

Analisi Matematica I – fac-simile

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\operatorname{Re}(z + 7e^{i\pi/2}) + \operatorname{Im}(z\bar{z} - 2)}{||z| - 2|} \in \mathbb{R}^+$$

[Punteggio: X punti]

Esercizio 2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}e^2\right)^n \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$$

[Punteggio: X punti]

Esercizio 3. Determinare il dominio, calcolare i limiti alla frontiera del dominio, e gli eventuali asintoti (verticali, orizzontali, ed obliqui) di

$$f(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\arctan^2(x)} - \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} |\arctan(x)| \right)$$

[Punteggio: X punti]

Esercizio 4. Calcolare la primitiva $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di

$$f(x) = \frac{e^x}{(2 + e^x)(1 + 2e^{-x})}$$

tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \log(2)$. [Punteggio: X punti]

Esercizio 5. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}.$$

[Punteggio: X punti]

Questa è solo una possibile scelta di esercizi; altre possibili tipologie di esercizio sono: calcolo di sup e inf di insiemi; limiti di successioni e di funzioni; classificazione di punti di discontinuità/non derivabilità; studio del carattere di un integrale improprio; equazioni differenziali del prim'ordine - lineari a coefficienti continui o a variabili separabili. In altri termini, tutti le tipologie di esercizio che si trovano nei temi d'esame 'tradizionali'.

Esercizio 6. Questo esercizio ha un carattere pratico/teorico: si tratterà di una **classificazione di punti di continuità/non derivabilità** (se questa tipologia di esercizio non è presente fra gli Es. 1-5), oppure un esercizio nel quale si richiede di **applicare un teorema, giustificandone**

l'applicazione (quindi, le ipotesi del teorema andranno verificate). Per esempio:
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arctan(\exp(x^5 + \sin(x^3) + \log(1 + x^4))) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

È vero che l'insieme $f([0, 1])$ è un intervallo? Giustificare la risposta.

[Punteggio: X punti]

Il punteggio totale sarà di 30 punti, suddivisi fra i 6 esercizi; il compito sarà considerato sufficiente, e vi sarà quindi ammissione alla prova orale, nel caso di un punteggio maggiore o uguale a 16.