Prime proprietà delle funzioni

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

♢ Prime definizioni

Definizione di funzione:
è una terna (A, B, f), con:

- A, B insiemi (non vuoti)
- f: legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno e un solo elemento di $f(x) \in B$.

Notazioni:

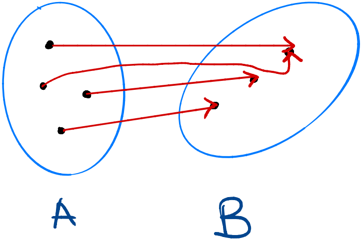
- A si dice dominio di f, anche denotato con $\mathrm{dom}(f), D_f$
- B si dice codominio di f,
- scriviamo $f : A \to B$, e

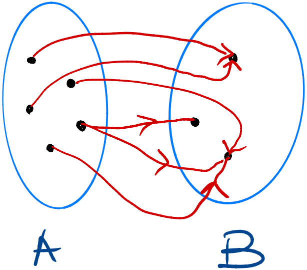
$$x \in \mathrm{dom}(f) \mapsto f(x)$$

per la legge che alla *variabile indipendente* x associa la sua *immagine* $f(x)$.

- Riscriviamo la condizione nella definizione di funz.

$$\forall x \in A, \quad \exists! y \in B \; : \; y = f(x).$$





La def. permette che a diversi x corrisponda lo stesso y.

- **Codominio e insieme immagine:** Data $f : A \to B$,
  - il codominio B è oggetto poco significativo: solo un "contenitore" dei valori assunti da f.

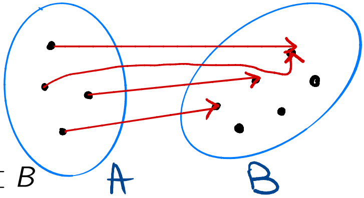
    Non univocamente determinato:

    $$\text{se } C \text{ è insieme } C \text{ tale che } B \subset C$$
    $$\text{allora } C \text{ è un codominio per } f$$

  - Oggetto significativo: **insieme immagine**

    $$\boxed{\mathrm{im}(f) = \{y \in B \;:\; \exists x \in A, \quad y = f(x)\} = f(A)}$$

    è l'insieme dei **valori assunti** da f.



In generale, $\mathrm{im}(f) \subset B$

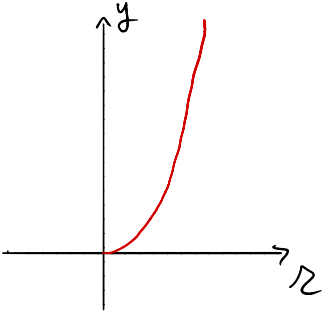
- **Grafico di una funzione:** Data $f : A \to B$, il grafico di f è

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B \,:\, x \in A,\ y = f(x)\}\ .$$

$\mathrm{graf}(f) \subseteq A \times B$ è un insieme di coppie ordinate.

Esempio 1:

La funzione f che a ogni numero reale non negativo r associa l'area del cerchio di raggio r.



Esempio 2:

la somma di due numeri reali è una funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$$

D'ora in poi, consideriamo solo funzioni

$$f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

- **funzioni <u>reali</u> ($\mathrm{codom}(f) = \mathbb{R}$),**
- **di <u>variabile reale</u> ($\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$).**

- Allora

$$\mathrm{graf} f = \{(x, y) \in \mathrm{dom}(f) \times \mathbb{R} \,:\, x \in \mathrm{dom}(f),\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ e}$$

$$\forall\, x \in \mathrm{dom}(f), \quad \exists!\, y \in \mathbb{R} \,:\, (x, y) \in \mathrm{graf}(f)$$

- **Esempio:** dati

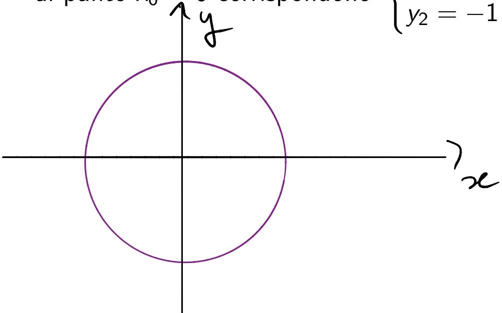
$$A = \{x \in \mathbb{R} \; : \; -1 \leq x \leq 1\},$$
$$B = \mathbb{R}$$

consideriamo la circonferenza $\subseteq A \times B$

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -1 \leq x \leq 1, \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

