Proprietà globali delle funzioni continue

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Introduzione

Problema: stabilire legami fra
- continuità (proprietà di tipo *locale*) e
- proprietà *globali* delle funzioni

Daremo risultati teorici che combinano

1. la **continuità** di f con
2. ipotesi **"topologiche"** su $\mathrm{dom}(f)$: richiederemo che
$$\mathrm{dom}(f) = I,$$
I intervallo generico (anche semiretta aperta o chiusa
anche intervallo aperto
anche intervallo semiaperto
anche intervallo chiuso)
3. in casi specifici, richiederemo
$$I = [a, b] \text{ intervallo } \underline{\text{chiuso e limitato}}.$$

Definizione

Data $f : D_f \to \mathbb{R}$, chiamiamo

- $x_m \in D_f$ *punto di minimo assoluto* per f se
$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,,$$
e il corrispondente valore $f(x_m)$ viene detto *valore di minimo assoluto* per f;
- $x_M \in D_f$ *punto di massimo assoluto* per f se
$$f(x_M) \geq f(x) \quad \forall\, x \in D_f\,,$$
e il corrispondente valore $f(x_M)$ viene detto *valore di massimo assoluto* per f.

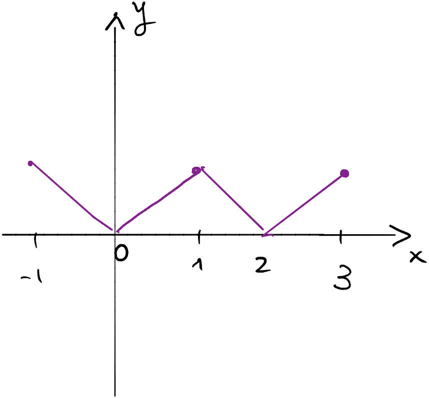
Di fatto,

$$f(x_m) = \min\{f(x) \, : x \in D_f\} = \min \mathrm{im}(f)\,,$$
$$f(x_M) = \max\{f(x) \, : x \in D_f\} = \max \mathrm{im}(f)\,;$$

quindi chiameremo <u>anche</u> $m := f(x_m)$ e $M := f(x_M)$ minimo & massimo di f

Attenzione!!!!! non confondere

- <u>*punto*</u> *di massimo* per f
- <u>*valore*</u> *di massimo* di f (si dice anche *massimo di f*)



$W : [-1,3] \to \mathbb{R}$

$$W(x) = \begin{cases} |x| & x \in [-1,1] \\ |x-2| & x \in [1,3] \end{cases}$$

Introduciamo anche

- l'*estremo superiore di* f, cioè l'estremo superiore dell'insieme immagine di f, ossia

$$\sup f = \sup \mathrm{im}(f) = \sup\{f(x) : \quad x \in D_f\};$$

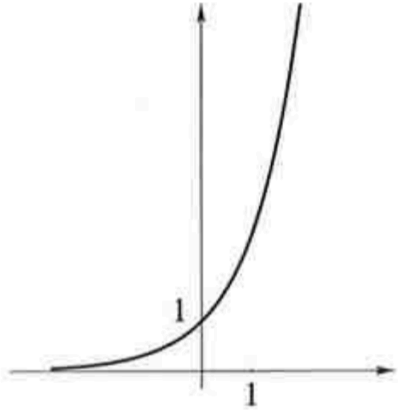
- l'*estremo inferiore di* f, cioè l'estremo inferiore dell'insieme immagine di f, ossia

$$\inf f = \inf \mathrm{im}(f) = \inf\{f(x) : \quad x \in D_f\};$$

Ci chiediamo se una $f : D_f \to \mathbb{R}$ ammette sempre (in D_f) almeno un punto di minimo e almeno un punto di massimo assoluto.....
NO!!

