frac{7}{24}x^6.$$

12.3 *Appunti operativi:* applicazioni degli sviluppi di Taylor al calcolo di limiti e allo studio del carattere di serie

Esempio 12.3.1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \sin x =& T^3(\sin x) + \mathrm{o}(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) && \text{per } x \to 0, \\ \cos x =& T^3(\cos x) + \mathrm{o}(x^3) = T^2(\cos x) + \mathrm{o}(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) && \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \left[x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right]}{x\left\{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right]\right\}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)}{\frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{6}\frac{2}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 12.3.2. Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere la potenza in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}} = \exp\left(\frac{1}{x \sin 2x} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\right).$$

Il limite dell'argomento di exp (ricordando il limite fondamentale $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$ e l'Esempio 12.2.6) vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x \sin 2x} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque $L = e^{-3/4}$.

Esempio 12.3.3. Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos x - \ln(1+x^2)}{7x^2\tan(x^4)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2\cos x - \ln(1+x^2)}{7x^6}.$$

Per l'Esempio 12.2.7 si ha quindi

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{7x^6}\left(-\frac{7}{24}x^6 + \mathrm{o}(x^6)\right) = -\frac{1}{24}.$$

Esempio 12.3.4. Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x-\sin x)\sqrt{x}}.$$

Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$, per cui

$$L = 6\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3\sqrt{x}}.$$

Per avere solo potenze intere cambiamo variabile, ponendo $y = \sqrt{x}$. Il limite diventa

$$6\lim_{y\to 0^+} \frac{y - \sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6 y} = 6\lim_{y\to 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6} = 6\lim_{t\to 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}$$

(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t = y^3$). Si ha

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{o}(t^3)}{t} = 1 - \frac{1}{6}t^2 + \mathrm{o}(t^2)$$

e $\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}z + \mathrm{o}(z)$, per cui

$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{6}t^2 + \mathrm{o}(t^2)} = 1 - \frac{1}{18}t^2 + \mathrm{o}(t^2).$$

Dunque

$$L = 6\lim_{t\to 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} = 6\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{18}t^2 + \mathrm{o}(t^2)}{t^2} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 12.3.5. Determinare, al variare di $\beta > 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log(n^\beta + \sqrt{n}) - \log(n^\beta + 1)\right).$$

[Risposta: $\beta > \frac{3}{2}$].
La successione $\{a_n\}$ termine generale della serie soddisfa

$$a_n = \log\left(\frac{n^\beta + \sqrt{n}}{n^\beta + 1}\right) = \log\left(\frac{n^\beta + 1 + \sqrt{n} - 1}{n^\beta + 1}\right) \sim \log\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^\beta}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n^{\beta - \frac{1}{2}}}\right).$$

Ora,

1. se $\beta > \frac{1}{2}$, si ha che $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} \to 0$ per $n \to \infty$ e quindi, ricordando che $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, si ha per $n \to \infty$
$$a_n \sim \frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}.$$
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}$ converge se e solo se $\beta - \frac{1}{2} > 1$, cioè $\beta > \frac{3}{2}$. Quindi, si ha
$$\text{convergenza per } \beta > \frac{3}{2}, \qquad \text{divergenza per } \frac{1}{2} < \beta \leq \frac{3}{2}.$$
2. se $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, si vede immediatamente che $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, quindi non è verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, che diverge.

Esempio 12.3.6. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
converge assolutamente. [Risposta: $\alpha \in [-1, 1]$].
Osserviamo che
$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \in (0, 1)$$
e quindi $\log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) < 0$, pertanto la serie converge assolutamente se e solo se converge la serie dei moduli
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^n \left|\log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right|.$$
Usando che
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \qquad \text{per } n \to \infty,$$
si ha che $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$, e quindi
$$\left|\log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = -\log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\log\left(1 - \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{6}\frac{1}{n^2} \qquad \text{per } n \to \infty.$$
Quindi
$$|\alpha|^n \left|\log\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| \sim \frac{1}{6}\frac{|\alpha|^n}{n^2} \qquad \text{per } n \to \infty,$$
e mi riconduco allo studio della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n^2}$, alla quale applico il criterio asintotico della radice. Poiché
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|\alpha|^n}{n^2}\right)^{1/n} = |\alpha|$$
deduco che la serie converge assolutamente per $\alpha \in (-1, 1)$ (sicché $|\alpha| < 1$). La serie dei moduli diverge se $|\alpha| > 1$. Se $|\alpha| = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n^2}$ è la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, convergente. Quindi converge anche la serie di partenza.

12.4 Il criterio della derivata n-esima e la formula di Taylor con il resto di Lagrange

Vediamo ora un'applicazione degli sviluppi di Taylor allo studio del comportamento di una funzione nell'intorno di un punto. Premettiamo, all'enunciato del Teorema 12.4.1, le seguenti osservazioni. Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, punto stazionario per f. Per stabilire la natura di x_0 (e cioè classificarlo), occorre studiare il segno di $f(x) - f(x_0)$ nell'intorno del punto x_0. Si può in questo modo stabilire

- se x_0 sia un punto di massimo relativo: ciò accade se esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ di x_0 tale che
$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \qquad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r);$$
- se x_0 sia un punto di minimo relativo: ciò accade se esiste un intorno $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ di x_0 tale che
$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \qquad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r);$$
- se x_0 **NON** sia un punto nè di massimo nè di minimo: ciò accade se
$$f(x) - f(x_0) \text{ cambia segno in ogni intorno di } x_0.$$

Un'altra possibilità per classificare x_0 è di applicare il Criterio della derivata seconda (cf. il Teorema 11.4.13), e quindi di studiare il segno di $f''(x_0)$.

Nel caso in cui $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$ si può ricorrere al criterio della derivata n-esima.

Teorema 12.4.1 (Criterio della derivata n-esima)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$, $n \geq 2$, e supponiamo che*
$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
Allora si hanno le seguenti alternative:

- *se n è pari e*
$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0, & \textit{allora punto di max. rel. per } f \textit{ in } x_0; \\ f^{(n)}(x_0) > 0, & \textit{allora punto di min. rel. per } f \textit{ in } x_0; \end{cases}$$
- *se n è dispari e*
$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0, & \textit{allora } f \textit{ è strett. decresc. in un intorno di } x_0; \\ f^{(n)}(x_0) > 0, & \textit{allora } f \textit{ è strett. cresc. in un intorno di } x_0. \end{cases}$$

Cenni della dimostrazione: Ricordiamo la formula di Taylor con resto di Peano: per $x \to x_0$
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n).$$
Siccome
$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$
otteniamo
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}(((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0.$$
Quindi
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}(((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0$$
cioè, in un intorno di x_0 il segno di $f(x) - f(x_0)$ coincide con il segno di $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$. Da questo segue la tesi: infatti, per esempio nel caso in cui n sia pari si ha che $(x - x_0)^n \geq 0$, e pertanto il segno di $f(x) - f(x_0)$ coincide con il segno di $f^{(n)}(x_0)$. Ecco quindi che, se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, il punto x_0 è di minimo relativo; se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, il punto x_0 è di massimo relativo. La discussione del caso n dispari è lasciata al lettore. □

Esempio 12.4.2. 1. Consideriamo

$$f(x) = x^4, \qquad x_0 = 0$$

Si ha $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, e

$$f^{(4)}(0) = 4! = 24 > 0.$$

Pertanto $x_0 = 0$ è punto di minimo (assoluto) per f.

2. Consideriamo

$$f(x) = x^3, \qquad x_0 = 0$$

Si ha $f'(0) = f''(0) = 0$ e

$$f^{(4)}(0) = 3! = 6 > 0.$$

Pertanto f è strettamente crescente in un intorno di 0.

La formula di Taylor con resto di Lagrange

La Formula di Taylor con resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0$$

fornisce un'informazione puramente **qualitativa** sul comportamento di f per $x \to x_0$, e cioè l'informazione asintotica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{x^n} = 0.$$

Inoltre, essa descrive solo il comportamento di f nell'intorno del centro x_0 dello sviluppo di Taylor, e non su tutto l'intervallo di definizione della funzione. Non fornisce quindi un'informazione di tipo globale, ma solo locale. La formula di Taylor con resto di Lagrange che daremo nel Teorema 12.4.3 dà un'informazione **quantitativa** sul comportamento di una funzione f per $x \to x_0$, con una stima sulla differenza

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k;$$

stima che, infatti, vale su *tutto* l'intervallo di definizione di f.

Teorema 12.4.3 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Siano I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $(n+1)$-volte in I. Allora per ogni coppia di punti x_0, $x \in I$*

- *con $x > x_0$, esiste $\xi \in (x_0, x)$,*
- *con $x < x_0$, esiste $\xi \in (x, x_0)$,*

tale che

$$f(x) = T^n_{x_0}(f)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (12.4.1)$$

*cioè il **resto** della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta **di Lagrange**)*

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}.$$

Omettiamo la dimostrazione anche di questo risultato.

Osserviamo che la funzione f è qui richiesta derivabile $(n+1)$ volte su tutto I (in effetti, nella (12.4.1) compare la derivata di ordine $(n+1)$ di f in ξ). D'altronde, l'informazione fornita dalla (12.4.1) ha un carattere globale: in effetti, essa vale per ogni coppia di punti x_0 e x in I.

È facile vedere che il Teorema di Lagrange (o del valor medio) è un caso particolare del Teorema 12.4.3, corrispondente a $n = 0$: la funzione è quindi derivabile 1 volta, ed esiste $\xi \in (x_0, x)$ (per fissare le idee, supponiamo che $x_0 < x$) tale che

$$f(x) = T^0_{x_0}(f(x)) + \frac{f^{(1)}(\xi)}{(1)!}(x - x_0)^1 = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),$$

cioè la tesi del Teorema del valor medio.

Il prossimo esempio bene illustra il carattere *quantitativo* della (12.4.1).

Esempio 12.4.4. La formula di Taylor con resto di Lagrange applicata a $f(x) = e^x$ (N.B.: $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$!!) fornisce, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k + \frac{e^\xi}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \forall\, x_0,\, x \in \mathbb{R} \text{ con } x_0 < x.$$

Scegliendo $x_0 = 0$ e $x = 1$ si ottiene

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(n+1)!}}, \tag{12.4.2}$$

per la quale si è usato che per ogni $\xi \in (0, 1)$ $e^\xi < e^1 = e < 3$, da cui la stima (essendo $x_0 = 0$ e $x = 1$)

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}(1)^{n+1} \le \frac{3}{(n+1)!}\,.$$

Dalla (12.4.2) si ottiene

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) < \frac{3}{(n+1)!}\,.$$

Quindi, per ottenere un'approssimazione razionale (cioè, tramite il numero $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}$) della costante di Nepero e commettendo un errore $\le 10^{-3}$, è sufficiente scegliere $n = 6$, in quanto

$$\left(e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} \right) < \frac{3}{7!} \le \frac{1}{10^3}\,.$$

Capitolo 13

L'integrale di Riemann

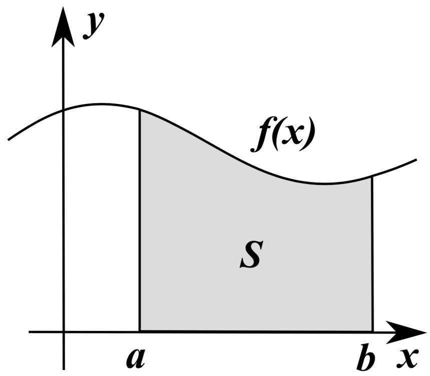
In questo Capitolo affrontiamo la teoria dell'integrale di Riemann. Il concetto di integrale, nato per la risoluzione di problemi geometrici, si è poi rivelato fondamentale anche per problemi di natura diversa, sicché è, ora, uno dei concetti più usati nella costruzione di modelli matematici. Ai fini di questo corso, comunque, verrà data una introduzione elementare alla teoria dell'integrazione, focalizzata sulla nozione di integrale formalizzata da Georg Riemann (esistono altre nozioni, più sofisticate, di integrale che esulano però dagli scopi del corso). Essenzialmente, affronteremo due tipologie di questioni:

1. Dare una definizione rigorosa alla nozione di funzione integrabile e di integrale secondo Riemann. A questo scopo,
   (a) dapprima presenteremo, in un contesto semplificato e in maniera intenzionalmente 'informale', le idee soggiacenti alla definizione di integrale di Riemann;
   (b) in seguito svilupperemo rigorosamente la costruzione dell'integrale di Riemann;
   (c) approfondiremo quindi lo studio della classe delle funzioni integrabili secondo Riemann, fornendo condizioni necessarie e sufficienti/condizioni sufficienti per tale proprietà;
   (d) fisseremo alcune proprietà della nozione di integrale.
2. Sviluppare tecniche di calcolo dell'integrale di Riemann. Tali tecniche sono basate sullo studio dei legami fra derivazione e integrazione. A questo proposito,
   (a) introdurremo il cosiddetto 'problema della primitiva' e studieremo le proprietà dell'integrale indefinito;
   (b) chiariremo i legami fra derivazione e integrazione tramite i due teoremi fondamentali del calcolo integrale;
   (c) acquisiremo opportune tecniche di calcolo degli integrali, basate sulle formule di integrazione per parti e per sostituzione;
   (d) affronteremo (parzialmente) il problema dell'integrazione delle funzioni razionali fratte.

13.1 Definizione di funzione integrabile e di integrale di Riemann

Il lettore ha sicuramente appreso le tecniche di calcolo dell'area di un rettangolo e, più in generale, di un poligono. Ci si pone ora il problema di calcolare aree di regioni piane con un contorno curvilineo. Confineremo la discussione a una specifica classe di regioni piane con bordo curvilineo, concentrandoci sul seguente

Problema 13.1.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e* ***positiva****: calcolare l'area A della regione di piano (detta* sottografico *di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x.*



Evidenziamo che questo problema ha significato perché si sta supponendo che $f \geq 0$ sul suo dominio, cioè l'intervallo $[a, b]$. Diversamente, non avrebbe senso parlare di 'sottografico' di f. Ai fini di motivare la definizione di integrale secondo Riemann, che darà una risposta al Problema 13.1.1, e le costruzioni ad essa preliminari, discutiamo ora

Un procedimento di approssimazione dell'area del sottografico di f. Essenzialmente, l'idea è di approssimare l'area del sottografico di f, regione con bordo curvineo, tramite le aree di rettangoli (cf. la (13.1.1)), che siamo in grado di calcolare. A questo scopo, data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e **positiva**,

(1) Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ (cf. la Definizione 13.1.2 più sotto)

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b, \qquad \text{con } I_j := [x_j, x_{j+1}], \quad j \in \{0, \ldots, n\}.$$

Sia A_j l'area di regione piana compresa fra il grafico della restrizione di f all'intervallo I_j e l'asse x.