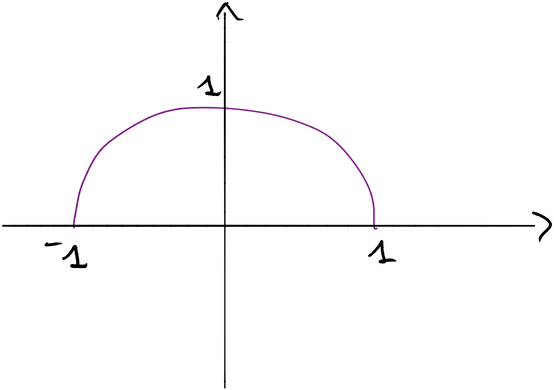
¿¿ γ è il grafico di una funzione da A in B?? **NO!!**

al punto $x_0 = 0$ corrispondono $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$ con $\begin{cases} (x_0, y_1) \in \gamma \\ (x_0, y_2) \in \gamma \end{cases}$



Invece

$$\gamma \cap \{(x,y)\,:\, x \in A \;\; y \geq 0\}$$ **è un grafico.**



- Una funzione reale di variabile reale è ben definita quando sono dati:
  - il dominio di f
  - la legge che definisce f
- Quindi, $f_1 : \mathrm{dom}(f_1) \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathrm{dom}(f_2) \to \mathbb{R}$ **coincidono** se e solo se

$$\mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2) \text{ e}$$
$$f_1(x) = f_2(x) \quad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2).$$

Esempio:

Dominio naturale di definizione

Quando una funzione reale di variabile reale è data senza che venga specificato il dominio, si sottintende che

il dominio è l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x)$ ha senso ed è un numero reale.

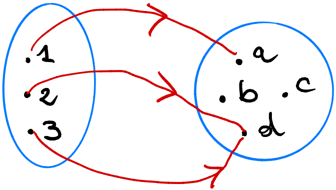
Esempi:

$$f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 1}\,.$$

$$f_2(x) := \sqrt{4 - x^2}\,.$$

$\diamondsuit$ **Funzioni suriettive, iniettive, biiettive**

Sia $f : A \to B$. Dato $y \in B$, un elemento $x \in A$ si chiama <u>controimmagine</u> di y tramite f se $f(x) = y$.



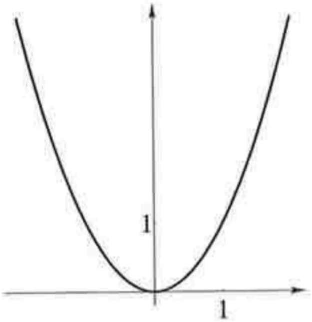
- Denotiamo con $f^{-1}(\{y\})$ l'insieme (eventualmente vuoto) delle controimmagini di y tramite f.

- Si ha

$$y \in \mathrm{im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

• **Interpretazione grafica** per $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$: dato $\bar{y} \in \mathbb{R}$, individuo graficamente l'insieme controimmagine $f^{-1}(\{\bar{y}\})$ considerando la retta $r_{\bar{y}}$ di equaz. $y = \bar{y}$:

- se $y = \bar{y}$ non interseca $\mathrm{graf}(f)$ in alcun punto, allora $f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \emptyset$;
- viceversa, per ogni punto $(x, \bar{y}) \in \mathrm{graf}(f) \cap r_{\bar{y}}$, si ha $x \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$.