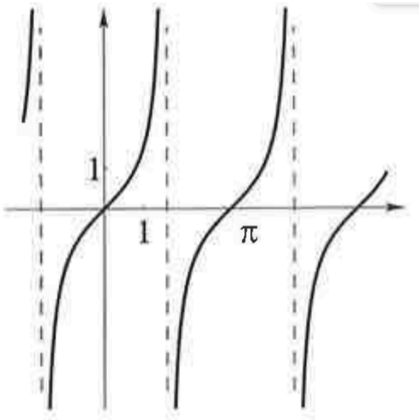
Esempio 1

$$f(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$



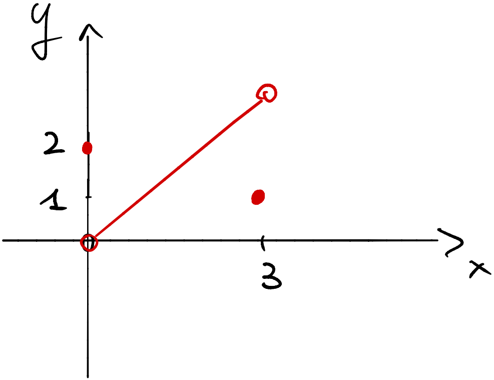
Esempio 2

$$f(x) = \tan(x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Esempio 3

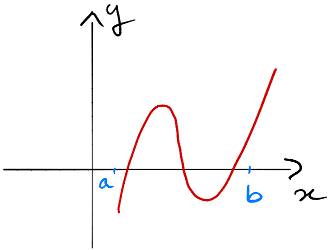
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0\,, \\ x & x \in (0,3)\,, \\ 1 & x = 3\,. \end{cases}$$



Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua** su $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.
Allora f ammette almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo in $[a, b]$, cioè

$$\exists\, x_m, x_M \in [a, b] \;:\; \forall\, x \in [a, b] \;\; f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$



Dimostrazione: dimostreremo che

$$\exists\, x_m \in [a, b] \text{ punto di } \underline{\text{minimo}} \text{ per } f.$$

- **Passo** 1**:** Costruiamo una *successione minimizzante* per f su $[a, b]$, cioè tale che
$$f(x_n) \to \inf_{[a,b]} f.$$

- **Passo 2:** $\{x_n\} \subset [a, b]$ è <u>limitata</u>, quindi per il teorema di Bolzano Weiestrass

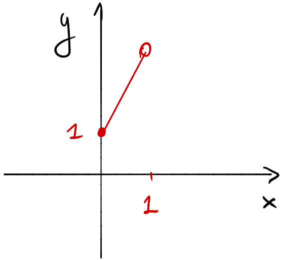
  $$\exists \text{ una sottosuccessione } \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}, \ \exists\, x \in \mathbb{R} : \quad \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x.$$

  Notare che
  $$a \leq x_{n_k} \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq x \leq b.$$

- **Passo 3:** Usiamo che f è continua:

Tutte le ipotesi del teorema sono fondamentali: se una di esse non è soddisfatta, la tesi è falsa.

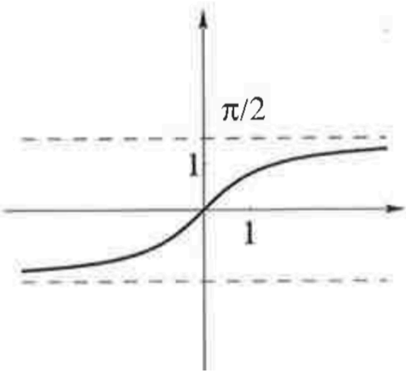
1. Siano $I = [0, 1[, \quad f(x) = 2x + 1$. f è continua su I, I è limitato **ma non è chiuso**.



Notare che

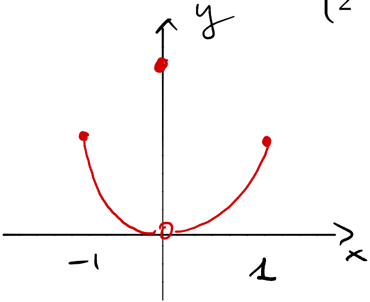
- f ammette invece minimo su I: è $x = 0$, $\min_I f = 1$,
- f non ammette massimo: si ha $\sup_I f = 3$, che non viene assunto in alcun punto di I.

2. Siano $I = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \arctan(x)$.



3. Siano $I = [-1, 1]$ e $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



f **non** ha minimo, e $\inf f = 0$. $\max f = 2$ e 0 è l'unico *punto di massimo*.