(2) Poiché f è continua, se I_j è "sufficientemente piccolo", la variazione di f su I_j sarà "piccola": possiamo quindi trattare f *come se fosse* costante su I_j. Quindi un'approssimazione dell'area A_j è data da

$$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

con ξ_j un punto arbitrario di I_j (possiamo scegliere ξ_j arbitrariamente, visto che trattiamo f come se fosse costante su I_j). Si noti che

$$f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \quad \text{è l'area del rettangolo con base } (x_{j+1} - x_j) \text{ e altezza } f(\xi_j). \tag{13.1.1}$$

(3) Allora, un'approssimazione dell'area A del sottografico di f sull'*intero* intervallo $[a, b]$ è data dalla somma delle approssimazioni delle aree A_j, cioè

$$A \sim \tilde{A} := \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

con ξ_j un punto arbitrario di I_j per ogni $j = 0, \ldots, n$. Ci si aspetta che all'aumentare dei punti di suddivisione di $[a, b]$, il valore $\tilde{A}$ sia un'approssimazione sempre migliore di A.

Ribadiamo che la discussione su esposta non fornisce la definizione di integrale di Riemann, ma serve al solo scopo di introdurre alcune delle idee ad essa soggiacenti. Daremo la definizione di integrale di Riemann dopo aver sviluppato una serie di costruzioni preliminari.

Verso la definizione di integrale di Riemann

Precisiamo innanzitutto l'**ipotesi di base** sulla funzione f per la quale introduciamo l'integrale di Riemann:

$$\boxed{f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \underline{\textbf{limitata,}}} \tag{13.1.2}$$

e cioè

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \quad -M \leq f(x) \leq M. \tag{13.1.3}$$

Sottolineiamo che

- non richiediamo più che f sia continua: tale ipotesi era stata fatta, precedentemente, solo per giustificare alcuni ragionamenti 'qualitativi' di cui non intendiamo avvalerci. Daremo quindi senso all'integrale per una classe di funzioni più ampia delle funzioni continue;
- non richiediamo più che f sia positiva: non ha quindi più senso parlare di sottografico di f e, come ribadiremo più volte, in generale si perde il significato geometrico del concetto di integrale. La nozione che ora introduciamo *trascende*, infatti, il problema originario (cioè il Problema 13.1.1) che ha motivato il suo sviluppo.

Sottolineiamo altresì che l'ipotesi che f sia **limitata** è irrinunciabile, essendo alla base delle costruzioni che ora vediamo.

Il primo passo verso la definizione di integrale di Riemann è la seguente

Definizione 13.1.2 (Suddivisione). *1. Diciamo che $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ è una* **suddivisione** *di $[a, b]$ se*

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = b, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}.$$

Si ha $[a, b] = \bigcup_{j=0}^{n} I_j$ con $I_j = [x_j,\, x_{j+1}]$, $j \in \{0, \ldots, n\}$.

2. Date due suddivisioni D_1 e D_2 di $[a, b]$, diciamo che D_2 è più fine *di D_1 se tutti i punti di D_1 sono anche punti di D_2, cioè*

$$D_1 \subset D_2.$$

Osservazione 13.1.3. La relazione 'essere più fine', che di fatto si riduce a una relazione di inclusione fra insiemi, è chiaramente una relazione d'ordine (si ricordi la Sezione 1.2). Inoltre, date due suddivisioni D_1 e D_2, ne esiste una più fine di entrambe: è sufficiente definire $D := D_1 \cup D_2$, e chiaramente si avrà che D è più fine di D_1 e di D_2.

Associamo a ogni suddivisione D di $[a, b]$ i seguenti oggetti:

Definizione 13.1.4 (Somme di Riemann)**.** *Sia D una suddivisione di $[a, b]$. Chiamiamo*

- somma di Riemann *di f relativa alla suddivisione D il numero*

$$\Sigma(f, D) = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \quad \text{con } \xi_j \in [x_j, x_{j+1}] \text{ scelto arbitrariamente, per } j \in \{0, \ldots, n\};$$

- somma inferiore *associata a f e a D il numero*

$$\mathrm{s}(f, D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j);$$

- somma superiore *associata a f e a D il numero*

$$\mathrm{S}(f, D) := \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j).$$

Sottolineiamo che queste definizioni hanno senso perché stiamo supponendo che f sia limitata su $[a, b]$: questo assicura, in particolare, che per ogni $j = 0, \ldots, n$ la restrizione di f a $[x_j, x_{j+1}]$ è inferiormente limitata, cioè

$$\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) > -\infty$$

(infatti, si ha $\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \geq -M$, con M la costante data dalla (13.1.3)). Quindi, la somma inferiore $\mathrm{s}(f, D)$ è ben definita. Analogamente si vede che $\mathrm{S}(f, D)$ è ben definita.

Lemma 13.1.5. *Supponiamo che f soddisfi la* (13.1.2). *Allora, per ogni suddivisione D e per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D)$ si ha che*

$$\mathrm{s}(f, D) \leq \Sigma(f, D) \leq \mathrm{S}(f, D). \tag{13.1.4}$$

Dimostrazione. Sia $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Per $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, fissiamo un punto $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Allora si ha

$$\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \leq f(\xi_j) \leq \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \tag{13.1.5}$$

La disuguaglianza (13.1.4) segue sommando (13.1.5) per $j \in \{0, \ldots, n\}$. □

Osservazione 13.1.6. Se $f \geq 0$ su $[a, b]$, allora $\mathrm{s}(f, D)$ e $\mathrm{S}(f, D)$ assumono un preciso significato geometrico, legato al concetto di *plurirettangolo*. Chiamiamo plurirettangolo un'unione finita di rettangoli, non sovrapposti, con lati paralleli agli assi x e y. Allora,

- $\mathrm{s}(f, D)$ è l'area del plurirettangolo dato dall'unione dei rettangoli dati dai prodotti cartesiani

$$[x_j, x_{j+1}] \times [0, \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)]$$

  (cioè, i rettangoli aventi come basi $(x_{j+1} - x_j)$ e altezze $\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$);

- $\mathrm{S}(f, D)$ è l'area del plurirettangolo dato dall'unione dei rettangoli dati dai prodotti cartesiani

$$[x_j, x_{j+1}] \times [0, \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)]$$

  (cioè, i rettangoli aventi come basi $(x_{j+1} - x_j)$ e altezze $\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$).

Sia A l'area del sottografico di f (che ha senso introdurre, perché siamo ritornati a supporre che $f \geq 0$). Allora per ogni suddivisione D si ha

$$\mathrm{s}(f, D) \leq A \leq \mathrm{S}(f, D). \tag{13.1.6}$$

Vediamo ora come variano somme inferiori e somme superiori al variare delle suddivisioni.

Lemma 13.1.7. *Sia $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ limitata e siano D_1, D_2 due suddivisioni di* $[a, b]$.

1. *Supponiamo ora che D_2 sia più fine di D_1, cioè $D_1 \subset D_2$. Allora*

$$\begin{aligned} \mathrm{s}(f, D_1) &\leq \mathrm{s}(f, D_2) \\ \mathrm{S}(f, D_2) &\leq \mathrm{S}(f, D_1) \end{aligned} \tag{13.1.7}$$

   Cioè, raffinando le suddivisioni di $[a, b]$ le somme inferiori crescono, mentre quelle superiori decrescono.

2. *Si ha che*

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \mathrm{S}(f, D_2) \qquad \textit{per ogni coppia di suddivisioni } D_1 \textit{ e } D_2 \textit{ di } [a, b]. \tag{13.1.8}$$

Dimostrazione. Non dimostreremo la (13.1.7).

Abbiamo già giustificato la (13.1.8) nel caso particolare in cui $D_1 = D_2 = D$, cf. la (13.1.4)); si osservi che ora non stiamo supponendo che D_1 e D_2 siano ordinate (cioè che D_2 sia più fine di D_1!): comunque, le somme inferiori associate a D_1 sono sempre minori o uguali delle somme superiori associate a D_2. Per dimostrare la (13.1.8) ragioniamo in questo modo: sia $\widetilde{D}$ una suddivisione più fine di D_1 e di D_2 (per esempio, $\widetilde{D} := D_1 \cup D_2$). Allora,

$$\mathrm{s}(f, D_1) \overset{(1)}{\leq} \mathrm{s}(f, \widetilde{D}) \overset{(2)}{\leq} \mathrm{S}(f, \widetilde{D}) \overset{(3)}{\leq} \mathrm{S}(f, D_2),$$

dove la (1) segue dalla (13.1.7), la (2) dalla (13.1.4), la (3) ancora dalla (13.1.7). □

Osservazione 13.1.8 (Punto della situazione)**.** Ci aspettiamo che l'area del sottografico si ottenga 'prendendo il limite' (in un senso opportuno) delle somme inferiori $\mathrm{s}(f, D)$ e delle somme superiori $\mathrm{S}(f, D)$ al raffinarsi delle suddivisioni D.

Per le proprietà di monotonia (13.1.7), tenendo conto dei risultati sui limiti di funzioni (e successioni) monotone, ci aspettiamo che

$$\text{“}\lim \mathrm{s}(f, D)\text{”} = \sup\{\text{somme inferiori, al variare delle suddivisioni}\}$$
$$\text{“}\lim \mathrm{S}(f, D)\text{”} = \inf\{\text{somme superiori, al variare delle suddivisioni}\}$$

Per formalizzare queste idee, introduciamo il sup delle somme inferiori e l'inf delle somme superiori.

Definizione 13.1.9. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, chiamiamo* **integrale inferiore** $\mathcal{I}'(f)$ *e* **integrale superiore** $\mathcal{I}''(f)$ *di f su $[a, b]$ i numeri*

$$\mathcal{I}'(f) := \sup_D \mathrm{s}(f, D) = \sup\big\{\mathrm{s}(f, D) :\ D \text{ suddivisione di } [a, b]\big\},$$
$$\mathcal{I}''(f) := \inf_D \mathrm{S}(f, D) = \inf\big\{\mathrm{S}(f, D) :\ D \text{ suddivisione di } [a, b]\big\}.$$

Lemma 13.1.10. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora,*

$$\mathcal{I}'(f),\ \mathcal{I}''(f) \in \mathbb{R}; \tag{13.1.9a}$$
$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f). \tag{13.1.9b}$$

Dimostrazione. Poiché esiste $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha che

$$\begin{aligned}
&-M(b-a) = -M\sum_{j=0}^{n}(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n}(-M)(x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{n}\left[\inf_{x\in[x_j, x_{j+1}]} f(x)\right](x_{j+1} - x_j) \\
&= \mathrm{s}(f, D) \leq \mathrm{S}(f, D) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left[\sup_{x\in[x_j, x_{j+1}]} f(x)\right](x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{n} M(x_{j+1} - x_j) = M(b-a)\,.
\end{aligned}$$

Da questo calcolo si deduce immediatamente che

$$-M(b-a) \leq \mathcal{I}'(f) \leq M(b-a), \qquad -M(b-a) \leq \mathcal{I}''(f) \leq M(b-a).$$

La (13.1.9b) segue dal fatto che

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \mathrm{S}(f, D_2) \qquad \text{per ogni coppia di suddivisioni } D_1 \text{ e } D_2 \text{ di } [a, b].$$

Infatti, tenendo fisso D_1 e facendo variare D_2 (che è una suddivisione *arbitraria* di $[a, b]$), si ottiene che

$$\mathrm{s}(f, D_1) \leq \inf_{D_2} \mathrm{S}(f, D_2) \qquad \text{per ogni suddivisione } D_1 \text{ di } [a, b];$$

facendo ora variare D_1 si conclude che

$$\sup_{D_1} \mathrm{s}(f, D_1) \le \inf_{D_2} \mathrm{S}(f, D_2),$$

da cui la (13.1.9b). □

Siamo ora nella posizione di definire il concetto di funzione integrabile e di integrale secondo Riemann.

Definizione 13.1.11. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione* <u>*limitata*</u>*. Diciamo che f è* **integrabile secondo Riemann** *su $[a, b]$ se integrale inferiore e superiore coincidono, cioè*

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f).$$

In tal caso scriviamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$$

e chiamiamo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **integrale di Riemann** *di f in $[a, b]$ (a e b si dicono* estremi di integrazione*).*

Quindi, l'integrale di Riemann è il valore comune fra $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$. Il simbolo $\int$ con cui viene indicato l'integrale non è che la lettera S (che sta per 'somma') secondo un'antica grafia.

Interpretazione geometrica. Se $\boxed{f \ge 0}$ su $[a, b]$, allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ fornisce l'area del sottografico di f. Questa **interpretazione geometrica si perde se f cambia segno** su $[a, b]$!!

13.2 Classi di funzioni integrabili e proprietà dell'integrale

Il prossimo risultato fornisce una *caratterizzazione* della condizione di integrabilità.

Teorema 13.2.1 (Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, D_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ tale che } \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \varepsilon. \qquad (13.2.1)$$

Inoltre, per ogni somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ associata a D_ε si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Sigma(f, D_\varepsilon) \right| < \varepsilon. \qquad (13.2.2)$$

Evidenziamo che, se D_ε è una suddivisione nelle condizioni della (13.2.1), allora *ogni* somma di Riemann $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ ad essa associata approssima $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a meno di ε.
Dimostrazione Dimostriamo innanzitutto che (13.2.1) è equivalente all'integrabilità secondo Riemann.

1. Supponiamo che f sia integrabile, e quindi che $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Ricordiamo che $\mathcal{I}'(f)$ è il sup delle somme inferiori: per la caratterizzazione del sup con ε (si veda il Lemma 4.2.9), applicata qui con $\frac{\varepsilon}{2}$, si ha che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, D'_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ tale che } \quad \mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathrm{s}(f, D'_\varepsilon) \le \mathcal{I}'(f). \qquad (13.2.3)$$

   Analogamente, ricordando che $\mathcal{I}''(f)$ è l'inf delle somme superiori e applicando la caratterizzazione di inf del Lemma 4.2.10, troviamo che

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, D''_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] \text{ tale che } \quad \mathcal{I}''(f) \le \mathrm{S}(f, D''_\varepsilon) \le \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (13.2.4)$$

Poniamo

$$D_\varepsilon := D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon.$$

Per costruzione, D_ε è più fine di entrambe le suddivisioni. Ricordando che, al raffinarsi delle suddivisioni, le somme inferiori crescono e quelle superiori decrescono, e che le somme superiori maggiorano quelle inferiori, si ha che

$$\mathrm{s}(f, D'_\varepsilon) \le \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) \le \mathrm{S}(f, D''_\varepsilon).$$

Combiniamo questa disuguaglianza con le (13.2.3) & (13.2.4), ottenendo

$$\mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathrm{s}(f, D'_\varepsilon) \le \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) \le \mathrm{S}(f, D''_\varepsilon) \le \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{13.2.5}$$

Ora ricordiamo che $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Quindi dalla (13.2.5) segue che

$$0 \le \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(\mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = \varepsilon$$

da cui la (13.2.1).

2. Viceversa, supponiamo che valga la (13.2.1) e osserviamo che, essendo $\mathcal{I}'(f) \le \mathcal{I}''(f)$, $\mathcal{I}'(f)$ il sup delle somme inferiori e $\mathcal{I}''(f)$ l'inf delle somme superiori, si ha che

$$0 \le \mathcal{I}''(f) - \mathcal{I}'(f) \le \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, concludiamo che $\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}'(f)$, da cui l'integrabilità secondo Riemann di f.

