Limiti e continuità – (II)

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi I

Verso un'unica definizione di limite

Usando la retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$, TUTTE le definizioni di limite viste possono essere unificate in un'unica definizione. Occorre dare la

1. nozione di intorno di $+\infty$ e $-\infty$
2. punto di accumulazione per un insieme non limitato superiormente o inferiormente.....

Perché è utile fare questo?

Gli ingredienti

Definizioni

- sia $x_0 = +\infty$: chiamiamo intorno aperto di x_0 una semiretta aperta $(a, +\infty)$
  intorno chiuso: $[a, +\infty)$
- sia $x_0 = -\infty$: chiamiamo intorno apertodi x_0 una semiretta aperta $(-\infty, a)$
  intorno chiuso: $(-\infty, a]$
- dato $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che $+\infty$ è un punto di accumulazione per A se
$$A \cap (a, +\infty) \neq \emptyset \qquad \forall\, a > 0$$
- dato $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che $-\infty$ è un punto di accumulazione per A se
$$A \cap (-\infty, a) \neq \emptyset \qquad \forall\, a < 0$$

Un'unica definizione

Definizione di limite unificata

Siano $\boxed{x_0 \in \overline{\mathbb{R}}}$, $\boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}$.

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per D_f.

Diciamo che $f(x)$ tende a L per x tendente a x_0, e scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, se

$$\text{per ogni intorno } J \text{ di } L \text{ esiste un intorno } I \text{ di } x_0 \text{ tale che}$$
$$\forall\, x \in (I \cap D_f) \setminus \{x_0\} \quad \text{si ha} \quad f(x) \in J.$$

Questa definizione generalizza le def. date, per es.

Limiti destro e sinistro: motivazioni

Definizione (limite destro)

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si supponga che

$$x_0 \text{ sia di accumulazione per l'insieme } D_f \cap (x_0, +\infty).$$

Se esiste il limite per $x \to x_0$ della <u>restrizione</u> di f a $D_f \cap (x_0, +\infty)$, allora tale valore è detto *limite destro* di f in x_0, denotato

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

N.B.: limite destro, in generale, è in $\overline{\mathbb{R}}$.

Con i quantificatori (<u>nel caso $L \in \mathbb{R}$</u>)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; : \; \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f, \qquad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Definizione (limite sinistro)

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si supponga che

$$x_0 \text{ sia di accumulazione per l'insieme } D_f \cap (-\infty, x_0).$$

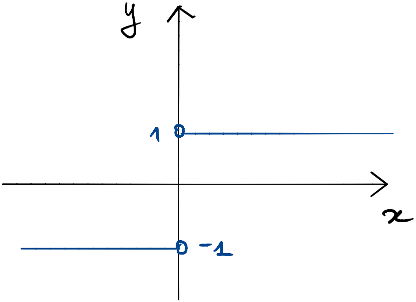
Il *limite sinistro* di f in x_0 (denotato come $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$) è il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $A \cap (-\infty, x_0)$.
N.B.: limite sinistro, in generale, è in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione con i quantificatori:

Esempio: la funzione segno

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ da

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Legame fra la nozione di limite e limiti destro e sinistro

Proposizione

Siano $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per D_f. Sia $\boxed{L \in \overline{\mathbb{R}}}$. Si ha che

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \boxed{\text{e}} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

In particolare, se

- almeno uno fra $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ non esiste, o
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono, ma sono diversi

allora il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ NON esiste.

L'algebra dei limiti

Si ha (con $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x\to x_o} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_o} f(x) + \lim_{x\to x_o} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_o} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x\to x_o} f(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_o} f(x) \lim_{x\to x_o} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_o} f(x)}{\lim_{x\to x_o} g(x)},$$

non appena esistono i limiti a secondo membro e in assenza di forme indeterminate

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

L'algebra dei limiti si estende ai limiti unilateri

Quello che ci aspetta

.... Una serie di risultati teorici sui limiti:

1. Il teorema di unicità
2. Caratterizzazione del limite tramite limiti di successioni
3. I teor. di limitatezza locale, del confronto, della permanenza del segno, dei due carabinieri
4. Limiti di funzioni monotone

Spesso non lo diremo esplicitamente, ma tutti qs. risultati si estendono (opportunamente) al caso di limiti unilateri....

Teorema di unicità del limite

Siano $\boxed{x_0 \in \overline{\mathbb{R}}}$, $\boxed{L,\ L' \in \overline{\mathbb{R}}}$. Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per D_f. Se

$$f(x) \to L \qquad \text{e} \qquad f(x) \to L' \qquad \text{per } x \to x_0$$

allora $L = L'$.

Dimostrazione: Consideriamo per semplicità il caso $x_0, L, L' \in \mathbb{R}$. Per assurdo sia $L \neq L'$.

Limiti e successioni

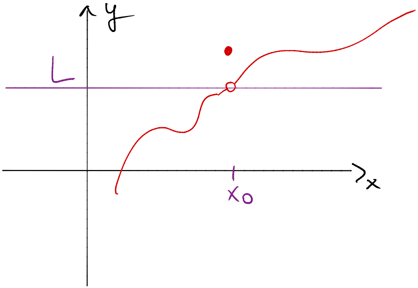
Teorema

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per D_f. Si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

se e solo se per ogni successione $x_n \subset D_f \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0 risulta

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$



Dimostrazione

Ci limitiamo al caso $\boxed{L \in \mathbb{R}}$
(I) Supponiamo per ipotesi che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione a valori in $D_f \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0.