Suriettività

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è suriettiva se

$$\mathrm{im}(f) = B$$

o, equivalentemente, se

$$\forall\, y \in B \;\exists\, x \in A : \quad f(x) = y.$$

• N.B. nel caso di una **funzione reale di variabile reale**
$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$,
considereremo sempre come codominio l'insieme $\mathbb{R}$. Quindi

$$f \text{ è suriettiva se } \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}.$$

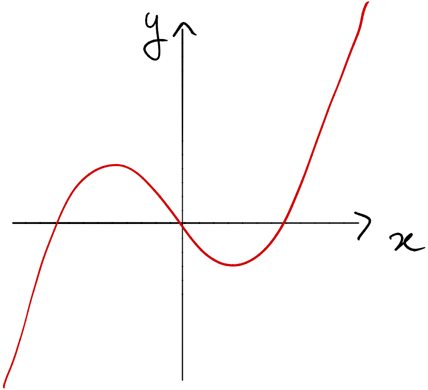
- **Interpretazione grafica della suriettività:** Una $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ è suriettiva se e solo se

$$\forall\, \bar{y} \in \mathbb{R},\ \bar{y} \in \mathrm{im}(f) \iff \forall\, \bar{y} \in \mathbb{R},\ f^{-1}(\{\bar{y}\}) \neq \emptyset$$

e quindi se e solo se

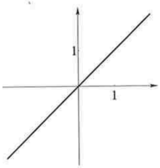
per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$

interseca $\mathrm{graf}(f)$ in **almeno** un punto.

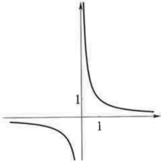


Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ è **suriettiva**:

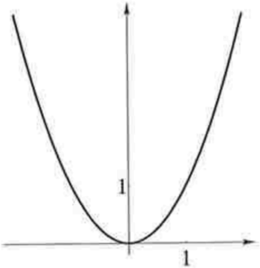


- la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **non è suriettiva**



Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, perché



Iniettività

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è <u>iniettiva</u> se

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)].$$

- N.B.: non confondere l'ordine in cui è scritta la formula: infatti la proprietà

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2)]$$

è verificata da ogni funzione.

L'iniettività

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)]$$

implica che

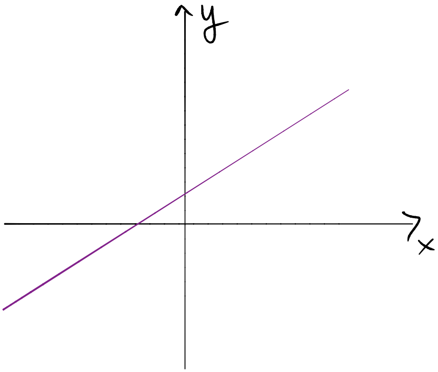
a ogni elemento $y \in B$ ha al più una controimmagine, cioè

$$\begin{cases} y \in B \setminus \mathrm{im}(f) & \Rightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \\ y \in \mathrm{im}(f) & \Rightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \text{ è singoletto} \end{cases}$$

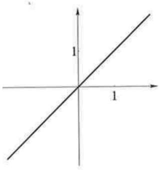
Interpretazione grafica della iniettività: Una $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se

per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$

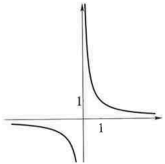
interseca $\mathrm{graf}(f)$ in **al massimo** un punto.



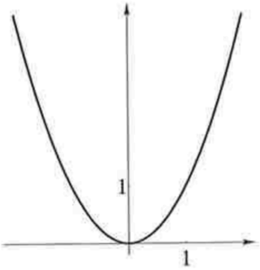
- **Esempi:**
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ **è iniettiva**:



  2. la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **è iniettiva**



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è iniettiva



Invertibilità

Sia $f : A \to \mathrm{im}(f)$ una funzione <u>iniettiva</u>. Quindi

$$\begin{cases} 1.\ \forall\, y \in \mathrm{im}(f), \quad \exists\, x \in A \,:\, y = f(x), \\ 2.\ \text{l'elemento } x \in A \text{ al punto 1. è unico.} \end{cases}$$

cioè

$$\forall\, y \in \mathrm{im}(f),\ \exists! x \in A \,:\, y = f(x).$$

Questo definisce la funzione da $\mathrm{im}(f)$ in A

ad ogni $y \in \mathrm{im}(f)$ si associa uno e un solo elemento $x \in A$

cioè quell'unico elemento x tale che $f(x) = y$.