Infine, sia $\Sigma(f, D_\varepsilon)$ una generica somma di Riemann associata a una suddivisione D_ε nelle condizioni della (13.2.1). Osserviamo che

$$\Sigma(f, D_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{\le} \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \overset{(2)}{\le} \varepsilon$$

dove per (1) abbiamo usato il fatto che, per construzione, $\Sigma(f, D_\varepsilon) \le \mathrm{S}(f, D_\varepsilon)$, e inoltre il fatto che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}'(f) = \sup\{\mathrm{s}(f, D)\}$, sicché $\mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e quindi $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le -\mathrm{s}(f, D_\varepsilon)$. La disuguaglianza (2) segue dalla (13.2.1). Con ragionamenti del tutto analoghi che invitiamo il lettore a fare si vede che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Sigma(f, D_\varepsilon) \le \mathrm{S}(f, D_\varepsilon) - \mathrm{s}(f, D_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Otteniamo quindi che

$$-\varepsilon \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \Sigma(f, D_\varepsilon) \le \varepsilon,$$

da cui la (13.2.2). □

Diamo ora un esempio di funzione **limitata ma non integrabile**.

Esempio 13.2.2 (La funzione di Dirichlet)**.** Consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

detta *funzione di Dirichlet.* Si vede facilmente che per ogni suddivisione D di $[0,1]$ si ha che

$$\mathrm{s}(f, D) = \sum_{j=0}^{n} 0\,(x_{j+1} - x_j) = 0\,, \quad \mathrm{S}(f, D) = \sum_{j=0}^{n} 1\,(x_{j+1} - x_j) = 1$$

poiché l'inf di f su ciascun intervallino della suddivisione è 0, e il sup di f su ciascun intervallino della suddivisione è 1. Essendo D una suddivisione arbitraria di $[0,1]$, concludiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(f) &= \sup\{\mathrm{s}(f,D) \,:\, D \text{ suddiv. di } [0,1]\} = \sup\{0\} = 0, \\ \mathcal{I}''(f) &= \inf\{\mathrm{S}(f,D) \,:\, D \text{ suddiv. di } [0,1]\} = \sup\{1\} = 1 \end{aligned}$$

sicché $0 = \mathcal{I}'(f) < \mathcal{I}''(f) = 1$ e f non è integrabile secondo Riemann.

Diamo ora delle **condizioni sufficienti per l'integrabilità** (e quindi individuiamo delle *classi di funzioni integrabili*):

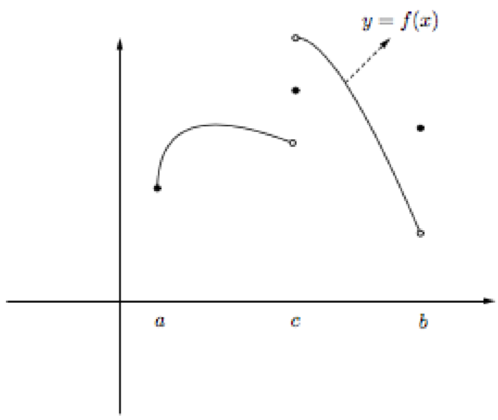
(1) Sono integrabili le funzioni **costanti** $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, e il valore del loro integrale di $[a,b]$ è

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a). \tag{13.2.6}$$

(2) Sono integrabili le funzioni **continue** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(3) Sono integrabili le funzioni **continue a tratti**. Ricordiamo che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ di $[a,b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto (x_j, x_{j+1}) ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{j+1}^-} f(x).$$



(4) Sono integrabili le funzioni **monotone**

(5) Sono integrabili le funzioni **limitate e monotone a tratti**.

Tutte queste condizioni sono **sufficienti**, non necessarie, per l'integrabilità.

Infine, raccogliamo nel prossimo risultato alcune proprietà dell'integrale di Riemann.

Proposizione 13.2.3 (Proprietà dell'integrale)**.** *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni*

$$\begin{aligned} &f+g, \qquad \lambda f, \qquad |f| \ \textit{sono integrabili,} \\ &\forall\, [c,d] \subset [a,b] \quad f|_{[c,d]} \ \textit{è integrabile.} \end{aligned}$$

Inoltre:

(a) **Proprietà di linearità***: $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x;$$

(b) **Proprietà di confronto**: *se* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$, *si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

(c) **Proprietà di additività**: $\forall\, c \in]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(d) **Confronto con il modulo**:

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Osservazione 13.2.4. 1. Osserviamo che la prima parte dell'enunciato garantisce che la combinazione lineare di funzioni integrabili è ancora integrabile, così come la restrizione e il modulo di una funzione integrabile sono anch'essi integrabili.

2. La proprietà di linearità (che può anche essere riformulata sinteticamente in questo modo: *l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali*) garantisce quindi che l'integrale della somma si spezza nella somma degli integrali, e che le costanti possono essere portate fuori dal simbolo di integrale.

3. Una conseguenza semplice, ma importante, della proprietà del confronto è che

$$(f \geq 0 \text{ su } [a,b]) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0. \tag{13.2.7}$$

Il lettore deve tenere ben presente questo: non è possibile che l'integrale di una funzione positiva sia un numero negativo!

4. La proprietà di additività esprime il fatto, del tutto ovvio se si pensa all'interpretazione geometrica del concetto di integrale per funzioni positive, che per integrare f da a a b, posso interporre fra a e b un numero c, integrare da a a c, da c a b, e poi sommare i due risultati.

Il calcolo dell'integrale può semplificarsi in modo significativo se integro funzioni pari/dispari su *intervalli simmetrici rispetto all'origine.*

Proposizione 13.2.5 (Integrali e simmetrie)**.** *Sia*

$$f : [-a,a] \to \mathbb{R} \quad \textit{integrabile.}$$

- *Se* f *è una funzione* **pari** – *cioè* $f(-x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [-a,a]$ – *allora*

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- *Se* f *è una funzione* **dispari** – *cioè* $f(-x) = -f(x)$ *per ogni* $x \in [-a,a]$ – *si ha*

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Infine, anche in vista dei risultati teorici della Sezione 13.4, estendiamo la nozione di integrale al caso in cui l'intervallo di integrazione abbia estremi "invertiti" rispetto alla relazione d'ordine in $\mathbb{R}$.

Definizione 13.2.6 (Integrali orientati)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile e siamo* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *con* $\alpha < \beta$. *Poniamo*

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad e \quad \int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.2.8}$$

Per esempio, $\int_5^3 x^2\,\mathrm{d}x = -\int_3^5 x^2\,\mathrm{d}x$. Evidenziamo inoltre che:

- Dalla formula $\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si evince che il valore di f in un singolo punto non influenza il risultato dell'integrale.
- Con la convenzione (13.2.8) abbiamo che si ha la formula di <u>additività</u>

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \alpha, \beta, \gamma \in [a,b].$$

In particolare, sottolineiamo che non stiamo richiedendo che $\alpha < \gamma < \beta$.

La media integrale

Il lettore deve avere ben chiaro che la definizione di media integrale è data sotto la sola ipotesi che f sia integrabile.

Definizione 13.2.7 (Media integrale)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una <u>funzione integrabile</u>. Chiamiamo* media integrale *di* f *su* $[a,b]$ *il valore*

$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il risultato che diamo ora, invece, necessita dell'ipotesi che f sia continua.

Teorema 13.2.8 (Teorema della media integrale)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *<u>continua</u>. Allora esiste* $c \in [a,b]$ *tale che*

$$f(c) = M_f$$

cioè

$$\exists\, c \in [a,b] \ : \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass (cf. il Teorema 9.1.4), f assume su $[a,b]$ sia il valore di minimo assoluto m che il valore di massimo assoluto M. Quindi vale

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Adesso integriamo le funzioni costantemente uguali a m e a M, e la funzione f, su $[a,b]$; dalla proprietà del confronto e dalla disuguaglianza sopra segue

$$m(b-a) \overset{(1)}{=} \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} M(b-a).$$

dove le uguaglianze (1) e (2) sono dovute alla (13.2.6). Dividendo per $(b-a)$ si ottiene quindi che

$$m \le M_f \le M.$$

Visto che f è continua, possiamo applicare il Teorema dei valori intermedi (cf. il Teorema 9.2.5), e concludiamo che f assume tutti i valori tra m e M e quindi anche M_f. Quindi esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = M_f$. □

Il seguente esempio mostra che la condizione che f sia continua **non può essere omessa**.

Esempio 13.2.9. La funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1, \\ \\ 2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ha media

$$M_f = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2},$$

ma non esiste alcun punto $c \in [0,2]$ tale che $f(c) = \frac{3}{2}$.

13.3 Primitive

Affrontiamo ora il problema del calcolo effettivo degli integrali che, come il lettore può facilmente immaginare, non può essere eseguito, in generale, tramite la definizione. Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale che daremo nel seguito fornisce un procedimento operativo per il calcolo degli integrali. La sua dimostrazione è basata sul primo teorema fondamentale del calcolo integrale; entrambi i risultati chiariscono i legami fra le operazioni di integrazione e derivazione.

Prima di enunciare e dimostrare i due teoremi fondamentali del calcolo, introduciamo il concetto chiave di *primitiva* di una funzione. Ci occuperemo del seguente

Problema 13.3.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Data $f : I \to \mathbb{R}$, trovare una funzione $F : I \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I\,. \tag{13.3.1}$$

Chiamiamo primitiva *di f su I ogni funzione*

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad \textit{derivabile, verificante la } (13.3.1).$$

Osserviamo che il concetto di primitiva ha una chiara interpretazione geometrica: una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni $x_0 \in I$ la tangente al grafico di F nel punto x_0 è la retta, passante per $(x_0, F(x_0))$, il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.

Esempio 13.3.2. La funzione

(1) $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$ ammette come primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = x$; ma anche $\widetilde{F}(x) = x + 1$ è una primitiva di f.

(2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ ammette come primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \frac{x^2}{2}$; ma anche $\widetilde{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 13$ è una primitiva di f.

(3) $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ammette come primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \sin(x)$; ma anche $\widetilde{F}(x) = \sin(x) + 57$ è una primitiva di f.

Già da questi esempi si evince il seguente **fatto fondamentale**: data $f : I \to \mathbb{R}$, se f ammette una primitiva F su I, allora f ammette di fatto **infinite** primitive su I: si ha che

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \text{ la funzione } x \in I \mapsto F(x) + c \text{ è una primitiva di } f.$$

Questo fatto ha una chiara controparte 'geometrica' tenendo conto del fatto che, per ogni $c \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione $F + c$ si ottiene traslando verticalmente il grafico di F di c. Quindi il grafico di F e il grafico di $F + c$ hanno rette tangenti parallele, e cioè con lo stesso coefficiente angolare, dato dalla f.

Diamo ora la seguente

Definizione 13.3.3. *Data $f : I \to \mathbb{R}$, chiamiamo* integrale indefinito *di f (su I) l'insieme di tutte le primitive di f (su I), ammesso che ne esistano. Lo denotiamo con*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Deve essere chiaro al lettore che l'integrale indefinito non è un numero, è un insieme di funzioni!

Per l'integrale indefinito vale la proprietà di linearità:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

che va interpretata come un'uguaglianza fra insiemi di funzioni.

Ci occupiamo ora dello studio della struttura dell'insieme delle primitive. Abbiamo visto che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare tutte le funzioni del tipo

$$\{F + c \,:\, c \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } F \text{ una particolare primitiva di } f.$$

Ci chiediamo se in questo modo **otteniamo tutte le primitive di f?**

- Questo è **VERO** se f **è definita su un intervallo**;
- Questo è **FALSO** se f **non è definita su un intervallo**,

come mostra il seguente

Esempio 13.3.4. La funzione

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad (\text{con } c_1 \neq c_2, \text{ in generale}).$$

Si noti che f è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è un intervallo.

Ritorniamo a funzioni **definite su intervalli**. Si ha il seguente risultato.

Proposizione 13.3.5. *Siano I un <u>intervallo</u>, $f : I \to \mathbb{R}$, e F, $\tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ due primitive di f sull'intervallo I. Allora esiste*

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall\, x \in I \quad \tilde{F}(x) = F(x) + c.$$

Dimostrazione: Introduciamo la funzione $H : I \to \mathbb{R}$ data da

$$H(x) := \tilde{F}(x) - F(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

La funzione H è derivabile e verifica

$$H'(x) = \frac{d}{dx}(\tilde{F} - F)(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Il teorema della derivata nulla (cf. il Teorema 11.3.1), che si applica perché H è definita su un intervallo, assicura che H è costante, cioè

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, x \in I \qquad H(x) = c.$$

Siccome $H = \tilde{F} - F$, concludiamo che

$$\tilde{F}(x) - F(x) = c \qquad \forall\, x \in I.$$

Quindi

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c \qquad \forall\, x \in I.$$

□

Corollario 13.3.6 (Teorema di struttura degli integrali indefiniti)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa ammetta una primitiva F. Allora l'integrale indefinito di f è dato da*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + c\ :\ c \in \mathbb{R}\}\ .$$

Esempio 13.3.7. Una primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Quindi

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c$$

Il lettore noti che sarebbe sbagliato scrivere

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$$

perché l'integrale indefinito è un insieme di infinite funzioni.

Osservazione 13.3.8. Il calcolo di un integrale indefinito fornisce come risultato un insieme di (infinite) funzioni. Per selezionare una sola fra tutte le primitive di una assegnata f, è sufficiente imporre che, in un dato punto x_0, la primitiva assuma un assegnato valore y_0. Si ottiene così un *problema di Cauchy*, sul quale ritorneremo nel Capitolo 15.

Concludiamo questa sezione con una tabella degli

Integrali indefiniti di alcune funzioni elementari

$$\forall\, r \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \qquad \int x^r\ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c\,,$$

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln(|x|) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \sin(\alpha x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \cos(\alpha x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)}\ \mathrm{d}x = \int \big(1+\tan^2(\alpha x)\big)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c\,,$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \int \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x) + c$$

13.4 Legami fra derivazione e integrazione: i teoremi fondamentali del calcolo integrale

Con il Corollario 13.3.6 abbiamo caratterizzato la struttura dell'insieme delle primitive di una data f, ma non abbiamo ancora dato una risposta alla seguente domanda:

sotto quali condizioni una data funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo aperto, ammette una primitiva F?

(dopodiché, se ne ammette una ne ammette infinite). Si noti che questa non è una domanda oziosa, come dimostra il seguente

Esempio 13.4.1. La funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

è integrabile in quanto continua a tratti, ma **non ammette alcuna** primitiva: in altri termini, non esiste alcuna funzione derivabile $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$F'(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{13.4.1}$$

Infatti, se F soddisfa (13.4.1), allora si ha

$$F'_+(0) = 1, \qquad F'_-(0) = -1.$$

e quindi F non è derivabile in $x = 0$.

Il **primo teorema fondamentale del calcolo** fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza di una primitiva: infatti, esso garantisce che, se $f : I \to \mathbb{R}$ è <u>continua</u> su I, allora f ammette (infinite) primitive su I. Ad esso premettiamo la seguente

Definizione 13.4.2. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione <u>integrabile</u>. Chiamiamo* funzione integrale *di f la funzione $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{per ogni } x \in [a,b],$$

con $c \in [a,b]$ fissato.