Notare che $I = [-1, 1]$ è chiuso e limitato, ma f **non è continua.**

Corollario al teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora f è limitata.

Risultati sulla risolubilità di equazioni

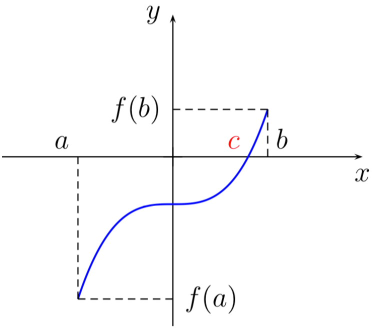
Teorema di Bolzano o "degli zeri"

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ tale che

$$f(a)f(b) < 0.$$

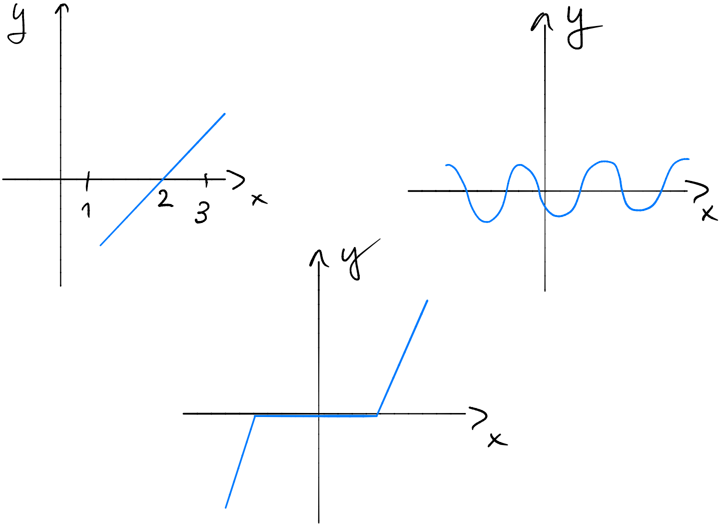
Allora esiste almeno un punto

$$c \in]a, b[\text{ tale che } f(c) = 0.$$



Osservazione:

Il teorema assicura che f ammette almeno uno zero c, non ci dice nulla sull'unicità di c. In generale, c non è unico!



Una conseguenza del teorema degli zeri

Tutte le ipotesi del Teorema degli zeri sono necessarie!

Il teorema dei valori intermedi

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora,

$$f \text{ assume tutti i valori compresi tra } \min_{x \in [a,b]} f(x) \text{ e } \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Corollario

Sia I intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I. Allora $\mathrm{im}(f)$ è un intervallo.

Funzioni continue invertibili

Sia

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ continua in } A \text{ e iniettiva.}$$

Allora f è invertibile, con funzione inversa

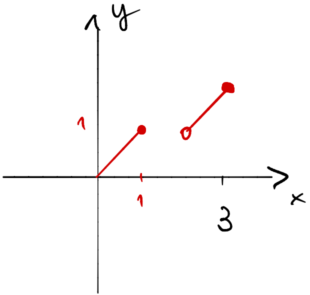
$$f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}.$$

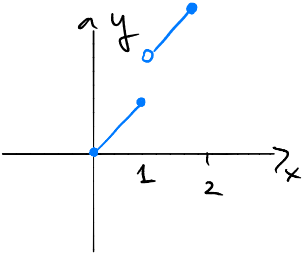
- f^{-1} è continua in $\mathrm{im}(f)$?

Esempio

Sia $A = [0,1] \cup (2,3]$ (unione di due intervalli) e sia $f : A \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$





Risultato I: caratterizzazione delle funzioni continue invertibili

Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I. Allora

$$f \text{ è invertibile} \iff f \text{ è strettamente monotona.}$$

• Se f è strettamente monotona, allora la funzione inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ è ancora monotona, con una monotonia dello stesso tipo di f. $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ è anche continua?

Risultato II: continuità della funzione inversa

Siano

- I intervallo
- $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I
- $f : I \to \mathbb{R}$ invertibile

Allora $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$ è continua.