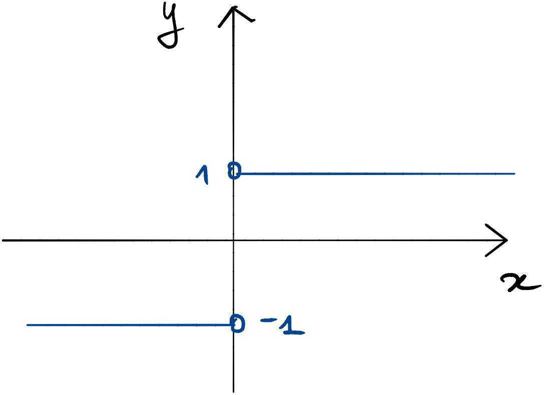
(II) Supponiamo a che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$ per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $D_f \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0. Dimostriamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
Se per assurdo non fosse $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, allora

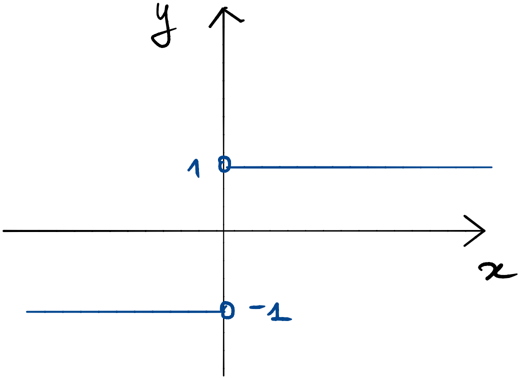
Un’applicazione “in positivo”

Un'applicazione "in negativo"

Il teorema sopra scritto può essere usato per dimostrare che una funzione non ha limite per x che tende a x_0: basterà determinare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ ambedue convergenti a x_0 e tali che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = L, \quad l \neq L.$$





y
1
x
-1

Molti dei risultati sui limiti di successioni si estendono ai limiti di funzioni

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è limitata in A se

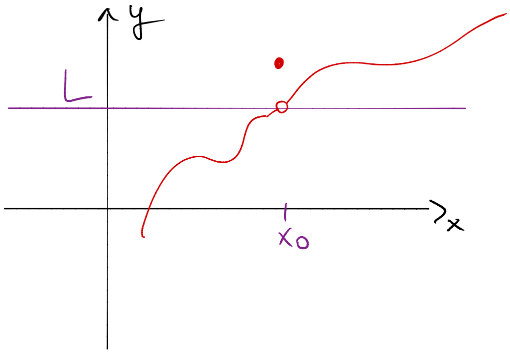
$$\exists\, M > 0 : \quad |f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in A.$$

Teorema di limitatezza locale

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \boxed{L \in \mathbb{R}}.$$

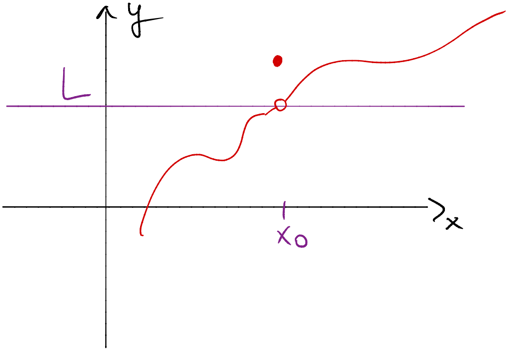
Allora esiste un intorno I di x_0 tale che f è limitata in $I \cap D_f \setminus \{x_0\}$.



Teorema di permanenza del segno

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \to x_o} f(x) = L > 0$, allora

$$\text{esiste } I \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che}$$
$$f(x) > 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\} \cap D_f.$$



Teorema dei due carabinieri

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che, in un intorno I del punto x_0, si abbia

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Se $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$, allora anche f ammette limite per $x \to x_0$ e si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Funzioni monotone

Definizione

Una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$ si dice

(i) monotona non decrescente o monotona crescente se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \;:\quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y);$$

(ii) monotona non crescente o monotona decrescente se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \;:\quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y);$$

Definizione

$f : D_f \to \mathbb{R}$ si dice

(iii) <u>strettamente crescente</u> se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \quad : \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y);$$

(iv) <u>strettamente decrescente</u> se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \quad : \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y);$$

Osservazioni

Monotonia delle funzioni elementari

Teorema (limiti di funzioni monotone)

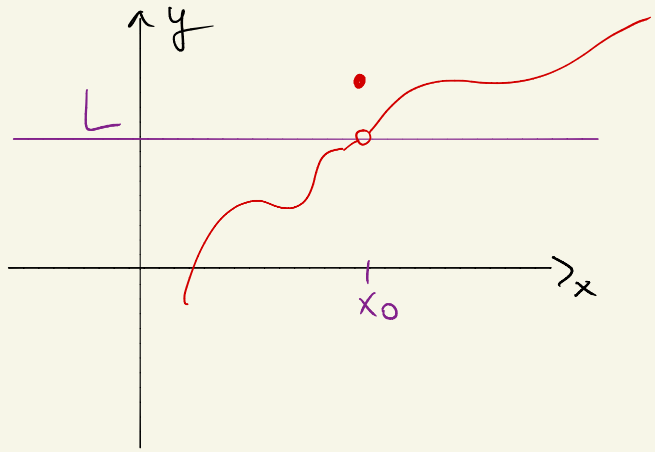
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un **punto di accumulazione** per D_f. Allora

$$\boxed{\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)} \text{ e si ha}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \mathrm{dom}\, f, \quad x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathrm{dom}\, f, \quad x > x_0\}.$$

- Vale un risultato analogo per funzioni decrescenti


y
L
x
x_0