Osservazione 13.4.3. 1. La funzione integrale si ottiene calcolando l'integrale di f sull'intervallo $[c,x]$ (se $x > c$; diversamente, si ricorre all'*integrale orientato* della Definizione 13.2.6): si osservi che l'integrale è ben definito in quanto f, essendo integrabile su $[a,b]$, è pure integrabile su $[c,x]$.

2. Nella definizione di A, la variabile indipendente x compare nel secondo estremo di integrazione, mentre il primo estremo è fisso.

3. Scriveremo

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ma anche } \int_c^x f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \int_c^x f(r)\,\mathrm{d}r, \quad \int_c^x f(z)\,\mathrm{d}z;$$

in effetti, la variabile di integrazione è *muta*, non ha cioè un significato sostanziale né compare nel risultato finale dell'integrale. È però vietato scrivere $\int_c^x f(x)\,\mathrm{d}x$!

Diamo ora il

Teorema 13.4.4 (Primo teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione <u>continua</u> su $[a,b]$, $c \in [a,b]$ e $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale*

$$A(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in (a,b)$, e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b).$$

Dimostrazione. Poiché f è continua su $[a, b]$, f è anche integrabile. Quindi la funzione integrale A è ben definita. Vedremo che la continuità di f entrerà in gioco anche in altri punti della dimostrazione.

Si deve provare che

1. $\forall\, x_0 \in (a, b)$, la funzione A è derivabile, con
2. $A'(x_0) = f(x_0)$.

Fissiamo $x_0 \in (a, b)$ e calcoliamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} A(x_0 + h) - A(x_0) &= \int_c^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{=} \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ove (1) segue dalla proprietà di additività dell'integrale. Si ha quindi

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Distinguiamo ora due casi:

- **Caso 1:** Se $h > 0$,

  $$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  è la media integrale di f sull'intervallo $[x_0, x_0 + h]$. Poiché f è continua, possiamo applicare il teorema della media integrale e dedurre che

  $$\exists\, \xi_h \in [x_0, x_0 + h] \quad \text{tale che} \quad \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

- **Caso 2:** Se $h < 0$, si ha $x_0 + h < x_0$ e

  $$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Ora osserviamo che

  $$-\frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x_0 - (x_0 + h)} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  è la media di f su $[x_0 + h, x_0]$. Ancora per il teorema della media integrale,

  $$\exists\, \xi_h \in [x_0 + h, x_0] \quad \text{tale che} \quad \frac{1}{h} \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

In conclusione, $\exists\, \xi_h$ tale che

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(\xi_h) \qquad \text{con} \begin{cases} \xi_h \in [x_0, x_0 + h] & \text{se } h > 0, \\ \xi_h \in [x_0 + h, x_0] & \text{se } h < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h)$$

e

$$\lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x_0)$$

perché, per $h \to 0$, si ha che $\xi_h \to x_0$, e la funzione f è continua in x_0 (si ricordi il Teorema sulla caratterizzazione della continuità tramite il limite di funzioni). Abbiamo quindi dimostrato che

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in (a, b).$$

□

Corollario 13.4.5. *Le funzioni continue f su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva.*

Tutte e sole le primitive di f si ottengono aggiungendo una costante arbitraria a

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

dove c è un elemento di I: quindi

processo di integrazione $\Rightarrow$ primitive di una funzione continua

Con il prossimo risultato andremo a stabilire, in un certo senso, l'implicazione inversa con il prossimo risultato.

Teorema 13.4.6 (Il secondo teorema fondamentale del calcolo)**.** *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Useremo la notazione $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$ e quindi scriveremo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b}$$

Questo risultato si può sintetizzare con l'implicazione

primitive di una funzione continua $\Rightarrow$ calcolo di integrali

Dimostrazione. Dal primo teorema fondamentale del calcolo integrale (che possiamo applicare perché f è una funzione continua) si ha che la funzione integrale $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da $A(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è una primitiva di f. Sia ora F una qualsiasi altra primitiva di f. Dal Corollario 13.3.6 segue che A e F differiscono per una costante, quindi

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \ \ \forall\, x \in [a, b] \ : \ F(x) = A(x) + c.$$

In particolare, sostituendo $x = a$ deduciamo che

$$F(a) = A(a) + c = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c = 0 + c = c,$$

e quindi

$$F(x) = A(x) + c = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a) \qquad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Sostituendo $x = b$ si ottiene la tesi. □

13.5 Integrazione per parti

Entriamo ora nel vivo del calcolo di integrali una prima importante tecnica, l'integrazione per parti.

Teorema 13.5.1 (Formula di integrazione per parti)**.** *Siano f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua (cioè, f, $g \in \mathrm{C}^1((a,b))$). Allora*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13.5.1}$$

Dimostrazione. Dalla formula di Leibniz per il calcolo della derivata della funzione prodotto si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Integrando entrambi i membri si ottiene

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b\,,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal secondo teorema fondamentale del calcolo. Abbiamo quindi dedotto la (13.5.1). □

Vi è una versione della (13.5.1) per gli integrali indefiniti:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 13.5.2.

- La (13.5.1) riconduce il calcolo dell'integrale $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x$ al calcolo dell'integrale $\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x$ (la derivata è stata "scaricata" dalla f alla g). L'idea è che si dovrebbe passare dall'"integrale difficile" $\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x$ all'integrale "più semplice" $\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x$.
- Operativamente, si può applicare la formula (13.5.1) al calcolo dell'integrale del prodotto di due funzioni h e k
$$\int_a^b h(x)k(x)\;\mathrm{d}x$$
scegliendo in modo opportuno quale, fra h e k, dovrà giocare il ruolo di f', e quale delle due avrà il ruolo di g. Se, per esempio, scegliamo di trattare h come f', denotando con H una (qualsiasi) primitiva di h troviamo che
$$\int_a^b h(x)k(x)\,\mathrm{d}x = H(x)k(x) - \int_a^b H(x)k'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Per riportarci all'integrale di destra, abbiamo quindi derivato la k e integrato la h.
- Per applicare in modo efficace la formula di integrazione per parti all'integrale di un prodotto di due funzioni, è quindi di fondamentale importanza scegliere bene quale delle due funzioni derivare e quale integrare. Nei seguenti esempi, illustriamo questa tecnica in alcuni casi.

Miscellanea di integrali per parti

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica. *Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x), \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio****.*
Ad esempio

$$\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -\int 1\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x\sin(2x) = \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + c$$

(il simbolo $\stackrel{i.p}{=}$ significa che l'uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di integrazione per parti). Il seguente esempio mostra che può essere necessario applicare l'integrazione per parti ripetutamente:

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -x^3\cos(x) + 3\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare l'ultimo integrale, applico la formula (13.5.1):

$$\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e infine

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - x\cos(x) = \sin(x) - x\cos(x) + c\,.$$

Allora concludo

$$\int x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale. *Sia $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x}, \\ g \leftrightarrow P(x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio****.*
Ad esempio

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -\int 1e^x\,\mathrm{d}x + xe^x = (x-1)e^x + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica. *Sia $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\ln(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica****.*
Ad esempio

$$\int x\ln(2x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(2x) + c\,.$$

Troviamo quindi che

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\ln(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + x\ln(x) = -x + x\ln(x) + c\,.$$

Prodotto di un polinomio per l'arcotangente. *Sia $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha\neq 0$. Consideriamo l'integrale indefinito*

$$\int P(x)\arctan(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x), \\ g \leftrightarrow \arctan(\alpha x), \end{cases}$$

cioè ***integriamo il polinomio e deriviamo la funzione arcotangente****.*
Ad esempio

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x \overset{i.p.}{=} -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}x^2\arctan(x)\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale ragiono in questo modo

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c\,.$$

13.6 Integrazione per sostituzione

Iniziamo a dare una versione della formula di integrazione per sostituzione per gli integrali indefiniti.

Proposizione 13.6.1 (Formula di integrazione per sostituzione per gli integrali indefiniti)**.** *Siano $f,\, g:(a,b)\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora*

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,. \tag{13.6.1}$$

Dimostrazione. La formula per il calcolo della derivata della funzione composta fornisce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad \forall\, x\in(a,b).$$

Calcolando l'integrale indefinito di entrambi i membri e osservando che

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\circ g)(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c\,,$$

ottengo (13.6.1). □

Come conseguenza immediata della (13.5.1), otteniamo le seguenti formule

$$\forall\, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int g(x)^r g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c\,, \tag{13.6.2a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|g(x)|) + c\,, \tag{13.6.2b}$$

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c\,, \tag{13.6.2c}$$

$$\int \cos(g(x))\,\mathrm{d}x = \sin(g(x)) + c\,, \tag{13.6.2d}$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\left(1+\tan^2(g(x))\right)\,\mathrm{d}x = \tan(g(x)) + c\,, \tag{13.6.2e}$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c\,, \tag{13.6.2f}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(g(x)) + c\,. \tag{13.6.2g}$$

Esempio 13.6.2. Calcoliamo

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$

combinando la tecnica di integrazione per parti con la tecnica di integrazione per sostituzione. Integrando per parti, otteniamo

$$\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x = \int 1\arctan(x)\ \mathrm{d}x \stackrel{i.p.}{=} -\int x\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + x\arctan(x)\,.$$

Per calcolare il secondo integrale indefinito $\int x\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ procediamo per sostituzione, ponendo $u = x^2$. Allora $\mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x$, quindi

$$\int x\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(|1+u|) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$

Concludiamo che

$$\int \arctan(x)\ \mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,.$$

Diamo ora la formula di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti.

Proposizione 13.6.3. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x = \varphi(t)$ un cambiamento di variabile tale che*

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \text{ è invertibile e derivabile con } \varphi' \text{ continua: } \varphi \in \mathrm{C}^1(I).$$

Allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f. Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Per l'ipotesi la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile e vale

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Dunque

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (F(\varphi(t)))'\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a)))$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Analizziamo la struttura della formula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Formalmente, si ha che

$$\begin{array}{lcl} f(x) & \rightsquigarrow & f(\varphi(t)) \\ \mathrm{d}x & \rightsquigarrow & \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \\ \int_a^b & \rightsquigarrow & \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \end{array}$$

Miscellanea di integrali per sostituzione

Esempio 13.6.4. Per calcolare

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

effettuo una sostituzione basata sulla *formula parametrica*

$$\sin(x) = 2\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{13.6.3}$$

(cf. la tabella a pag. 35), che segue dalla formula

$$\frac{1}{2}\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Quindi

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$$

Effettuo la sostituzione

$$\begin{cases} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x = 2\arctan(t) \\ x = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{cases}$$

Quindi

$$I = \int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Esempio 13.6.5. Per calcolare

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ricordo che

$$\sin^2(t)+\cos^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|\,.$$

Ponendo

$$x = \sin(t)\,,$$

si elimina la radice, poiché $\sqrt{1-x^2} \leftrightarrow |cos(t)|$ (il segno di $\cos(t)$ dipende dall'intervallo di integrazione). Si ha quindi

$$\begin{cases} x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin(x) \\ x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \\ x = 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

N.B.: $\cos \geq 0$ su $[0, \pi/2] \;\Rightarrow\; \sqrt{1-x^2} \leftrightarrow \cos(t)$. Quindi

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 13.6.6.

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/4} \sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$$

Per "eliminare" $\sqrt{1-(2x)^2}$, conviene porre

$$2x = \sin(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin(2x)$$

da cui

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(t)\mathrm{d}t \\ x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ x = \frac{\sqrt{3}}{4} \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

N.B.: $\cos > 0\,\text{su}\,[0, \pi/3] \;\Rightarrow\; \sqrt{1-4x^2} \leftrightarrow \cos(t)$.

Quindi

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Esempio 13.6.7.

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Si ha

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \cosh(t)$$

(N.B.: $\cosh > 0$ su $\mathbb{R}$!) Ponendo

$$x = \sinh(t)\,,$$

si elimina la radice. Calcoliamo l'integrale indefinito (da cui naturalmente seguirà il calcolo di I)

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

con le sostituzioni

$$\begin{cases} x = \sinh(t) \\ \mathrm{d}x = \cosh(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Quindi

$$I = \int \cosh(t)\cosh(t)\,\mathrm{d}t$$

Integrando per parti si ha

$$\int \overbrace{\cosh(t)}^{f'}\overbrace{\cosh(t)}^{g}\,\mathrm{d}t = \sinh(t)\cosh(t) - \int \overbrace{\sinh^2(t)}^{\cosh^2(t)-1}\,\mathrm{d}t$$

da cui

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t+\sinh(t)\cosh(t)}{2} + c$$

Essendo $\boxed{t = \sinh^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})}$ e $\cosh(t) = \sqrt{x^2+1}$,

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + c$$

13.7 *Appunti operativi:* integrazione delle funzioni razionali fratte

Caso generale

Consideriamo l'integrale (indefinito o definito)

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

ove $N(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali.

Supponiamo $\text{grado}(N) \geq \text{grado}(D)$. Per esempio:

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Dividiamo $N(x)$ per $D(x)$, cioè scriviamo

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \text{con}$$

$Q(x)$ polinomio quoziente,

$R(x)$ polinomio resto, $\text{grado}(R) < \text{grado}(D)$.

Allora

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \overbrace{Q(x)}^{\textit{polimomio}!}\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

e $\text{grado}(R) < \text{grado}(D)$!