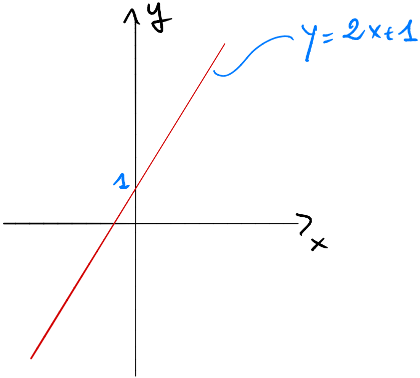
Chiamiamo questa funzione la *funzione inversa* di f:

$$f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to A \text{ che associa}$$

a ogni $y \in B$ l'unico elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$

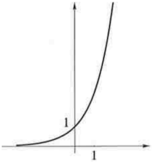
Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2x + 1$ è invertibile, infatti



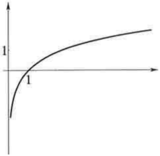
Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = e^x$ è iniettiva, con $\mathrm{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0\} = (0, +\infty)$.



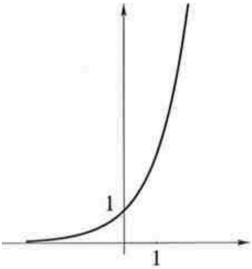
Allora f è invertibile, con $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

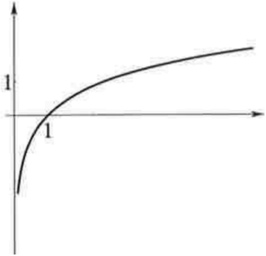
$$f^{-1}(y) = \log y \qquad \forall\, y \in (0, +\infty).$$



Data $f : D_f \to \mathbb{R}$, **invertibile**,

$$\mathrm{graf}(f^{-1}) \text{ è il simmetrico di } \mathrm{graf}(f) \text{ risp. a } y = x$$



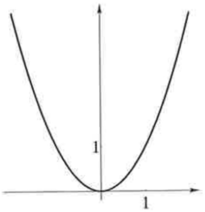


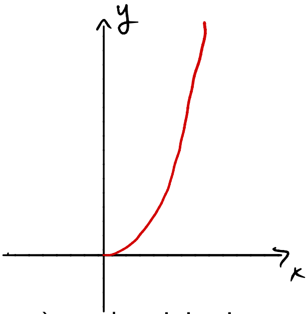
Restrizione

Dati $f : A \to B$ ed $E \subseteq A$, si dice restrizione di f ad E

$$f|_E : E \to B \text{ data da } f|_E(x) = f(x) \quad \forall x \in E.$$

- **Esempio:** Sia $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2$





Una funzione che non è iniettiva si può rendere iniettiva semplicemente considerandone opportune restrizioni.

Composizione di funzioni

Siano

$$f : A \to B, \quad g : B' \to C,$$
$$\text{con } f(A) \subseteq B'$$

si dice composizione di f e g la funzione

$$g \circ f : A \to C \text{ data da } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \; \forall \, x \in A.$$

Esempio

Date

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = |x| \qquad \text{per } x \neq 0$$

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \log(x) \qquad \text{per } x > 0$$

Proprietà della composizione di funzioni

- **è associativa**

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- **NON è commutativa**

$$f \circ g \neq g \circ f$$

- inversa della composizione

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Funzioni inverse e composizione

Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione <u>iniettiva</u> con

$$\text{funzione inversa } f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$$

Valgono le relazioni

$$\forall\, y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f) \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,,$$
$$\forall\, x \in \mathrm{dom}(f) \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x\,.$$

Per es., con $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln(x)$ si ha

Operazioni su funzioni

Un modo per generare nuove funzioni a partire da alcune date è utilizzare le operazioni introdotte per i numeri reali.

Date $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$,

(a) si dice **funzione somma** di f e g la funzione

$$f + g : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

(b) si dice **funzione prodotto** di f e g la funzione

$$fg : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

(c) Supponiamo che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$: allora si definisce la **funzione quoziente** di f e g

$$\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

(e) Supponiamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$: la **funzione potenza** di f e g è

$$f^g : A \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x)^{g(x)}.$$