Per esempio

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}\,,$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln(|x+1|) + c$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}\,,$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + c$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\,,$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

Integrazione di funzioni con numeratore di grado inferiore del denominatore D'ora in poi confiniamo la discussione all'integrazione di funzioni

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$$

ove $R(x)$, $D(x)$ polinomi a coefficienti reali e

$$\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$$

Tre casi:

- $\mathrm{gr}(D) = 1$
- $\mathrm{gr}(D) = 2$
- $\mathrm{gr}(D) > 2$

Caso I: $\mathrm{gr}(D) = 1$

Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(D) = 1 \quad &\Rightarrow \quad D(x) = ax + b,\ a \neq 0 \\ \mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{gr}(R) = 0 \\ &\Rightarrow \quad R(x) = k\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{k}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\ln\left(|ax+b|\right) + c$$

Per esempio

$$\int \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(|2x-1|\right) + c$$

Caso II: $\mathrm{gr}(D) = 2$

Allora
$$D(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$$
$$\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{gr}(R) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad R(x) = \alpha x + \beta\,.$$
Consideriamo il discriminante
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

<u>**Tre casi:**</u>

1. $\Delta > 0$
2. $\Delta = 0$
3. $\Delta < 0$

Caso II (1): $\mathrm{gr}(D) = 2 \ \&\ \Delta > 0$

Allora
$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$x_1,\, x_2 \text{ radici reali distinte di } D(x) = 0$$

Allora, esistono $A,\, B \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$
e quindi
$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x - x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x - x_2}\,\mathrm{d}x = A\ln(|x - x_1|) + B\ln(|x - x_2|) + c$$
Per esempio
$$\frac{2}{x^2 + 5x + 4} = \frac{2}{(x+4)(x+1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+1}\,,$$
e trovo A e B facendo denominatore comune:
$$A(x+1) + B(x+4) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A+B)x = 0 \\ A + 4B = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -B \\ 3B = 2 \end{cases}$$
Quindi
$$\int \frac{2}{x^2 + 5x + 4}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln(|x+1|) - \frac{2}{3}\ln(|x+4|) + c$$

Per esempio
$$\int \frac{3x+1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x-3}\,\mathrm{d}x\,,$$
e trovo A e B facendo denominatore comune:
$$A(x-3) + B(x-2) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A+B)x = 3x \\ -3A - 2B = 1 \end{cases}$$

Quindi $B = 10$ e $A = -7$ e
$$\int \frac{3x+1}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = -7\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + 10\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = -7\ln(|x-2|) + 10\ln(|x-3|) + c$$

Caso II (2): $\mathrm{gr}(D) = 2$ & $\Delta = 0$

Allora

$$D(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$
$$D(x) = 0 \text{ ha due radici reali coincidenti}$$

Due casi:

- $\mathrm{gr}(R) = 0$
- $\mathrm{gr}(R) = 1$

– Se $\mathrm{gr}(R) = 0$, allora $R(x) = k$ e

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{k}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{k}{a}(x-x_1)^{-1} + c$$

– Se $\mathrm{gr}(R) = 1$, allora $R(x) = \alpha x + \beta$, con $\alpha \geq 0$. Due metodi:

1. Scompongo nella somma di due frazioni:

$$\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x$$

   Ad esempio

$$\frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} \iff A(x-2) + B = x + 2$$

   Quindi $A = 1$, $B = 4$ e

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{(x-2)^2} = \ln(|x-2|) - 4\frac{1}{x-2} + c$$

2. evidenzio al numeratore la derivata del denominatore, con manipolazioni algebriche. Ad esempio

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{(x-2)^2} &= \frac{x+2}{x^2-4x+4} \qquad \begin{cases} (x^2-4x+4)' \\ = 2x - 4 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x+4-4+4}{x^2-4x+4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x-4)+8}{x^2-4x+4} \end{aligned}$$

   Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+4) - 4\frac{1}{x-2} + c = \ln(|x-2|) - 4\frac{1}{x-2} + c \end{aligned}$$

Caso II (3): $\mathrm{gr}(D) = 2$ & $\Delta < 0$

Allora D ha due radici complesse coniugate, quindi non si fattorizza nel prodotto di due polinomi reali di grado 1.
Per esempio $D(x) = x^2 + x + 1$.
Calcolo

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Primo passo: evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($(x^2+x+1)' = 2x+1$).

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+1-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Secondo passo: per calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

evidenzio al denominatore la somma di 1 e il quadrato di un binomio (in modo da riportarmi a $\sim(\arctan)'$).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Caso III: $\mathrm{gr}(D) > 2$

Allora D si fattorizza nel prodotto di

- fattori di primo grado
- fattori irriducibili di secondo grado

Per esempio

$$\begin{aligned}&x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)\\ &x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)\\ &x^3-2x^3 = x^2(x-2)\\ &x^4+2x^3+2x^2+1 = (x+1)^2(x^2+1)\end{aligned}$$

– Per calcolare

$$\int R(x)/D(x)\,\mathrm{d}x$$

scomponiamo $R(x)/D(x)$ nella somma di frazioni ("fratti semplici") aventi come denominatori i fattori di D. Per la ricerca dei numeratori, si tiene conto della molteplicità dei fattori in cui è

scomposto D.
Per esempio

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

facendo denominatore comune, trovo

$$\begin{aligned}
&1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+C-B=0 \\ A-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=2B=-2A \\ A+2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \\ A=\frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

Per calcolare il secondo, evidenzio al numeratore la derivata del denominatore ($= 2x+1$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c
\end{aligned}$$

Per esempio, calcolo

$$I = \int \frac{1}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$$

N.B.: il fattore x ha <u>molteplicità 2.</u>
Cerco A, B, C, $D \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Facendo denominatore comune, trovo

$$\begin{aligned}
&1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 \\
&1 = Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 3A=0 \\ 3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=0 \\ D=-\frac{1}{3} \\ C=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Calcolo

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Capitolo 14

Integrali impropri

Ricordiamo che le ipotesi di base che danno senso all'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sono che la funzione integranda f sia considerata su un **intervallo limitato** (a,b), e che f sia ivi limitata. In questo Capitolo intendiamo estendere la definizione di integrale (e il calcolo, in un senso opportuno, di integrali) ai casi in cui

1. la funzione integranda f sia **illimitata** sull'intervallo di integrazione (a,b), oppure
2. l'intervallo di integrazione (a,b), sia **illimitato**, e in generale
3. si integri una funzione **illimitata** su intervallo **illimitato**.

In queste situazioni, la teoria dell'integrazione secondo Riemann vista nel Capitolo 13 non è più applicabile; essa sarà quindi estesa tramite la nozione di integrale improprio (o generalizzato), che introduciamo nelle Sezioni 14.1–14.3. Nella Sezione 14.4 acquisiremo le tecniche per studiare l'integrabilità in senso improprio delle funzioni positive, ed evidenzieremo i legami fra la teoria degli integrali impropri e quella delle serie numeriche. Infine, nella Sezione 14.5 vedremo diversi esempi di studio del carattere di un integrale improprio.

14.1 Integrali impropri su intervalli limitati

Iniziamo con l'estendere la nozione di integrale al caso in cui, su un intervallo di integrazione limitato, la funzione integranda sia *illimitata*. Distinguiamo tre casi:

1. f è illimitata in un intorno destro dell'estremo sinistro dell'intervallo di integrazione: per esempio,
$$f:(0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\frac{1}{x} \tag{14.1.1a}$$
e si intende dare significato all'integrazione di f sull'intervallo, *semiaperto a sinistra*, $(0,1]$;

2. f è illimitata in un intorno sinistro dell'estremo destro dell'intervallo di integrazione: per esempio,
$$f:\left[\frac{1}{2},1\right)\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\frac{1}{\ln(x)} \tag{14.1.1b}$$
e si intende dare significato all'integrazione di f sull'intervallo, *semiaperto a destra*, $\left[\frac{1}{2},1\right)$;

3. f è illimitata nell'intorno di un *punto interno* all'intervallo di integrazione: per esempio,

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, \\ 57 \end{cases} \tag{14.1.1c}$$

(f è stata qui definita su $[0,2]$, attribuendole il valore 'fittizio' 57 in $x = 1$, ma il valore che f assume in un punto è del tutto ininfluente ai fini del calcolo dell'integrale!), e si intende dare significato all'integrazione di f sull'intervallo $[0,2]$.

Integrali impropri su intervalli semiaperti a sinistra

Esaminiamo il problema di estendere la nozione di integrale al caso di funzioni funzioni $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, illimitate in un intorno destro di a: in tal caso, diremo anche che f ha una singolarità in a. Per esempio, la funzione dell'esempio (14.1.1a) ha una singolarità in 0.

Premettiamo alla definizione di integrale improprio il concetto di funzione *localmente integrabile.*

Definizione 14.1.1. *Diciamo che una funzione $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ è* localmente integrabile *se è integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo $[c,b] \subset (a,b]$ per ogni $c \in (a,b]$.*

La locale integrabilità è l'*ipotesi di base* per la seguente

Definizione 14.1.2 (Integrali impropri su intervalli semiaperti a sinistra)**.** *Sia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.*

- *Se $\exists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, si dice che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ e si pone*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

il numero reale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ viene detto integrale improprio di f su $[a,b]$*. In tal caso, si dice anche che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è* convergente.

- *Se $\exists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \{-\infty, +\infty\}$, si dice che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è divergente, o che f non è integrabile in senso improprio.*

- *Se $\nexists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, si dice che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è oscillante.*

È chiaro il ruolo dell'ipotesi di locale integrabilità: essa assicura che gli integrali $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ siano ben definiti per ogni $c \in (a,b]$. Si può vedere che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, allora f è anche integrabile in senso improprio su $(a,b]$ nel senso appena visto, e i due integrali (di Riemann, e improprio) coincidono. Quindi **l'integrale improprio è un'estensione dell'integrale di Riemann**.

Esempio 14.1.3 (La funzione $\frac{1}{x^\alpha}$)**.** Consideriamo la funzione

$$f : (0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \frac{1}{x^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Chiaramente f ha una singolarità in 0 (se $\alpha \leq 0$, $\lim_{x \to 0^+} x^{-\alpha} = 0$ se $\alpha < 0$ e $\lim_{x \to 0^+} x^{-\alpha} = 1$ se $\alpha = 0$, quindi la funzione può essere estesa a una funzione continua su tutto $[0,1]$ ponendo $f(0) := \lim_{x \to 0^+} x^{-\alpha}$, e la funzione estesa è quindi integrabile secondo Riemann su $[0,1]$). Per studiarne l'integrabilità in senso improprio, calcoliamo per ogni $c \in (0,1]$

$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

distinguendo due casi:

1. se $\alpha = 1$, si ha
$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\log(x)]_c^1 = -\log(c) \text{ e quindi } \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^+}(-\log(c)) = +\infty,$$
cioè $f(x) = \frac{1}{x}$ ha integrale improprio divergente su $(0,1]$;

2. se $\alpha \neq 1$, si ha
$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
Ora,
$$\lim_{c\to 0^+}\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ se } 1-\alpha > 0 \text{ cioè } \alpha < 1, \\ -\infty \text{ se } 1-\alpha < 0 \text{ cioè } \alpha > 1 \end{cases}$$
e quindi
$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{ se } \alpha < 1, \\ +\infty \text{ se } \alpha > 1\,. \end{cases}$$

Quindi la funzione $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $(0,1]$ se e se solo se $\alpha < 1$.
Per esempio, si ha in particolare che

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **NON È** integrabile in senso improprio su $(0,1]$;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **È** integrabile in senso improprio su $(0,1]$.

Integrali impropri su intervalli semiaperti a destra

Ora estendiamo la nozione di integrale al caso di funzioni funzioni $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, illimitate in un intorno sinistro di b: in tal caso, diremo anche che f ha una singolarità in b. Per esempio, la funzione dell'esempio (14.1.1b) ha una singolarità in 1.

Definizione 14.1.4. *Diciamo che una funzione $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ è* localmente integrabile *se è integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo $[a,c] \subset [a,b)$ per ogni $c \in [a,b)$.*

Definizione 14.1.5 (Integrali impropri su intervalli semiaperti a destra)**.** *Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su $[a,b)$.*

- *Se*
$$\exists \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$
si dice che f è integrabile in senso improprio su $[a,b)$ e si pone
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- *Se $\exists \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \in \{-\infty,+\infty\}$, si dice che l'integrale improprio di f su $[a,b)$ è divergente, oppure che f non è integrabile in senso improprio.*
- *Se $\nexists \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, si dice che l'integrale improprio di f su $[a,b)$ è oscillante.*

Anche in questo caso si vede che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, allora f è anche integrabile in senso improprio su $[a,b)$ nel senso visto, e i due integrali (di Riemann, e improprio) coincidono.

Esempio 14.1.6. Consideriamo la funzione

$$f : [0,1) \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \frac{1}{(1-x)^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Chiaramente f ha una singolarità in 1. Per studiarne l'integrabilità in senso improprio, calcoliamo per ogni $c \in [0,1)$

$$\int_0^c \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $s = (1-x)$, si vede che $\int_0^c \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^{1-c} \frac{1}{s^\alpha}(-\,\mathrm{d}s) = \int_{1-c}^1 \frac{1}{s^\alpha}\,\mathrm{d}s$, e quindi

$$\lim_{c\to 1^-}\int_0^c \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 1^-}\int_{1-c}^1 \frac{1}{s^\alpha}\,\mathrm{d}s = \lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{s^\alpha}\,\mathrm{d}s.$$

Per quanto visto nell'Esempio 14.1.3, concludiamo quindi che la funzione $f(x) := \frac{1}{(1-x)^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $[0,1)$ se e se solo se $\alpha < 1$.

Integrali impropri su intervalli limitati con singolarità all'interno

Consideriamo funzioni con una singolarità all'interno dell'intervallo di integrazione. La definizione di integrale improprio in questo caso si appoggia alle Definizioni 14.1.2 & 14.1.5.

Definizione 14.1.7. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ punto interno, e supponiamo che f non sia limitata nell'intorno di x_0. Si dice che f è integrabile in senso improprio in $[a,b]$ se*

- *f è integrabile (in senso improprio) in $[a,x_0)$* ***E***
- *f è integrabile (in senso improprio) in $(x_0,b]$*

e si pone

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questa definizione si estende al caso di funzione illimitata nell'intorno di più punti $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in $[a,b]$.

Esempio 14.1.8. Consideriamo la funzione $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x-1)(x-2)} & \text{se } x \in [0,3]\setminus\{1,2\}, \\ -1 & \text{se } x = 1, \\ 2 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Chiaramente, f ha singolarità nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Secondo la Definizione 14.1.7, f è integrabile in senso improprio su $[0,3]$ se e solo se è integrabile (impropriamente) sugli intervalli semiaperti (a destra o a sinistra) $[0,1)$, $(1,\frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2},2)$, e $(2,3]$, cioè

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{c\to 1^-}\int_0^c \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}, &&\exists \lim_{c\to 1^+}\int_c^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}, \\ &\exists \lim c \to 2^- \int_{\frac{3}{2}}^c \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}, &&\exists \lim_{c\to 2^+}\int_c^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,; \end{aligned} \tag{14.1.2}$$

ribadiamo che le 4 condizioni devono valere contemporaneamente. Ora,

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^c \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= [\ln(|x-2|) - \ln(|x-1|)]_0^c \\ &= \ln(2-c) - \ln(1-c) - \ln(2) \longrightarrow +\infty \text{ per } c \to 1^-. \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{c\to 1^-}\int_0^c \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = +\infty$. Con calcoli analoghi si vede che f non è integrabile in senso improprio su alcuno degli intervalli $(1,\frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2},2)$, e $(2,3]$. Pertanto f NON è integrabile in senso improprio su $[0,3]$.

Ritorniamo infine sulla (14.1.2): si noti che l'intervallo $(1,2)$, a entrambi gli estremi del quale si trova una singolartià per f, è stato "spezzato" nei due sottointervalli $(1,\frac{3}{2}]$ e $[\frac{3}{2},2)$ in modo da "isolare" le singolarità in uno degli estremi; infatti, sarebbe stato possibile considerare un qualsiasi altro punto di suddivisione $\bar{x}\in(1,2)$ al posto di $\bar{x}=\frac{3}{2}$.

14.2 Integrali impropri su semirette

Esaminiamo ora la seconda tipologia di situazioni alla quale vogliamo estendere il concetto di integrale: funzioni definite su intervalli illimitati: in particolare, su *semirette.* Iniziamo dapprima a considerare funzioni definite su semirette *inferiormente limitate*, cioè del tipo $[a,+\infty)$ con $a\in\mathbb{R}$. Premettiamo la seguente

Definizione 14.2.1. *Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Diciamo che f è localmente integrabile su $[a,+\infty)$ se f è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a,c]$ per ogni $c>a$.*

La locale integrabilità è l'ipotesi di base per la seguente

Definizione 14.2.2 (Integrali impropri su semirette inferiormente limitate)**.** *Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ localmente integrabile su $[a,+\infty)$.*

- *Se*
$$\exists \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R},$$
allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$ e si pone
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- *Se il limite esiste, ma non è finito, allora f ha integrale improprio divergente su $[a,+\infty)$.*

- *Se $\nexists \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, si dice che l'integrale improprio di f su $[a,+\infty)$ è oscillante.*

La definizione di integrale improprio su semirette superiormente limitate è del tutto analoga.

Definizione 14.2.3 (Integrali impropri su semirette superiormente limitate)**.** *Sia $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ localmente integrabile su $(-\infty,b]$ (cioè, f è integrabile secondo Riemann su $[c,b]$ per ogni $c<b$).*

- *Se*
$$\exists \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R},$$
allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $(-\infty,b]$ e si pone
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- *Se il limite esiste, ma non è finito, allora f ha integrale improprio divergente su $(-\infty,b]$.*

- *Se i$\nexists \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, si dice che l'integrale improprio di f su $(-\infty,b]$ è oscillante.*

Esempio 14.2.4 (La funzione $\frac{1}{x^\alpha}$)**.** Consideriamo la funzione

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \frac{1}{x^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Per studiarne l'integrabilità in senso improprio, calcoliamo per ogni $c > 1$

$$\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$$

distinguendo due casi:

1. se $\alpha = 1$, si ha
$$\int_1^c \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = [\log(x)]_1^c = \log(c) \text{ e quindi } \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = +\infty,$$
cioè $f(x) = \frac{1}{x}$ ha integrale improprio divergente su $[1, +\infty)$;
2. se $\alpha \neq 1$, si ha
$$\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^c = \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$
Ora,
$$\lim_{c\to+\infty} \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ se } 1-\alpha < 0 \text{ cioè } \alpha > 1, \\ +\infty \text{ se } 1-\alpha > 0 \text{ cioè } \alpha < 1 \end{cases}$$
e quindi
$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ se } \alpha > 1, \\ +\infty \text{ se } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Quindi la funzione $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$ se e se solo se $\alpha > 1$.

Per esempio, si ha in particolare che

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **È** integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$;
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **NON È** integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$.

Esempio 14.2.5.

1. La funzione
$$f(x) = e^{\gamma x},\ x \in [0, +\infty)\ (\gamma \neq 0), \text{ è integrabile su } [0, +\infty) \text{ se e solo se } \gamma < 0.$$
Infatti,
$$\int_0^c e^{\gamma x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{\gamma x}}{\gamma}\right]_0^c = \frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma c} - 1\right)$$
e quindi
$$\lim_{c\to+\infty} \int_0^c e^{\gamma x}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{|\gamma|} & \text{se } \gamma < 0, \\ +\infty & \text{se } \gamma > 0. \end{cases}$$
2. In modo del tutto analogo si vede che la funzione
$$f(x) = e^{\gamma x},\ x \in (-\infty, 0]\ (\gamma \neq 0), \text{ è integrabile su } (-\infty, 0] \text{ se e solo se } \gamma > 0.$$

Esempio 14.2.6. La funzione $f(x) = \cos(x)$ ha integrali impropri oscillanti su $[0, +\infty)$ e su $(-\infty, 0]$. Infatti, per quel che riguarda l'integrale improprio su $[0, +\infty)$ (si ragiona analogamente per sulla semiretta $(-\infty, 0]$), osserviamo che

$$\int_0^c \cos(x)\, \mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^c = \sin(c) \qquad \text{e} \qquad \nexists \lim_{c\to+\infty} \sin(c).$$

Analogamente, si vede che la funzione $f(x) = \cos(x)$ ha integrali impropri oscillanti su $[0, +\infty)$ e su $(-\infty, 0]$.

14.3 Integrali impropri su intervalli generali

Appoggiandoci alle definizioni date nelle Sez. 14.1 e 14.2 possiamo ora estendere la definizione di integrale al caso più generale: consideriamo funzioni

- possibilmente **illimitate**,
- definite su intervalli possibilmente **illimitati**.

Esamineremo quindi funzioni definite su intervalli *aperti* (generali) (a, b), con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

L'esempio prototipo di questa situazione è dato da

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x^\alpha}, \qquad \alpha > 0,$$

che presenta una singolarità in 0, e che vogliamo integrare sulla semiretta illimitata superiormente $(0, +\infty)$. Come vedremo, la definizione di integrale improprio in questo caso si ispira alla proprietà di additività dell'integrale di Riemann: "spezziamo" lo studio dell'integrabilità in senso improprio di $\frac{1}{x^\alpha}$ nello studio degli integrali impropri

- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \rightsquigarrow$ integrale improprio sull'intervallo semiaperto a sinistra $(0, 1]$
- $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \rightsquigarrow$ integrale improprio sulla semiretta $[1, +\infty)$.

e studiamo la convergenza dei due integrali separatamente.

Iniziamo con il precisare il concetto di funzione localmente integrabile nel caso generale,

Definizione 14.3.1. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Diciamo che f è localmente integrabile su (a, b) se se f è integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo $[\alpha, \beta]$ di (a, b),con α, $\beta \in \mathbb{R}$.*

Possiamo ora dare la seguente

Definizione 14.3.2 (Integrali impropri su intervalli aperti generali)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, una funzione localmente integrabile. Diciamo che f è integrabile in senso improprio su (a, b) per ogni $c \in (a, b)$ si ha che f è integrabile (in senso improprio) su $(a, c]$ e su $[c, b)$, e in tal caso poniamo*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Osservazione 14.3.3. Si noti che la definizione precedente si appoggia alle Definizioni di integrale improprio date nelle Sez. 14.1 & 14.2: per esempio, supponendo che $(a, b) = (0, +\infty)$ e che stiamo considerando una funzione che ha una singolarità (solo) in 0, per avere l'integrabilità in senso improprio su $(0, +\infty)$ si richiede l'integrabilità sull'intervallo semiaperto $(0, 1]$ (nel senso della Definizione 14.1.2), e sulla semiretta $[1, +\infty)$ (nel senso della Definizione 14.2.2).

Si può dimostrare che l'integrabilità di f sull'intervallo (a, b) non dipende dalla scelta del punto c (e che, quindi, la Definizione 14.3.2 è ben data): in altri termini, data una $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, localmente integrabile, se essa è integrabile (in senso improprio) su $(a, c]$ e su $[c, b)$ per un certo $c \in (a, b)$, allora essa è integrabile (in senso improprio) su $(a, d]$ e su $[d, b)$ per ogni $d \in (a, b)$, e

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esempio 14.3.4. 1. La funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \textbf{ NON È } \text{integrabile in senso improprio su } (0, +\infty) \quad \text{per alcun } \alpha > 0.$$

Infatti, secondo la Definizione 14.3.2, f dovrebbe essere integrabile in senso improprio su $(0, 1]$ e su $[1, +\infty)$. Tuttavia, come si è visto, f è integrabile su $(0, 1]$ se e solo se $\alpha < 1$, ed è integrabile su $[1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$.

2. la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3}} & \text{se } x \in (0,1], \\ \frac{1}{x^4} & \text{se } x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

   è integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$.

La Definizione 14.3.2 si estende al caso di una funzione definita su un intervallo qualunque (limitato o illimitato) (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, e avente al suo interno un numero finito di singolarità x_1, x_2, x_k, $k \in \mathbb{N}$. In tal caso, f è integrabile in senso improprio se e solo su (a, b) se e solo se f è integrabile (nel senso della Definizione 14.3.2) sugli intervalli aperti (a, x_1), (x_1, x_2), ... (x_{k-1}, x_k), (x_k, b).

14.4 Criteri di integrabilità per funzioni positive

Ci occupiamo del problema di stabilire se una funzione f definita su un certo intervallo I, limitato oppure no, sia integrabile in senso improprio su I, senza calcolare il valore numerico dell'integrale. Si tratta di un problema affine allo studio del carattere di una serie numerica, per la quale bisogna stabilire se converge/diverge/oscilla senza conoscere l'espressione della successione delle somme parziali che, in generale, non è possibile calcolare esplicitamente. Per studiare l'integrabilità in senso improprio, avremo criteri dello stesso tipo di quelli di cui disponiamo per le serie.

Daremo i criteri per integrali impropri su semirette: per esempio, su semirette inferiormente limitate del tipo $[a, +\infty)$; gli enunciati che vedremo si adattano opportunamente anche ad integrali impropri su intervalli semiaperti e quindi anche su intervalli aperti (limitati o illimitati) (a, b), con a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. D'ora in poi, quindi, confiniamo la discussione al caso di funzioni

$$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \text{localmente integrabili su } [a, +\infty).$$

Il nostro primo risultato assicura che, se f è positiva, allora, il suo integrale improprio su $[a, +\infty)$ non è oscillante.

Proposizione 14.4.1. *Supponiamo che $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabile su $[a, +\infty)$, assuma valori positivi. Allora*

$$\exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{c > a} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \in [0, +\infty].$$

Quindi $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ non oscilla, e converge se e solo se $\sup_{c>a} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Questo risultato stabilisce una prima, importante analogia fra la teoria delle serie e quella degli integrali impropri: così come una serie a termini positivi converge, oppure diverge (ricordare il Teorema 7.3.1), anche per l'integrale improprio di una funzione positiva sono possibili solo queste due situazioni. Così come la dimostrazione dell'asserto per le serie si basa sul teorema fondamentale delle successioni monotone (cf. il Teorema 6.6.2), allo stesso modo la dimostrazione del risultato per gli integrali impropri si fonda sul Teorema 8.9.4, che asserisce l'esistenza del limite per funzioni monotone.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione integrale $A : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita

$$A(c) := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } c \in [a, +\infty).$$

La funzione A è monotona non decrescente: infatti, per ogni c_1, $c_2 \in [a, +\infty)$ con $c_1 \leq c_2$ si ha

$$A(c_2) - A(c_1) = \int_a^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

dove abbiamo usato la proprietà additiva dell'integrale, e infine quella del confronto.

Grazie al Teorema 8.9.4 si ha che $\exists \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{c>a} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, da cui la tesi. □

Osservazione 14.4.2. Vale l'analogo di questo risultato per le funzioni $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabili e negative: in tal caso

$$\exists \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{c>a} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \in [-\infty, 0].$$

Come per le serie numeriche a termini positivi, per studiare l'integrabilità delle funzioni positive sono disponibili diversi criteri (che, infatti, hanno un analogo nella teoria delle serie).

Proposizione 14.4.3 (Criterio del confronto)**.** *Siano f, $g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabili su $[a,+\infty)$ con*

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in [a,+\infty).$$

Se g è integrabile in senso improprio sull'intervallo $[a,+\infty)$, allora lo è anche f. Equivalentemente, se f non è integrabile in senso improprio, neppure g lo è.

Dimostrazione. Siano $F : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $G : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ le funzioni integrali associate a f e g:

$$F(c) := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad G(c) := \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poiché $f \le g$ su $[a,+\infty)$, si vede immediatamente che

$$F(c) \le G(c) \qquad \text{per ogni } c \in [a,+\infty).$$

Dal teorema del confronto dei limiti segue quindi che

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) \le \lim_{c\to+\infty} G(c)\,.$$

Ora, g è integrabile in senso improprio sull'intervallo $[a,+\infty)$ se e solo se $\lim_{c\to+\infty} G(c) \in \mathbb{R}$, da cui la tesi. □

Come per le serie numeriche, di ancora maggiore utilità è il criterio basato su un confronto di tipo *asintotico* sulle funzioni. Il prossimo risultato, che diamo senza dimostrazione, è da confrontarsi con il criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

Proposizione 14.4.4 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni positive, localmente integrabili su $[a,+\infty)$ con $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a,+\infty)$. Supponiamo che esista*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Allora,

1. *se $L \in (0,+\infty)$, f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$ se e solo se g è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$;*
2. *se $L = 0$ e g è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$, allora lo è anche f;*
3. *se $L = +\infty$ e g non è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$, allora anche f non lo è.*

Il teorema di Mac Laurin mette in luce che l'analogia fra la teoria delle serie e quella degli integrali impropri ha un carattere molto più profondo della similarità "formale" che è stata sottolineata finora. Infatti, la teoria degli integrali impropri quella delle serie possono essere pensate come *due facce della stessa medaglia.* Per semplicità espositiva, enunciamo il risultato per funzioni definite su $[1,+\infty)$, ma esso in realtà vale per funzioni su semirette positive $[a,+\infty)$.

Teorema 14.4.5 (Teorema di Mac Laurin)**.** *Sia*

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \quad \textit{positiva e decrescente in } [1, +\infty).$$

Allora

$$\textit{l'integrale improprio } \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \textit{ converge se e solo se converge la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).$$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, si ha

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k). \tag{14.4.1}$$

Infatti, per monotonia di f si ha $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ per ogni $x \in [k, k+1]$. Integrando, si ottiene la (14.4.1), tenendo conto del fatto che $\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x = f(k+1)(k+1-k) = f(k+1)$ e analogamente per $f(k)$. Sommando rispetto all'indice k, da 1 a n, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

dove l'uguaglianza segue ancora dalla proprietà di addtività dell'integrale. Osserviamo inoltre che, in virtù della Prop. 14.4.1 e del Teorema 8.8.8 (legami fra limiti di funzioni e limiti di successioni) si ha che

$$\exists \lim_{c \to +\infty} \int_1^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \in [0, +\infty]$$

Supponiamo ora che la $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converga. Allora converge la successione delle ridotte $s_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Dalla (14.4.1) segue che

$$+\infty > \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \lim_{n \to \infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

e quindi concludiamo che l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$ converge.

Supponiamo ora che l'integrale improprio di f su $[1, +\infty)$ converga. Dalla (14.4.1) segue che

$$+\infty > \lim_{n \to \infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\,.$$

È facile vedere che dal fatto che $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(k+1) < +\infty$ segue la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$. Questo conclude la dimostrazione. □

Concludiamo questa sezione introducendo un concetto affine a quello della *convergenza assoluta* per una serie numerica; per comodità, lo presentiamo nel caso di funzioni definite su semirette, ma potremmo dare l'analogo delle prossime definizioni e risultati per funzioni su intervalli semiaperti/intervalli aperti generali.

Definizione 14.4.6. *Sia* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione localmente integrabile su* $[a, +\infty)$*. Diciamo che* f *è* integrabile assolutamente in senso improprio *su* $[a, +\infty)$ *se* $|f|$ *è integrabile in senso improprio su* $[a, +\infty)$*, cioè*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \textit{converge.}$$

Così come per le serie numeriche la convergenza assoluta implica la convergenza, allo stesso modo l'integrabilità assoluta implica l'integrabilità. Si ha infatti il seguente risultato.

Proposizione 14.4.7. *Sia $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile su $[a,+\infty)$. Se f è integrabile assolutamente in senso improprio su $[a,+\infty)$, allora f è integrabile su $[a,+\infty)$ e si ha che*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

L'integrabilità in senso improprio non implica però quella assoluta: per esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{è integrabile in senso improprio su } (0,+\infty), \text{ ma } \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Strategia per lo studio dell'integrabilità in senso improprio. Come per le serie numeriche, per studiare l'integrabilità (in senso improprio) di f conviene

- studiare **innanzitutto** l'integrabilità assoluta, cioè l'integrabilità (in senso improprio) di $|f|$. Infatti, per lo studio di $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ è possibile **applicare i criteri per gli integrali impropri di funz. positive**.
- Se si dimostra che $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, allora si ha che $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
- **MA**, se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = +\infty$, allora non si può concludere nulla su $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$!!!

Per applicare in modo efficace i criteri del confronto e del confronto asintotico è opportuno disporre di una famiglia di

Integrali impropri noti.

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1,\ \forall\beta, \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases} \tag{14.4.2}$$

$$\forall a > 1, \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1,\ \forall\beta, \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

$$\forall a > 1, \quad \int_a^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{converge se } \gamma < 0,\ \forall\alpha, \text{ oppure se } \gamma = 0 \text{ e } \alpha > 1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

L'ultimo integrale improprio si può giustificare ragionando come nell'Esempio 14.5.5. Combinando i caratteri di $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ deduciamo che

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{se } \gamma < 0 & \text{CONnverge} & \forall\,\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}, \\ \text{se } \gamma > 0 & \text{DIverge} & \forall\,\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}, \\ \text{se } \gamma = 0 & & \begin{cases} \text{se } \alpha > 1 & \text{CONverge} & \forall\,\beta \in \mathbb{R}, \\ \text{se } \alpha < 1 & \text{DIverge} & \forall\,\beta \in \mathbb{R}, \\ \text{se } \alpha = 1 & \text{CONverge} & \forall\,\beta > 1. \end{cases} \end{cases} \tag{14.4.3}$$

Osservazione 14.4.8. Per il Teorema di Mac Laurin, la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\exp(\gamma x)}{n^\alpha |\log n|^\beta}$$

converge per lo stesso range di parametri dell'integrale improprio $\int_a^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,\mathrm{d}x$. Vediamo quindi che la teoria degli integrali impropri può essere vista come un complemento alla teoria delle serie.

14.5 *Appunti operativi:* esempi di studio dell'integrabilità

Esempio 14.5.1. Studiare al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{|\log(x)|^\gamma}{x^{5\gamma}}\, dx.$$

Svolgimento: f è positiva e ha una possibile singolarità in $x = 0$. Osservo che

$$f(x) = \frac{1}{x^{5\gamma}|\log(x)|^{-\gamma}}$$

e ricordo il carattere dell'integrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta}$: converge se

$$\alpha < 1, \forall\, \beta \in \mathbb{R} \ \text{ o } \ \alpha = 1, \forall\, \beta > 1.$$

Allora I converge se e solo se

$$5\gamma < 1 \ \text{ o } \ 5\gamma = 1, -\gamma > 1$$

quindi se e solo se $\gamma < \frac{1}{5}$.

Esempio 14.5.2. Studiare al variare di $\beta > 0$ la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}\sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1}\, dx.$$

Svolgimento: la funzione integranda non ha singolarità al finito sulla semiretta $(1, +\infty)$. Osserviamo che, per $x \geq 1$ si ha che $0 < \frac{1}{x^\beta} \leq 1$ e quindi $\sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \geq 0$, quindi la funzione integranda è positiva e possiamo applicare i criteri (in particolare, quello del confronto asintotico). Dobbiamo quindi esaminare il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Si ha

$$\frac{\sqrt{1+x^4}\sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1} \sim \frac{\sqrt{x^4}\frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^3}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-3}}$$

e quindi l'integrale improprio converge se e solo se $\beta - 3 > 1$, cioè $\beta > 4$.

Esempio 14.5.3. Studiare il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \tanh(x)}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Svolgimento: ricordiamo che

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

e quindi

$$\frac{1 - \tanh(x)}{x} = \frac{1}{x}\frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{2}{x(e^{2x} + 1)}\,.$$

Si noti quindi che la funzione ha una singolarità in 0. Essa pertanto è integrabile in senso improprio se e solo se convergono <u>entrambi</u> gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{2}{x(e^{2x} + 1)}\, \mathrm{d}x \ \text{ e } \ \int_1^{+\infty} \frac{2}{x(e^{2x} + 1)}\, \mathrm{d}x\,.$$

Il primo diverge: poiché $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}$, si ha che $\frac{2}{x(e^{2x}+1)} \sim \frac{1}{x}$, che ha integrale improprio divergente su $(0, 1)$. Il secondo integrale converge, per confronto con la funzione $g(x) = \frac{1}{xe^{2x}}$, che ha integrale improprio convergente su $(1, +\infty)$ (cf. la (14.4.3)). Quindi $\int_0^{+\infty} \frac{1-\tanh(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ diverge.

Esempio 14.5.4. Studiare il carattere dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\log(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\log(x)}$ ha una singolarità in $x_0 = 0$ e in $x_1 = 1$. Quindi l'integrale improprio converge se e se solo se convergono gli integrali nei due intervalli semiaperti $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Ora, su $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ la funzione f è negativa; la funzione $-f(x) = |f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}|\log(x)|}$ ha integrale improprio convergence (cf. (14.4.2)). Per studiare l'integrabilità su $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, applico i criteri a $|f| = -f$ e studio il comportamento asintotico di $-f$ per $x \to 1^-$. Si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{x}|\log(x)|} = \frac{1}{\sqrt{x}|\log(1+(x-1))|} \sim \frac{1}{\sqrt{x}|x-1|} \sim \frac{1}{|x-1|} \qquad \text{per } x \to 1^-$$

e $\int_{1/2}^1 \frac{1}{|x-1|}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Esempio 14.5.5. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\,\mathrm{d}x.$$

Svolgimento: è un integrale improprio sull'intervallo <u>aperto</u> $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$ e potrebbe avere in $x = 0$ una singolarità). L'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\,\mathrm{d}xx \text{ converge } \mathbf{E}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\,dx \text{ converge.}$$

La funzione integranda è positiva, possiamo quindi applicare i criteri.

1. Per $x \to 0^+$ si ha $e^{\alpha(x^2+x)} \to 1$. Ricordando $\sinh(y) \sim y$ per $y \to 0$, concludiamo che

$$\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} \sim \frac{x^2}{x^{\alpha/2}}$$

quindi per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2-2}}\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

quindi se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 2 < 1$, cioè $\boxed{\alpha < 6}$.

2. Per $x \to +\infty$, si ha $\sinh(x^2) \sim \frac{1}{2}e^{x^2}$, quindi

$$\begin{aligned}\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} &\sim \frac{1}{2}\frac{1}{\exp(\alpha(x^2+x)-x^2)x^{\alpha/2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2+\alpha x)x^{\alpha/2}}\end{aligned}$$

Per lo studio di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2+\alpha x)x^{\alpha/2}}\,\mathrm{d}x$$

distinguiamo i casi $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$:

(a) $\alpha > 1$: siccome su $(1, +\infty)$ si ha

$$\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x) > \exp((\alpha-1)x^2) > x^\beta \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x)x^{\alpha/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{\alpha/2}} \quad \boxed{\forall\, \beta \in \mathbb{R}}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta x^{\alpha/2}}\, \mathrm{d}x \quad \text{CONVERGE se } \beta + \alpha/2 > 1.$$

Quindi, per il criterio del confronto si ha convergenza per $\boxed{\alpha > 1}$.

(b) $\alpha = 1$: ritrovo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x x^{1/2}}\, \mathrm{d}x$$

che converge perché su $(1, +\infty)$ si ha $e^x > x^\beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\frac{1}{e^x x^{1/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{1/2}} \quad \forall\, x \in (1, +\infty)$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta x^{1/2}}\, \mathrm{d}x \quad \text{CONVERGE se } \beta + 1/2 > 1.$$

Quindi si ha convergenza per $\boxed{\alpha = 1}$.

(c) $\alpha < 1$: si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp(\alpha x)x^{\alpha/2}}\, \mathrm{d}x \quad \text{con } 1 - \alpha > 0.$$

Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)}{\exp(\alpha x)} = +\infty$$

si ha per x sufficientemente grande

$$e^{\alpha x} \leq \exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\exp((1-\alpha)x^2}{\exp(\alpha x)x^{\alpha/2}} &\geq \frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)x^{\alpha/2}} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)}{x^{\alpha/2}} \\ &\geq \frac{x^\beta}{x^{\alpha/2}} \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right) > x^\beta \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Siccome

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\beta}{x^{\alpha/2}}\, \mathrm{d}x \quad \text{diverge per } \alpha/2 - \beta < 1,$$

concludiamo con il criterio del confronto che si ha divergenza per $\boxed{\alpha < 1}$.

Allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\, \mathrm{d}x \text{ converge se e solo se } \alpha \geq 1.$$

Si ha convergenza per $1 \leq \alpha < 6$.

Capitolo 15

Equazioni differenziali

La natura è un libro scritto in caratteri matematici
Galileo Galilei (1564–1642).

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques
Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

L'Analisi Matematica trova una delle sue principali applicazioni nella modellizzazione di fenomeni fisici, ingegneristici, economici, biologici, sociali...... Tale modellizzazione avviene tramite le equazioni differenziali: si tratta di equazioni nelle quali l'incognita è una funzione, anziché un numero. Possono essere ordinarie (nelle quali, cioè, l'incognita è una funzione di una variabile reale), o alle derivate parziali (l'incognita è una funzione di più variabili). Ovviamente, confineremo la discussione alle equazioni differenziali *ordinarie*.

In questo capitolo, dopo aver ricordato alcune proprietà generali delle suddette equazioni, ci concentreremo sulla risoluzione di due tipi di equazioni del prim'ordine, e di una famiglia di equazioni del second'ordine.

15.1 Alcuni fatti generali

Le equazioni differenziali ordinarie sono equazioni in cui:
- l'incognita è una funzione $y : I \to \mathbb{R}$
- si stabilisce un un legame tra la funzione incognita y e le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$

Nel seguito useremo l'acronimo EDO per *Equazione Differenziale Ordinaria*. Vediamo alcuni esempi di EDO.

Esempio 15.1.1.

$$y'(x) = x + \arctan y(x)$$

Osserviamo che
- è una EDO del primo ordine, in quanto la **derivata di ordine massimo** della funzione incognita y, che compare nell'equazione, è y'.

- Si usa anche la scrittura $y' = x + \arctan y$, nella quale non compare esplicitamente la variabile indipendente di y: si desume che y è funzione della variabile x per la presenza del primo termine al secondo membro.

Esempio 15.1.2.

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t$$

- È una EDO del secondo ordine: la **derivata di ordine massimo** della funz. incognita z, che compare nell'equazione, è z''.
- Si scrive anche $z'' + 2z' + z = \sin t$.

Esempio 15.1.3. Nel problema della primitiva introdotto nel Capitolo 13, e che qui richiamiamo: *Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto; data $g : I \to \mathbb{R}$, trovare $y : I \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che*

$$y'(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in I\,. \tag{15.1.1}$$

Chiamiamo primitiva *di g su I ogni funzione y derivabile, verificante la* (15.1.1)
interviene una EDO. Infatti,

- (15.1.1) è una (particolare) eq. diff. ord., di ordine 1, che si risolve tramite integrazione
- ricordiamo il teorema di struttura dell'integrale indefinito:

$$\int f(x)dx = y(x) + c, \text{ con } \begin{array}{ll} y & \text{particolare soluz. di (15.1.1)} \\ c & \text{costante arbitraria in } \mathbb{R} \end{array}$$

  cioè la EDO (15.1.1) ammette *infinite soluzioni*, parametrizzate da una costante $c \in \mathbb{R}$.
- Per determinare una e una sola soluzione a (15.1.1), si deve assegnare un'ulteriore condizione. Accoppiando la (15.1.1) ad una **condizione di Cauchy**, cioè una condizione del tipo

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{con } x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

  (in un dato punto $x_0 \in I$ assegno alla funzione y un valore y_0), si ottiene il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = g(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

  che ammette **una e una sola soluzione**.

La generica EDO del prim'ordine è data, *in forma normale*, da

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{15.1.2}$$

- il suo integrale generale = insieme di tutte le soluzioni dipende da **una costante arbitraria**;
- il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

  sotto opportune condizioni su f ammette un'unica soluzione (definita in un intervallo contenente x_0). L'approfondimento delle suddette condizioni sulla funzione f, di due variabili, sarà affrontato nel corso di Analisi Matematica II, dopo che saranno stati forniti alcuni elementi del calcolo differenziale per funzioni di più variabili.

Per una EDO del secon'ordine, data in forma normale da

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \tag{EDO$_2$}$$

- l'integrale generale = insieme di tutte le soluzioni della EDO (EDO$_2$) dipende in generale da **due costanti arbitrarie**;

- per determinare una e una sola soluzione di (EDO_2) si deve imporre che la soluzione soddisfi ulteriormente due condizioni, infatti il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

sotto opportune condizioni su f, ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente x_0).

In generale, la generica EDO di ordine n (nella quale, quindi, la derivata di ordine massimo della funzione incognita y è la derivata n-esima $y^{(n)}$)

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (\mathrm{EDO}_n)$$

si scrive in forma normale come

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \qquad (\mathrm{EDO}_n)$$

In questo caso, l'integrale generale di (EDO_n) dipenderà da n costanti arbitrarie, e saranno quindi necessarie n condizioni per determinare una e una sola soluzione. Il problema di Cauchy per (EDO_n) (scritta in forma normale) è

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} .$$

Sotto opportune condizioni su f, esso ammette una e una sola soluzione (definita in un intervallo contenente x_0).

Nel seguito, confineremo la discussione a

- due particolari tipi di equazioni del primo ordine (e, cioè, le equazioni a variabili separabili e le equazioni lineari a coefficienti continui)
- le equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

15.2 Equazioni del prim'ordine a variabili separabili

Chiamiamo equazione a variabili separabili una EDO del tipo

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)), \qquad x \in I\,. \qquad (15.2.1)$$

Essa è cioè scritta nella forma normale (15.1.2) in termini di una funzione f, di due variabili, data

$$f : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad f = f(x, y) = g(x)h(y) \qquad \text{per ogni } (x, y) \in I \times J$$

con I, J intervalli in $\mathbb{R}$. Quindi, f è data dal prodotto di una funz. della sola x e di una funz. della sola y. In altri termini, le variabili x e y sono separate nell'espressione di f.

Il primo esempio di equazione a variabili separabili che esamineremo fu proposto dall'economista Thomas Robert Malthus (1766–1834) nel contesto del primo modello noto di *dinamica delle popolazioni.*

Esempio 15.2.1. Il modello di Malthus descrive l'evoluzione temporale di una popolazione isolata in cui gli unici fattori di evoluzione sono la fertilità e la mortalità. Siano:

- $N(t) \geq 0$ il numero di individui presenti al tempo t,
- $\lambda > 0$ il tasso di natalità per unità di tempo,
- $\mu > 0$ il tasso di di mortalità per unità di tempo.

Allora, la variazione di individui della popolazione in un intervallo di tempo di lunghezza $h > 0$ è

$$N(t+h) - N(t) = \lambda N(t)h - \mu N(t)h.$$

Dividendo per h e considerando il limite per $h \to 0^+$ si ottiene l'EDO *a variabili separabili*

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t)\,.$$

Consideriamo altri due esempi.

Esempio 15.2.2. L'EDO

$$y'(x) = x\ln(x), \qquad x \in (0, +\infty)$$

è del tipo (15.2.1), con $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = x\ln(x)$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(y) \equiv 1$.

Più in generale, nel problema della primitiva (cf. Esempio 15.1.3) interviene l'equazione a variabili separabili (15.1.1), che si risolve tramite integrazione.

Esempio 15.2.3. L'EDO

$$y'(x) = x^2 \sin(y(x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

è a variabili separabili, con $f(x, y) = x^2 \sin(y)$.

Derivazione della formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili. D'ora in poi, adotteremo una diversa notazione per la funzione che compare al secondo membro della (15.2.1): in particolare, denoteremo la funzione della variabile y con la lettera f, anziché h. Più precisamente, siano

$$\begin{aligned} &I,\ J \text{ intervalli aperti,} \\ &g : J \to \mathbb{R} \text{ continua su } J, \quad f : I \to \mathbb{R} \text{ continua su } I, \end{aligned}$$

e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{con } x_0 \in J \text{ e } y_0 \in I. \tag{15.2.2}$$

Deriveremo la formula risolutiva per il problema di Cauchy (15.2.2) tramite il **metodo della separazione delle variabili** che, pur essendo puramente formale (e cioè basato sulla *forma* degli oggetti matematici, privati del loro significato sostanziale), può essere rigorosamente giustificato (come vedremo più sotto). Questo metodo è ovviamente basato sul carattere del secondo membro dell'equazione in (15.2.2), che possiamo riscrivere, usando la notazione di Lagrange $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, come

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)g(x)$$

Per "separare" le variabili, dividiamo (formalmente!) entrambi i membri per $f(y)$, e, ancora più formalmente, moltiplichiamo entrambi i membri per $\mathrm{d}x$, ottenendo

$$\frac{1}{f(y)}\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integriamo quindi entrambi i membri, cambiando il nome alle variabili mute di integrazione: la formula

$$\int \frac{1}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int g(s)\,\mathrm{d}s \tag{15.2.3}$$

(nella quale vengono uguagliati due integrali indefiniti, cioè due insiemi di primitive) fornisce in forma implicita l'**integrale generale** (cioè l'insieme delle soluzioni) della EDO $y' = f(y)g(x)$. Precisiamo questo discorso: sia ℓ una primitiva di $\frac{1}{f}$, e G una primitiva di g: allora, la (15.2.3) diventa $\ell(y(x)) = G(x)$ con y la generica soluzione della EDO. Se la funzione ℓ è invertibile, ricaviamo quindi $y(x) = \ell^{-1}(G(x))$, cioè l'insieme delle soluzioni della EDO (il suo integrale generale) ottiene prendendo una qualsiasi primitiva G di g e applicandole ℓ^{-1}: in altri termini, esso è dato da

$$\{\ell^{-1}(G(x)) \, : \text{con } G(x) \in \int g(s)\,\mathrm{d}s\}$$

Per trovare l'unica soluzione del problema di Cauchy (15.2.2) (cioè per selezionare, nell'integrale generale, l'unica soluzione y che soddisfa la condizione $y(x_0) = y_0$), consideriamo l'uguaglianza fra gli integrali definiti

$$\boxed{\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s} \tag{15.2.4}$$

che fornisce, in modo implicito, la soluzione y del problema di Cauchy (15.2.2). Infatti, considerata una primitiva ℓ di $\frac{1}{f}$, da (15.2.4) si ottiene, per il secondo teorema fondamentale del calcolo,

$$\ell(y(x)) - \ell(y_0) = \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\,.$$

Quindi, se ℓ è invertibile, si ottiene la formula di esplicita

$$\boxed{y(x) = \ell^{-1}\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right)\,.} \tag{15.2.5}$$

Verifichiamo ora che la formula (15.2.5) (ottenuta in modo tutt'altro che rigoroso) fornisce la corretta soluzione del problema di Cauchy. Infatti, da (15.2.5) si ottiene

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ell^{-1}\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right)\right) \\
&\overset{(1)}{=} (\ell^{-1})'\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{\ell'\left(\ell^{-1}\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right)\right)} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right) \\
&\overset{(3)}{=} f\left(\ell^{-1}\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right)\right) \times g(x) \\
&\overset{(4)}{=} f(y(x)) \times g(x)\,,
\end{aligned}$$

dove (1) segue dalla formula di derivazione della funzione composta, (2) dal fatto che $(\ell^{-1})'(x) = \frac{1}{\ell'(\ell^{-1}(x))}$, (3) dal fatto che $\frac{1}{\ell'} = f$ (visto che ℓ è una primitiva di $\frac{1}{f}$), e dal Primo Teorema Fondamentale del Calcolo, e infine (4) dalla (15.2.5). Abbiamo così dimostrato che la funzione definita dalla (15.2.5) verifica l'EDO. Essa verifica anche la condizione di Cauchy, in quanto

$$y(x_0) = \ell^{-1}\left(\ell(y_0) + \int_{x_0}^{x_0} g(s)\ \mathrm{d}s\right) = \ell^{-1}(\ell(y_0)) = y_0,$$

visto che $\int_{x_0}^{x_0} g(s)\ \mathrm{d}s = 0$.

Osserviamo, infine, che, nel caso in cui y_0 sia uno zero della funzione f, allora il problema di Cauchy (15.2.2) ha la soluzione *stazionaria* $y(x) \equiv y_0$ per ogni $x \in I$.

15.3 Equazioni lineari del prim'ordine a coefficienti continui

Si tratta di EDO di ordine 1 della forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{per ogni } x \in I \tag{15.3.1}$$

con

$$I \text{ intervallo, } a, b : I \to \mathbb{R} \text{ funzioni continue su } I$$

Si osservi che l'EDO del modello di Malthus (cf. l'Esempio 15.2.1) ha anche la struttura (15.3.1) (con $b(x) \equiv 0$ e $a(x) \equiv (\mu - \lambda)$). Anche l'EDO del prim'ordine (15.1.1), che interviene nel problema della primitiva, è sia a variabili separabili, sia lineare del prim'ordine a coefficienti continui (con $a(x) \equiv 0$ e $b(x) = g(x)$).

Formula risolutiva per il problema di Cauchy. Consideriamo ora il problema di Cauchy associato a (15.3.1):

$$\begin{aligned} & y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall\, x \in I, \\ & y(x_0) = y_0, \end{aligned} \tag{15.3.2}$$

Per derivarne la formula risolutiva, introduciamo una (qualsiasi) primitiva A di a: quindi $A : I \to \mathbb{R}$ verifica $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, e moltiplichiamo entrambi i membri della EDO per la funzione $x \in I \mapsto e^{A(x)}$, ottenendo

$$e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) = b(x)e^{A(x)},$$

che si riscrive come

$$e^{A(x)}y'(x) + A'(x)e^{A(x)}y(x) = b(x)e^{A(x)}\,.$$

Ora, osservando che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{A(x)}) = A'(x)e^{A(x)}$, riscriviamo l'equazione soprastante come

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{A(x)}y(x)\right) = b(x)e^{A(x)}\,. \tag{15.3.3}$$

Da questa uguaglianza deriviamo l'uguaglianza fra i rispettivi integrali indefiniti

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{A(x)}y(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ora, una primitiva di $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^A y)$ è proprio la funzione $e^A y$. Otteniamo quindi la formula

$$e^{A(x)}y(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x,$$

da cui

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x\right), \tag{15.3.4}$$

che fornisce l'integrale generale dell'equazione (15.3.1). La (15.3.4) è infatti da interpretarsi in questo modo: la generica soluzione di (15.3.1) si ottiene moltiplicando per la funzione e^A la generica primitiva di be^A.

Ricaviamo ora la formula risolutiva per il problema di Cauchy (15.3.2) imponendo la condizione di Cauchy $y(x_0) = y_0$. Per fare ciò, è sufficiente integrare (15.3.3) fra x_0 e $x \in I$, ricordando che $y(x_0) = y_0$. Si ottiene quindi

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{A(s)}y(s)\right)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}\,\mathrm{d}s,$$

da cui si ricava, per il secondo teorema fondamentale del calcolo,

$$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{A(s)}\,\mathrm{d}s \qquad \forall\, x \in I,$$

e quindi, isolando la funzione y al membro di sinistra, si ottiene

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(e^{A(x_0)} y(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(s) e^{A(s)} \, \mathrm{d}s \right) \qquad \forall\, x \in I. \tag{15.3.5}$$

Si noti che la (15.3.5) non dipende dalla scelta della primitiva A di a: infatti, se alla funzione $A = A(x)$ sostituiamo la funzioen $x \mapsto A(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ (ricordiamo che tutte le primitive di a, sull'*intervallo* I, differiscono per una costante), il secondo membro di (15.3.5) non cambia. Quindi, in (15.3.5), A è una *qualsiasi* primitiva di a. Operiamo ora una scelta specifica: consideriamo la (l'unica!) primitiva A di a tale che

$$A(x_0) = 0, \quad \text{cioè} \quad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s) \, \mathrm{d}s \, .$$

Con questa scelta di A, la (15.3.5) si semplifica, diventando

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)} b(s) \, \mathrm{d}s \right] \ \text{ con } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s) \, \mathrm{d}s \, .} \tag{15.3.6}$$

15.4 Equazioni del second'ordine lineari a coefficienti costanti

Sono EDO della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \tag{$\mathrm{EQ_{comp}}$}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua detta *termine forzante*. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \ \forall\, x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{15.4.1}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

I prossimi esempi mostrano come equazioni di questo tipo intervengano, per esempio, in meccanica e in teoria dei circuiti.

Esempio 15.4.1. Se un punto materiale P di massa m si muove soggetto ad una forza F, allora la seconda legge di Newton afferma che la posizione $y = y(t)$ di P al tempo t soddisfa la seguente relazione

$$m\, y''(t) = F(t, y(t), y'(t)) \, .$$

In questo contesto, y' è la velocità di P al tempo t, e y'' la sua accelerazione. Se la forza F è dovuta alla **gravità**, cioè $F(t, y, y') = -mg$, allora si ottiene l'EDO

$$y''(t) = -g, \tag{15.4.2}$$

dove g è l'accelerazione di gravità. La (15.4.2) è una EDO lineare di ordine 2 a coefficienti costanti. La soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy associato a questa EDO è

$$y(t) = -\frac{g}{2}\, t^2 + y'(0)\, t + y(0)$$

In questo caso la funzione y descrive il moto di caduta libera.

Esempio 15.4.2. In un circuito con resistenza R, induttanza L, e con un condensatore di capacità C, la carica q dell'armatura a potenziale maggiore, come funzione del tempo $t \mapsto q(t)$, soddisfa l'EDO lineare di ordine 2 a coeff. cost.

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C} q(t) = 0 \, .$$

Risolvendola, si può studiare il modo in cui varia l'intensità di corrente che circola a spese della scarica del condensatore.

Proprietà di linearità. Siano y_1 e y_2 due soluzioni di ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$), cioè

$$\begin{aligned} y_1''(x) + a y_1'(x) + b y_1(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I, \\ y_2''(x) + a y_2'(x) + b y_2(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I. \end{aligned}$$

Sia $v : I \to \mathbb{R}$ definita da $v(x) := y_1(x) - y_2(x)$. Si vede facilmente che v soddisfa

$$v''(x) + a v'(x) + b v(x) = 0 \quad \forall\, x \in I,$$

cioè v risolve l'equazione omogenea associata a ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$):

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0 \quad \forall\, x \in I\,. \tag{$\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}$}$$

Per confronto, ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$) viene anche detta *equazione completa.*

Abbiamo appena dimostrato che la differenza di due (qualsiasi) soluzioni dell'equazione completa ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$) è soluzione dell'equazione omogenea ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}$). Altrimenti detto, una qualsiasi soluzione di ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$) si ottiene sommando, ad una generica soluzione v dell'equazione omogenea ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}$), un'altra soluzione di ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$). Questo è sintetizzato dal seguente teorema di struttura per l'integrale generale dell'equazione completa:

$$\begin{aligned} &\text{integrale generale di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}) \\ &= \text{integrale generale di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}) + \text{soluz. particolare di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}), \end{aligned}$$

cioè, la generica soluzione y di ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$) è data da

$$y(x) = v(x) + y_p(x) \quad \forall\, x \in I, \ \text{con} \ \begin{array}{ll} v & \text{generica sol. di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}), \\ y_p & \text{sol. particolare di } (\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}). \end{array}$$

Osservazione importante: ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{comp}}$) ed ($\mathrm{EQ}_{\mathrm{omog}}$) sono equazioni del second'ordine: il loro integrale generale sarà parametrizzato da **due costanti arbitrarie**.

Si ottiene quindi la seguente **Strategia per risolvere** il problema di Cauchy (15.4.1):

1. Determinare l'integrale generale (cioè **tutte le soluzioni**) dell'equazione omogenea associata.
2. Determinare **una soluzione particolare** y_p dell'equazione completa; in questo modo si otterrà l'integrale generale dell'equazione completa, dipendente da **due costanti arbitrarie**.
3. Imponendo le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

si determinano anche le costanti corrispondenti all'**unica soluzione** del problema di Cauchy (15.4.1).

Risoluzione dell'equazione omogenea:

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0\,.$$

Si risolve non tramite integrazione, ma con un processo risolutivo *algebrico*, considerando l'associata equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{15.4.3}$$

Distinguiamo tre casi:

[Caso 1:] (15.4.3) ammette due soluzioni reali e distinte: λ_1 e λ_2 (caso $a^2 - 4b > 0$). Allora, l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$ è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

[Caso 2:] (15.4.3) ammette una sola soluzione reale λ di molteplicità due λ (caso $a^2 - 4b = 0$). Allora, l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$ è

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

[Caso 3:] (15.4.3)ammette due soluzioni complesse coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$). Allora, l'integrale generale di $y'' + ay' + by = 0$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ arbitrarie}}$$

Risoluzione dell'equazione completa:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I,$$

Ci sono due metodi per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa:
1. il metodo della variazione delle costanti
2. il metodo di somiglianza (o di similarità).

Esamineremo il problema nel caso in cui il termine forzante f è del tipo

$$\begin{cases} f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ o} \\ f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases}$$
$$\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ R_k \text{ polinomio di grado } k$$

Per costruire una soluzione particolare, consideriamo il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

Vi sono due alternative:

(1) $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$: allora esiste una soluzione particolare y_p

$$\boxed{y_p(x) = e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],}$$

con Q_k e S_k polinomi di grado k. Determiniamo Q_k e S_k imponendo che y_p sia effettivamente una soluzione dell'equazione completa.

(2) $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ è soluzione dell'equazione

$$z^2 + az + b = 0$$

associata all'eq. omogenea $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$, con <u>molteplicità h</u>. Allora esiste una soluzione particolare y_p

$$\boxed{y_p(x) = x^h e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]}$$

con Q_k e S_k polinomi di grado k, che si determinano imponendo che y_p sia effettivamente una soluzione dell'equazione completa.